

Laskuharjoitus 3

1. Lineaarisen systeemin tapauksessa voidaan kiintopisteiteraatio luontevasti kirjoittaa hieman toisin. Tarkastellaan edelleen systeemiä $Ax = b$. Olkoon $D = \text{diag}(a_{11}, \dots, a_{nn})$ ja $\hat{A} = A - D$. Siis

$$Ax = b \Leftrightarrow Dx = -\hat{A}x + b \Leftrightarrow x = -D^{-1}\hat{A}x + D^{-1}b$$

Tästä saadaan

$$x^{k+1} = -D^{-1}\hat{A}x^k + D^{-1}b$$

mitä sanotaan *Jacobin iteraatioksi*. Valitse jokin b ja testaa tämän menetelmän suppenemista kun

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & c \\ -1 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

Tässä siis c on jokin parametri. Millä parametrin arvoilla iterointi supenee?

2. Olkoon

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad T = I - \alpha A$$

Voidaanko valita α siten, että $\|T\|_1 < 1$ tai $\|T\|_\infty < 1$? Millä α :n arvolla saadaan pienin normi?

3. Osoita, että $f(x) = \sqrt{|x|}$ ei ole Lipschitz-jatkuva origon ympäristössä.
4. Anna esimerkit seuraavista tapauksista missä g on jatkuva.

- (a) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ on suljettu, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$, $|g(x) - g(y)| \leq \mu|x - y|$ kaikilla $x, y \in \Omega$ ja $\mu < 1$, mutta g :llä ei ole kiintopistettä Ω :ssa.
- (b) $I \subset \mathbb{R}$ on suljettu, $|g(x) - g(y)| < |x - y|$ kaikilla $x, y \in I$ ja $g(I) \subset I$, mutta g :llä ei ole kiintopistettä I :ssä.
- (c) $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $g(\Omega) \subset \Omega$, $|g(x) - g(y)| \leq \mu|x - y|$ kaikilla $x, y \in \Omega$ ja $\mu < 1$, mutta g :llä ei ole kiintopistettä Ω :ssa.

Kiintopistelause on siis siinä mielessä optimaalinen, että kaikki oletukset ovat tarpeellisia.

5. Tarkastellaan systeemiä

$$f(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f_1 = x_1^2 - 2x_2 = 0 \\ f_2 = x_2^2 - 2x_1 = 0 \end{cases}$$

Bézout'n lauseen perusteella tällä on korkeintaan 4 ratkaisua. Totea, että tässä tapauksessa on 2 reaalista ja 2 kompleksista ratkaisua. Mikä on Newtonin kuvaus $N(x) = x - (df)^{-1}f(x)$? Millä x :n arvoilla N on määritelty? Tarkista, että jos x_* on (reaalinen) ratkaisu, niin $dN_{x_*} = 0$.

6. Jatketaan edellisen tehtävän analyysiä. Etsi jokin alue jommankumman reaalisen ratkaisun ympäristöstä siten että N on siellä kontraktio. Valitse sitten alkuarvo $x^0 = (a, a)$, missä $a \neq \pm 1$. Analysoi mahdollisimman tarkasti miten Newtonin iteraatio tässä tapauksessa käyttäytyy.