

Laskuharjoitus 6

On siis nähty 3 eri tapaa approksimoida funktioita: Bernsteinin, Legendren ja Lagrangen polynomeilla. Katsotaan nyt tarkemmin miten MATLABILLA voidaan näitä approksimaatioita käsitellä. Polynomien arvoja voi siis laskea komennolla `polyval`.

- Viime harjoituksissa oli Juha-Matin tiedosto `bernstein.m` jonka avulla saatiin Bernsteinin polynomeja. Ohessa on tiedostot `legepo.m` ja `lege01.m` jotka antaa Legendren polynomit. Ensimmäinen käyttää yhteyttä Legendren ja Bernsteinin polynomien välillä ja toinen käyttää Legendren polynomit määrittävää rekursiota. Määritellään bijektio $\varphi : [0, 1] \rightarrow [a, b]$

$$\varphi(x) = a + (b - a)x \quad \leftrightarrow \quad \varphi^{-1}(x) = \frac{x - a}{b - a}$$

Piirrä φ :n avulla joitain Legendren ja Bernsteinin polynomeja välille $[5, 17]$.

- Olkoon $f(x) = \exp(\sin(7x))$ ja tarkastellaan väliä $[0, 1]$. Olkoon b_n Bernsteinin polynomien avulla saatu n -asteinen approksimaatio. Lauseen 4.1 todistuksen perusteella pitäisi päteä $\|f - b_n\|_\infty \approx c/n$ missä c on jokin vakio. Tätä voi testata seuraavasti. Laske b_2, b_4, b_8 jne. Nyt pitäisi päteä

$$\frac{\|f - b_n\|_\infty}{\|f - b_{2n}\|_\infty} \approx 2$$

MATLABISSA ei suoraan voi laskea maksiminormia. Mutta jos evaluoi funktion ”riittävän” tiheästi ja ottaa sitten maksimin näistä arvoista komennolla `max`, niin saa tähän tarkoitukseen riittävän hyvän approksimaation, kuten oheisessa funktiossa `virhe.m`.

Kun aina kaksinkertaistaa n :n niin laskenta on nopeasti työlästä. Tarkemmin voi edetä seuraavasti. Olkoon virhe $\mathcal{E}_n = \|f - b_n\|_\infty$ ja oletetaan, että pätee $\mathcal{E}_n \approx cn^{-\alpha}$ missä $\alpha > 0$. Tällöin

$$\ln(\mathcal{E}_n) \approx \ln(c) - \alpha \ln(n)$$

Siiis kun käyttää logaritmistista asteikkoa sekä n :lle että virheelle niin pitäisi tulla suora, jonka kulmakerroin antaa suppenemisnopeuden α . Tällainen kuva voidaan piirtää komennolla `loglog`.

3. Tarkastellaan edellisen tehtävän funktiota, mutta tutkitaan nyt suppenemista Legendren polynomien suhteen. Olkoon $\mathbf{le}_n$ Legendren polynomeilla saatu approksimaatio. Mikä on nyt

$$\|f - \mathbf{le}_n\|_\infty \approx ??$$

Tässä pitää siis muodostaa tuloja fL_k ja integroida niitä. Oheinen funktio `kerroin.m` on eräs tapa laskea näitä. Siinä siis lasketaan lemmän 4.6 kerroin c_k . Koska Legendren polynomien kaikki nollakohdat on välillä $[0, 1]$, niin polynomin täytyy ”värähdellä” yhä enemmän isoilla k :n arvoilla joten numeerinen integrointi tulee yhä hankalammaksi. Tämän takia isommilla k :n arvoilla MATLAB antaa virheilmoituksen.

4. Lopuksi sama tehtävä interpoloivan polynomin avulla. Tämä voidaan muodostaa suoraan komennolla `polyfit` eikä tarvitse muodostaa Lagrangen polynomeja. Merkitään näin saatua approksimaatiota $\mathbf{la}_n$. Kokeile taas mitä antaa

$$\|f - \mathbf{la}_n\|_\infty \approx ??$$

5. Olkoon $f(x) = \cos(x) + \sqrt{|x|}$ ja tarkastellaan väliä $[-2, 2]$. Koska nyt f ei ole derivoituva origossa niin suppenemisen pitäisi olla hitaampaa. Testaa tätä jollain yllä mainituista tavoista (Bernstein, Legendre, Lagrange). Nyt väli ei ole $[0, 1]$ joten Bernsteinin ja Legendren tapauksissa pitää käyttää funktiota φ tehtävästä 1. Tarkastellaan siis funktiota $\bar{f} = f \circ \varphi$. Piirrä jokin saatu approksimaatio myös alkuperäiselle välille.
6. *Rungen ilmiö*. Olkoon $f(x) = 1/(1+x^4)$ välillä $[-3, 3]$. Valitse tasavälinen interpolointi ja muodosta polynomi komennon `polyfit` avulla. Tarkista, että approksimaatio huononee välin päissä kun polynomin aste kasvaa. Valitse sitten interpolointipisteiksi *Tshebyshevin pisteet*:

$$x_k = 3 \cos(\theta_{n-k}) \quad \text{missä} \quad \theta_k = \frac{(2k+1)\pi}{2n+2} \quad \text{ja} \quad k = 0, \dots, n$$

Tällöin interpolointipisteitä on suhteellisesti enemmän välin päissä, ja tämä pyrkii stabiloimaan approksimaatiota. Tarkista, että tällä tilanne paranee funktion f tapauksessa. (komento `fliplr` voi olla kätevä).