

Laskuharjoitus 9, tehtävä 3

Tarkastellaan integraalia

$$I = \int_1^5 \frac{5x^2 - x + 4}{\sqrt{|x - 2|}} dx = \int_1^2 \frac{5x^2 - x + 4}{\sqrt{2 - x}} + \int_2^5 \frac{5x^2 - x + 4}{\sqrt{x - 2}} = I_1 + I_2$$

Olkoon $s^2 = 2 - x$. Tällöin

$$I_1 = \int_1^2 \frac{5x^2 - x + 4}{\sqrt{2 - x}} dx = \int_0^1 (10s^4 - 38s^2 + 44) ds = \frac{100}{3}$$

Vastaavasti I_2 :n tapauksessa tehdään sijoitus $3s^2 = x - 2$ jolloin

$$I_2 = \int_2^5 \frac{5x^2 - x + 4}{\sqrt{x - 2}} dx = \int_0^1 2\sqrt{3}(45s^4 + 57s^2 + 22) ds = 100\sqrt{3}$$

Nyt voidaan kirjoittaa

$$I = I_1 + I_2 = \int_0^1 g(s) ds = \frac{100}{3} + 100\sqrt{3} \quad \text{missä} \\ g(s) = (90\sqrt{3} + 10)s^4 + (114\sqrt{3} - 38)s^2 + 44\sqrt{3} + 44$$

Kolmen pisteen Gaussin menetelmä laskee tarkasti polynomit viidenteen asteeseen asti. Koska g on neljännen asteen polynomi niin integraalin tarkan arvon laskemiseen tarvitaan kolme pistettä.