

Laskuharjoitus 9

1. Mikä on menetelmän

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{8} (f(0) + 3f(1/3) + 3f(2/3) + f(1))$$

kertaluku?

2. Haluttaisiin laskea integraali

$$\int_{-1}^2 e^{2x} \sin(3x) dx$$

Halutaan, että virhe olisi pienempi kuin 10^{-6} . Arvioi kuinka monessa pisteessä funktion arvo pitää laskea että päästäisiin tähän tarkkuuteen trapetsimenetelmällä ja Simpsonin menetelmällä. Ohje: voit joko palauttaa tehtävän perusvälille $[0, 1]$ tai sitten muokata menetelmiä ja virhearvioita siten, että ne toimivat mielivaltaisella välillä.

3. Tarkastellaan integraalia

$$\int_1^5 \frac{5x^2 - x + 4}{\sqrt{|x - 2|}} dx$$

Laske approksimaatio Gaussin menetelmien avulla. Kuinka monta funktion arvoa tarvitaan, että virhe olisi pienempi kuin 10^{-6} . Ohje: muokkaa ensin integroitavaa funktiota siten, että saat sileän funktion.

4. Laske tehtävissä 2 ja 3 olleet integraalit Maplen avulla käyttäen luennotta esiteltyjä rutiineja apuna (Moodlessa tiedostossa `numint.txt`). Vertaa tarkkaan ratkaisuun. Oliko tehtävissä 2 ja 3 esitetyt virhearviot realistisia?
5. Laske approksimaatio ellipsin $4x^2 + 9y^2 = 36$ kehän pituudelle. Ohje: jos $c : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ on käyrä niin käyrän pituus on

$$L(c) = \int_{t_0}^{t_1} |c'(t)| dt$$

Voidaan osoittaa, että tätä ei voi integroida tarkasti. Ramanujan sai ellipsin kehän pituudelle approksimaation

$$L(c) \approx \pi \left(3(a+b) - \sqrt{(3a+b)(a+3b)} \right)$$

missä a ja b ovat ellipsin puoliakselit; tässä tapauksessa siis $a = 3$ ja $b = 2$. Valitse siis jokin menetelmä ja vertaa Ramanujanin approksimaatiota saamaasi tulokseen.

Jos integroit MAPLELLA, niin saat tuloksen muodossa

$$L(c) = 12 \operatorname{EllipticE}(\sqrt{5}/3)$$

Vertaa tätä approksimaatioihin. Ei liene yllättävää että sana **Elliptic** esiintyy ratkaisussa ja kyseistä funktiota kutsutaan *elliptiseksi integraaliksi*. Se on yksi lukemattomista *erikoisfunktioista* joka on määritelty seuraavasti

$$\operatorname{EllipticE}(x) = \int_0^1 \frac{\sqrt{1-x^2s^2}}{\sqrt{1-s^2}} ds$$

Elliptisen integraalin arvojen laskeminen on siis sinänsä numeerisen integroinnin ongelma.