h2 t4

Pitkä todistus, aluksi vähän pohdintaa todistuksen luonteesta.

$f(x) = \arctan x$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = 1+x^2$

$N(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)} = x - (1+x^2) f(x)$

$\lim_{x \to \infty} f(x) = \frac{\pi}{2} = C$

$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\frac{\pi}{2} = -C$

$x \approx \infty \Rightarrow f(x) \approx C = \frac{x}{|x|} C$

$x \approx -\infty \Rightarrow f(x) \approx -C = \frac{x}{|x|} C$

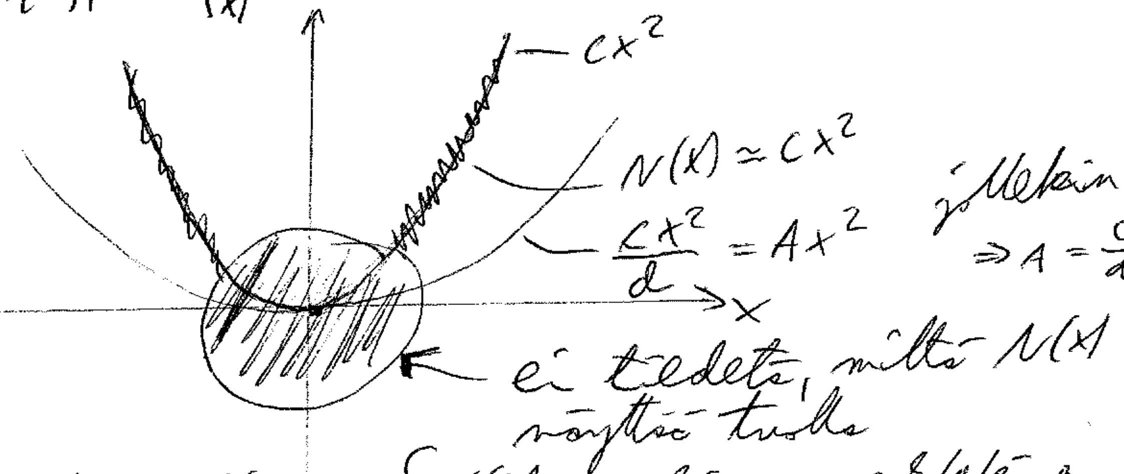
Siis $|x|$ suuri $\Rightarrow f(x) \approx \frac{x}{|x|} C$ ja

$N(x) = \cancel{x} - (\cancel{1}+x^2) f(x) \approx -x^2 \cdot \frac{x}{|x|} C = \underbrace{-\frac{x^3}{|x|} C}$

NÄILLÄ EI OLE MERKITYSTÄ

eri merkkinen kuin x

$\Rightarrow |N(x)| \approx \frac{|x|^3}{|x|} C = C|x|^2 = Cx^2$



jolloin $d > 1$

$\Rightarrow A = \frac{C}{d} < C$

Siis $|x|$ suuri $\Rightarrow \begin{cases} N(x) \text{ eri merkkinen kuin } x \\ |N(x)| \geq Ax^2 \end{cases}$

$\begin{cases} \text{Kuinka suuri } |x|\text{:n pitää olla?} \\ \text{Sopiva } A\text{?} \end{cases}$ <u>Ratk.</u> Esim. $|x| \geq 2$ ja $A = \frac{1}{2}$. $\rightarrow$

$f(x) = \arctan x$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow \frac{1}{f'(x)} = 1+x^2$

$\Rightarrow N(x) = x - f(x) \cdot \frac{1}{f'(x)} = \underline{x - (1+x^2)f(x)}$

$\Rightarrow |N(x)| = |x - (1+x^2)f(x)| \overset{\Delta\text{-ey}}{\geq} |(1+x^2)f(x)| - |x|$

$= |1+x^2|\,|f(x)| - |x| \quad \approx c|x|^2 \quad x$ suuri

$\geq |x^2|\,|f(x)| - |x|$

$= \frac{|x|^2 |f(x)|}{2} + \frac{|x|^2 |f(x)|}{2} - |x|$

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)$ kasvava

Nyt $f(2) = 1{,}10 \geq 1$ joten $f(x) \geq 1 \quad \forall x \geq 2$

$f(-2) = -1{,}10 \leq -1$ joten $f(x) \leq -1 \quad \forall x \leq -2$

$N(x) = -N(-x)$ eli N on pariton

Jos $|x| \geq 2$, niin $x \geq 2 \Rightarrow f(x) \geq 1 \Rightarrow |f(x)| \geq 1$

tai $x \leq -2 \Rightarrow f(x) \leq -1 \Rightarrow |f(x)| \geq 1$

Siis $|x| \geq 2 \Rightarrow |f(x)| \geq 1$, Oletetaan, että $|x| \geq 2$. Nyt $\frac{|x|}{2} \geq 1$.

$$|N(x)| \geq \frac{|x|^2}{2} + \frac{|x|^2}{2} - x = \frac{|x|^2}{2} + \underbrace{|x|}_{\geq 0}\underbrace{\Big(\underbrace{\frac{|x|}{2}}_{\geq 1} - 1\Big)}_{\geq 0} \geq \frac{|x|^2}{2}$$

Saatiin yhtälö $|N(x)| \geq \frac{|x|^2}{2}$. 1

Oletetaan, että $|x_k| > 2$. Siis $|x| = 2a$ ~~jollekin~~, $a > 1$.

Nyt $|x_k|^2 = 4a^2$

$\frac{|x_k|^2}{2} = 2a^2$

$\Rightarrow |x_{k+1}| = |N(x_k)| \geq \frac{|x_k|^2}{2} = 2a^2 \geq 2$

Siis $|x_k| = 2a$, $a > 1 \Rightarrow |x_{k+1}| \geq 2a^2$

Siis $|x_k| = 2a$

$|x_{k+1}| \geq 2a^2$

$|x_{k+2}| \geq 2(a^2)^2 = 2a^{2\cdot 2} = 2a^{2^2}$

$|x_{k+3}| \geq 2(a^{2^2})^2 = 2a^{2\cdot 2^2} = 2a^{2^3}$

$|x_{k+4}| \geq 2a^{2^4}$

$|x_{k+n}| \geq 2a^{2^n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$a > 1$

Siis $\lim_{k\to\infty} |x_k| = \lim_{n\to\infty} |x_{k+n}| \geq \lim_{n\to\infty} 2a^{2^n} = \infty$.

Siis jos $|x_0| > 2$, niin menetelmä ei suppene.

$x_k = (-1)^k y_k, \quad \lim_{k\to\infty} y_k = \infty$?

$\frac{\pi}{2}\cdot\frac{x}{|x|} = C\frac{x}{|x|}$

Ol. $x \geq 2$. Nyt $f(x) \geq 1$ ja

$x \geq 2 \quad \| \cdot x > 0$

$x^2 \geq 2x$

$\Rightarrow 1 + x^2 \geq x^2 \geq 2x$

$\Rightarrow 1 + x^2 \geq 2x \xrightarrow{f(x) \geq 1} (1+x^2) f(x) \geq 2x$

$-(1+x^2) f(x) \leq -2x$

$N(x) = x - (1+x^2) f(x) \approx -\frac{x^3}{|x|}$ x suuri

$N(x) = x - (1+x^2) f(x) \leq x - 2x = -x \leq -2$.

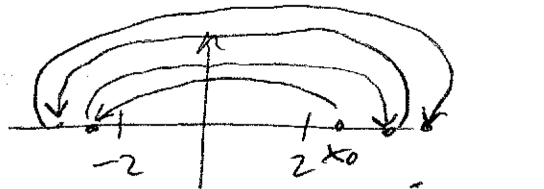
Siis $x \geq 2 \Rightarrow N(x) \leq -2$. ②

Nyt N on pariton eli $N(-x) = -N(x)$.

Ol. $x \leq -2 \Rightarrow -x \geq 2 \overset{②}{\Rightarrow} \underbrace{N(-x)}_{-N(x)} \leq -2 \quad \| \cdot (-1) < 0$ ② ja ③

$\Rightarrow N(x) \geq 2$

Siis $x \leq -2 \Rightarrow N(x) \geq 2$. ③



Epäyhtälöistä ② ja ③ seuraa, että jos $|x_0| \geq 2$, niin jono ~~jakso~~ $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ~~merkit vaihtelevat~~ on alternoiva.

Siis $|x_0| \geq 2 \Rightarrow x_k = (-1) y_k, \quad \lim_{k\to\infty} y_k = \infty$