

k14

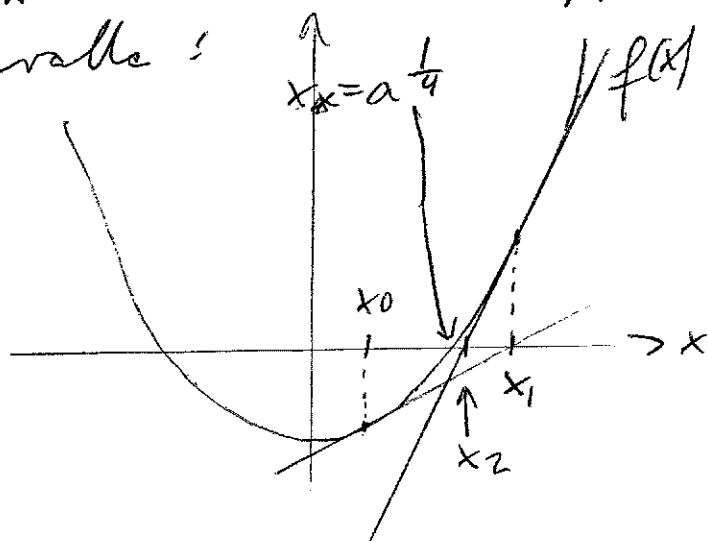
Osoitetaan, että iterointi suppenee kaikilla alkueinoilla $x_0 > 0$. Alla on todistettu väite.

$$f(x) = x^4 - a$$

$$f'(x) = 4x^3$$

$$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - \frac{x^4 - a}{4x^3} = x + \frac{a - x^4}{4x^3}$$

Qk kuva $x_{k+1} = N(x_k)$ on sama kuin tangenttisuoran kuva. Tarkastellaan Newtonin iterointi suppenemista aluksi kuvalla:



Kuvasta nähdään, että

$$1^\circ \quad 0 < x_0 < a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x_1 > a^{\frac{1}{4}}$$

$$2^\circ \quad x_k \geq a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x_{k+1} \geq a^{\frac{1}{4}} \quad \text{****}$$

Merk $g(x) = N(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

$$J = [a^{\frac{1}{4}}, \infty)$$

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$$

Nyt ~~on~~ voidaan sanoa tolin, että
kain 1° ja 2°

$$g(A) \subset J$$

$$g(J) \subset J$$

~~Wäre~~

Väite: iterointi suppeee kaikille $x_0 > 0$

Tod Ollaan $x_0 > 0$ m.v. Nyt $x_1 = g(x_0) \in J$.

Väitteen osoittamiseksi, että Lemma 2.1 pätee myös tarkasteltavalle g, J ,

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(x + \frac{x^4}{4x^3} + \frac{a}{4x^3} \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{4}x + \frac{a}{4x^3} \right)$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{d}{dx} \frac{a}{4} \cdot x^{-3}$$

$$= \frac{3}{4} + \frac{a}{4} \cdot (-3)x^{-4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \frac{a}{x^4}$$

$$= \frac{3}{4} \left(1 - \frac{a}{x^4} \right)$$

~~Wäre~~

$$\text{Nyt } x \in J \Rightarrow x \geq a^{\frac{1}{4}} \Rightarrow x^4 \geq a \Rightarrow 1 \geq \frac{a}{x^4} \geq 0$$

$$\Rightarrow -1 \leq -\frac{a}{x^4} \leq 0 \quad \parallel +1$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - \frac{a}{x^4} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq g'(x) \leq \frac{3}{4} \quad \forall x \in J$$

Nyt Lemma 2.1 ehdot ovat voimassa

ja koska $x_1 \in J$, niin $\{x_k\}$ kiintopisteitolee

suppeee kohti kiintopistettä x_* . $x_* = ?$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^4 - a}{4x_k^3}$$

oletetaan rajo - arvot $k \rightarrow \infty$
positiivien, $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{k \rightarrow \infty} x_{k+1} = x_*$

$$\Rightarrow x_* = x_* - \frac{x_*^4 - a}{4x_*^3} \Rightarrow x_* = \pm a^{\frac{1}{4}}$$

ja koska $x_k \in J$, niin $x_* = a^{\frac{1}{4}}$.