

1. Mikä on 3-askelinen eksplisiittinen Adamsin menetelmä?
2. Tarkastellaan yleistä moniaskelmenetelmää

$$\sum_{j=0}^{\ell} a_j x_{n+j} = h \sum_{j=0}^{\ell} b_j f(t_{n+j}, x_{n+j})$$

Tämä on *BDF-menetelmä*, jos $b_{\ell} = 1$ ja $b_j = 0$ kun $j < \ell$, minkä jälkeen parametrit a_j valitaan siten, että kertaluku on mahdollisimman iso. Laske BDF-menetelmät tapauksissa $\ell = 1$ ja $\ell = 2$. Mitkä kertaluvut saat? Tapausta $\ell = 1$ sanotaan *implisiittiseksi Eulerin menetelmäksi*. Totea, että tapauksessa $\ell = 2$ saadaan vahvasti stabiili menetelmä.

3. Tarkastellaan integraalimuotoa

$$x(t_{n+2}) - x(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+2}} f(s, x(s)) ds$$

Nyt voisi ajatella, että saataisiin järkeviä menetelmiä seuraavasti:

$$x_{n+2} - x_n = h(b_2 f_{n+2} + b_1 f_{n+1} + b_0 f_n)$$

Laske kertoimet b_j siten, että kertaluku on mahdollisimman iso sekä eksplisiittisessä että implisiittisessä tapauksessa. Implisiittisen menetelmän pitäisi vaikuttaa tutulta.

Yleisesti ottaen menetelmiä joille $\rho(z) = z^{\ell} - z^{\ell-2}$ sanotaan *Nyströmin menetelmiksi*. Evert Nyström oli Teknillisen korkeakoulun professori vuosina 1937-1960, mutta menetelmänsä hän kehitti jo 20-luvulla. Huomaa, että Nyströmin menetelmät ovat nollastabiileja, mutta eivät vahvasti stabiileja. Samoin mikä tahansa tämäntyyppinen integraalimuodosta lähtevä menetelmä jossa $\rho(z) = z^{\ell} - z^m$ on nollastabiili mutta ei vahvasti stabiili.

4. Olkoon $a > 0$ ja tarkastellaan testiongelmaa

$$\begin{cases} x' = -ax \\ x(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x(t) = e^{-at}$$

Nyt $x(t) \rightarrow 0$ kun $t \rightarrow \infty$ joten olisi luonnollista että numeerisellekin ratkaisulle pätsi $x_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$. Ratkaise Eulerin menetelmällä. Millä h :n arvoilla $x_n \rightarrow 0$ kun $n \rightarrow \infty$? Entä jos ratkaistaan implisiittisellä Eulerin menetelmällä?

5. Sovella eksplisiittistä 2-askelistä Nyströmin menetelmää edellisen tehtävän testiongelmaan. Näytä, että $|x_n| \rightarrow \infty$ kaikilla $h > 0$, kun $n \rightarrow \infty$. Tämän ilmiön takia menetelmiltä pitää käytännössä vaatia vahva stabiilisuus.