

1. Tarkastellaan Bernsteinin polynomeja

$$B_k^n(x) = \frac{n!}{k!(n-k)!} x^k (1-x)^{n-k}$$

Näytä, että $B_k^n(x) = (1-x)B_k^{n-1}(x) + xB_{k-1}^{n-1}(x)$. (Sovitaan, että $B_k^n = 0$ jos $k < 0$ tai $k > n$).

2. Valitse jotkin n ja k edellisessä tehtävässä ja piirrä käyrät B_k^n , B_k^{n-1} ja B_{k-1}^{n-1} välillä $[0, 1]$. Käyrä B_k^n on kahden muun ”välissä”. Miksi? Päteekö tämä yleisesti?
3. Olkoon $f(x) = \cos(\pi x) + 2 \sin(\pi x)$. Mikä on tätä vastaava approksiimaatio f_2 toisen asteen Bernsteinin polynomeilla? Piirrä kuva. Olkoon sitten $p^k = (k, f(k/2))$, $k = 0, 1, 2$. Pisteet p^k määrittävät kolmion K tasoon. Osoita, että käyrä f_2 on tässä kolmiossa.

Tämän voi osoittaa 2 eri tavalla. Olkoon $\bar{p} = (\bar{x}, f_2(\bar{x}))$. Voidaan suoraan käyttää luentojen lemmaa A.4 ja näyttää, että $\bar{p}$ on pisteitten p^k konvekssi kombinaatio, ja siis $\bar{p} \in K$. Toinen tapa on ehkä intuitiivisempi. Olkoon S_0 (vastaavasti S_1) jana joka yhdistää pisteet p^0 ja p^1 (vastaavasti p^1 ja p^2). Nyt pitäisi näyttää, että $\bar{p} = (1-\bar{x})q^0 + \bar{x}q^1$ missä $q^0 \in S_0$ ja $q^1 \in S_1$.

Yleisemminkin pätee: jos $p^k = (k, f(k/n))$, $k = 0, 1, \dots, n$, niin f_n on näitten pisteitten konveksissa peitteessä. Siis pisteet p^k kontrolloivat hyvin tarkasti missä käyrä f_n voi kulkea.

4. Osoita, että B_k^n :llä on maksimi pisteessä $x = k/n$. Mikä on maksimin arvo?
5. Kirjoita polynomi $f = -3x^2 + 4x + 5$ Legendren polynomien avulla.
6. Mikä on funktion $f(x) = \cos(\pi x) + 2 \sin(\pi x)$ toisen asteen approksiimaatio Legendren polynomien avulla? Vertaa Bernsteinin polynomeilla saatuun ratkaisuun.