

Laskuharjoitus 12

MATLABISSA on kolme perusmenetelmää alkuarvotehtäville.

- (i) **ode45**. Tämä on Dormandin ja Princen RK-menetelmä jossa on 4. ja 5. kertaluvun menetelmäpari. Virhearvio ja askelpituuden säätö toteutetaan vertaamalla näillä eri menetelmillä saatuja arvoja.
- (ii) **ode113**. Ennustaja-korjaaja tekniikkaa hyödyntävät Adamsin menetelmät. Lukujen 113 merkitys ei ole minulle selvinyt.
- (iii) **ode15s**. BDF-menetelmiin perustuvat menetelmät kertalukuun 5 asti. Soveltuvat erityisesti kankeille tehtäville.

Erilaisia parametreja voi säätää komennon **odeset** avulla. Pelkkä komento **odeset** näyttää kaikkien parametrien oletusarvot.

Difyhtälösystemit voidaan kirjoittaa samoin kuin skalaaritapaus:

$$x' = f(t, x) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x'_1 = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

Tehtävä on autonominen jos f ei riipu t :stä, siis $x' = f(x)$. Tällöin sanotaan, että f on *vektorikenttä* ja p on vektorikentän ja vastaavan difyhtälön *tasapainopiste*, jos $f(p) = 0$.

1. Tarkastellaan tehtävää

$$\begin{cases} x' = 3x - x^2 + \sin(t) \\ x(0) = 1 \end{cases}$$

Ratkaise eri menetelmillä välillä $[0, 20]$. Tässä ei pitäisi olla suuriakaan eroja eri menetelmien välillä. Kokeile erilaisia toleransseja: **reitol** ja **abstol**. Huomaa, että ilman sinitermiä ratkaisu lähestyisi tasapainopistettä $x = 3$. Nyt ratkaisu jää värähtelemään tämän arvon molemmin puolin.

2. Tehtävän $x' = x^2$, $x(0) = 1$ ratkaisu on $x(t) = 1/(1 - t)$. Ratkaisua ei siis voi jatkaa ajanhetkille $t > 1$. Miten menetelmät käyttäytyvät tässä tapauksessa?

3. Tarkastellaan systeemiä

$$\begin{cases} x'_1 = (x_1 - x_2)(1 - x_1 - x_2) \\ x'_2 = x_1(2 - x_2) \end{cases}$$

Tällä on selvästi 4 tasapainopistettä. Laske ratkaisuja eri alkuarvoilla. Piirrä kuvia ratkaisukäyristä (x_1, x_2) tasoon. Tässä tarvitset optiota `odeset('outputfcn',@odephas2)`. Saat useita käyriä samaan kuvaan kun annat komennon `hold`. Voiko laskujesi perusteella päätellä, että kaikki tasapainopisteet ovat ”kvalitatiivisesti erilaisia”?

4. Toisen kertaluvun difyhtälö voidaan palauttaa ensimmäisen kertaluvun systeemiksi sopivilla sijoituksilla. Tarkastellaan seuraavaa *Airy*n difyhtälöä

$$y'' + ty = 0$$

Palauta tämä ensimmäisen kertaluvun systeemiksi sijoituksilla $x_1 = y$, $x_2 = y'$. Voidaan osoittaa, että ratkaisulla $y = x_1$ on äärettömän monta positiivista nollakohtaa. Laske 10 ensimmäistä käyttämällä `event` optiota.

Airy'n yhtälön kahta tiettyä lineaarisesti riippumatonta ratkaisua sanotaan *Airy*n funktioiksi. Nämä saadaan MATLABISSA komennoina `airy(-t)` ja `airy(2,-t)`. Miinus siksi, että MATLAB noudattaa kilpailevaa käytäntöä jonka mukaan Airy'n yhtälö on $y'' - ty = 0$. Jos siis valitset alkuarvot $x_1(0) = \text{airy}(0)$ ja $x_2(0) = -\text{airy}(2,0)$, niin tällöin voit verrata numeerista ratkaisua MATLABIN antamaan funktioon `airy(-t)`.

5. Kemiallisissa reaktioissa tyypillisesti tulee kankeita yhtälöitä koska reaktioihin liittyvät aikavakiot ovat hyvinkin erisuuria. Eräs tunnettu esimerkki on seuraava.

$$\begin{cases} x'_1 = -0.04x_1 + 10^4x_2x_3 \\ x'_2 = 0.04x_1 - 10^4x_2x_3 - 3 \cdot 10^7x_2^2 \\ x'_3 = 3 \cdot 10^7x_2^2 \end{cases}$$

Muuttujat x_j kuvaavat eri aineitten konsentraatioita ajan funktiona. Kokeile eri alkuarvoja ja totea, että tässä BDF-menetelmät ovat parempia, tai itse asiassa ainoa järkevä mahdollisuus. Jos kokeilet muita menetelmiä ja laskenta jumittuu, niin laskennan voi pysäyttää komennolla `control c`. Koska fysikaalisesti nyt kaikkein muuttujien täytyy olla positiivisia, niin tässä voisi antaa option `odeset('nonnegative',[1,2,3])`.

Voidaan osoittaa, että jos alkuarvot ovat $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$, niin

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_1(t) = x_2(t) = 0 \quad , \quad \lim_{t \rightarrow \infty} x_3(t) = 1$$

Valitse jokin iso aikaväli $[0, T]$ ja totea, että muuttujat lähestyvät varsin hitaasti raja-arvoja.