

Laskuharjoitus 2

1. Etsi Newtonin menetelmällä approksimaatio funktion

$$f(x) = x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} - 2$$

nollakohdalle. Etsi siis ensin jokin väli jossa on (ainakin yksi) nollakohta ja valitse sitten sopiva alkuarvo.

2. Olkoon  $x_k = 2^{-k^4}$ . Jono suppenee siis erittäin nopeasti kohti nollaa. Näytä, että suppeneminen ei kuitenkaan ole neliöllistä.
3. Olkoon  $p = (1, 3)$  ja olkoon  $q$  piste parabelilla  $y = x^2$  joka on lähinnä pistettä  $p$ . Etsi Newtonin menetelmän avulla approksimaatio pisteelle  $q$ .
4. Olkoon  $f(x) = \arctan(x)$ . Mikä on  $N(x) = x - f(x)/f'(x)$ ? Newtonin menetelmä tietenkin suppenee kun alkuarvo on riittävän lähellä nollaa. Osoita, että jos  $x_0$  on riittävän iso, niin menetelmä ei suppene. Näytä että itse asiassa  $x_k = (-1)^k y_k$  missä  $y_k \rightarrow \infty$ .

5. Olkoon  $f(x) = x^{1/3}$ . Nyt  $f$  on jatkuva mutta  $f'(0)$  ei ole määritelty. Näytä, että tästä huolimatta  $N(x) = x - f(x)/f'(x)$  on hyvin määritelty ja jopa jatkuvasti derivoituva myös origossa. Totea, että tässä tapauksessa Newtonin menetelmä ei suppene olipa alkuarvo  $x_0 \neq 0$  mikä tahansa.

Sanotaan, että piste on *singulaarinen*, jos jokin funktion derivaatoista ei ole määritelty kyseisessä pisteessä. Yleisesti ottaen, jos funktion nollakohta on singulaarinen piste niin Newtonin menetelmä ei välttämättä toimi toivotulla tavalla.

6. Newtonin menetelmän eräs variantti on *sekanttimenetelmä*. Siinä ei lasketa derivaattaa, vaan lasketaan approksimaatio

$$\delta f_k = \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}} \approx f'(x_k)$$

Perustele graafisesti (tai muuten) miksi  $\delta f_k \approx f'(x_k)$ . Sekanttimenetelmä on siis

$$x_{k+1} = x_k - \frac{(x_k - x_{k-1})f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

Tässä siis tarvitaan 2 alkuarvoa. Kokeile tätä tehtävän 1 funktioon.