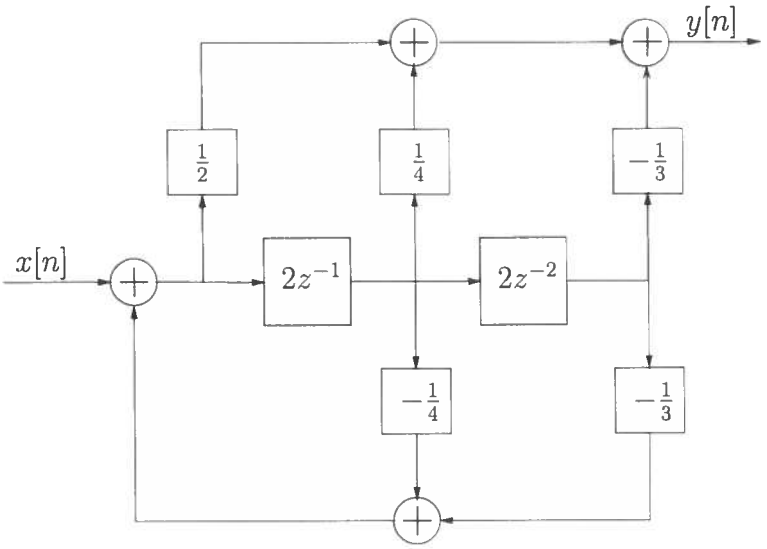
SIGNAALINKÄSITTELY

Markku Kuittinen



Kevätlukukausi 2005
Fysiikan laitos
Joensuun yliopisto

Signaalinkäsittely
17

Sisältö

1 Signaalit ja systeemit **1**
1.1 Signaalin energia ja teho . . . 2
1.2 Riippumattoman muuttujan muunnokset . . . 3
1.3 Jaksolliset signaalit . . . 3
1.4 Parilliset ja parittomat signaalit . . . 4
1.5 Jatkuvat eksponentiaaliset ja sinimuotoiset signaalit . . . 4
1.6 Diskreetit eksponentiaaliset ja sinimuotoiset signaalit . . . 6
1.7 Diskreetin eksponentiaalisen signaalin jaksollisuus . . . 6
1.8 Impulssi- ja askelfunktiot . . . 7
1.9 Jatkuvat ja diskreetit systeemit . . . 8
1.10 Systeemien perusominaisuuksia . . . 8

2 Lineaariset aikariippumattomat systeemit **11**
2.1 Diskreettien signaalien impulssiesitys . . . 11
2.2 Diskreetti impulssivaste ja LTI-systeemin konvoluutioesitys . . . 12
2.3 Jatkuvien signaalien impulssiesitys . . . 13
2.4 LTI-systeemien ominaisuuksia . . . 15
2.5 Kausaalisten LTI-systeemien kuvaaminen differentiaaliyhtälöillä . . . 20
2.6 Lineaariset vakiokertoimiset differenssiyhtälöt . . . 20

3 Fourier-sarjat **21**
3.1 LTI-systeemin vaste kompleksiselle eksponenttifunktiolle . . . 21
3.2 Jatkuvien signaalien Fourier-sarja esitys . . . 23
3.3 Fourier-sarjojen suppenevuus . . . 24
3.4 Jatkuvien Fourier-sarjojen ominaisuuksia . . . 26
3.5 Diskreettien signaalien Fourier-sarjat . . . 29
3.6 Kertoimien a_k ratkaiseminen . . . 29
3.7 Diskreettien Fourier-sarjojen ominaisuuksia . . . 30
3.8 Fourier-sarjat ja LTI-systeemit . . . 32
3.9 Signaalin suodattaminen . . . 33

4 Jatkuva Fourier-muunnos **36**
4.1 Fourier-muunnoksen perustelu . . . 36
4.2 Fourier-muunnoksen suppenevuus . . . 38
4.3 Jaksollisten signaalien Fourier-muunnos . . . 39
4.4 Jatkuvan Fourier-muunnoksen ominaisuuksia . . . 39
4.5 Konvoluutio ja Fourier-muunnos . . . 43
4.6 Tulo-ominaisuus . . . 44
4.7 Vakiokertoiminen differentiaaliyhtälöesitys . . . 44

5 Diskreetin signaalin Fourier-muunnos **45**
5.1 Fourier-muunnoksen perustelu . . . 45
5.2 Diskreetin muunnoksen suppenevuus . . . 46
5.3 Jaksollisten signaalien Fourier-muunnos . . . 47
5.4 Diskreetin signaalin Fourier-muunnoksen ominaisuuksia . . . 48

6 Signaalien aika- ja taajuustason ominaisuuksista **55**
6.1 Fourier-muunnoksen moduli-vaihe -esitys . . . 55
6.2 LTI-systeemien moduli-vaihe -esitys . . . 56
6.3 Ideaalisen taajuussuotimen aikatason ominaisuudet . . . 58
6.4 Suodattimien ominaisuuksia . . . 59

6.5 Ensimmäisen ja toisen asteen jatkuvat systeemit 59
6.6 Ensimmäisen ja toisen asteen diskreetit systeemit 62

7 Näytteenotto **63**
7.1 Näytteenottoteoreema 63
7.2 Signaalin rekonstruointi interpoloinnin avulla 66
7.3 Aliasing-ilmiö 67
7.4 Jatkuvien signaalien diskreetti käsittely 67
7.5 Diskreettien signaalien näytteenotto 70

8 Kommunikaatiosysteemit **73**
8.1 Eksponentiaalinen ja sinimuotoinen amplitudimodulaatio 73
8.2 Sinimuotoisen AM-signaalin demodulaatio 74
8.3 Taajuusmultipleksointi 76
8.4 Yksipuoleinen sinimuotoinen amplitudimodulaatio 76
8.5 Amplitudimodulaatio pulssijonolla 76
8.6 Pulssien amplitudimodulaatio 77
8.7 Sinimuotoinen taajuusmodulaatio 78
8.8 Diskreettien signaalien modulaatio 82

9 z-muunnos **83**
9.1 Määritelmä z-muunnokselle 83
9.2 z-muunnoksen suppeneminen 84
9.3 Käänteinen z-muunnos 85
9.4 z-muunnoksen ominaisuuksia 88
9.5 z-muunnoksen soveltaminen signaalinkäsittelyssä 88

10 Digitaalisuotimien suunnittelun yleiset periaatteet **92**
10.1 Digitaalisten suotimien olemus 92
10.2 Digitaaliset suodintyypit: FIR ja IIR 93
10.3 Valinta FIR- ja IIR-suotimen välillä 94
10.4 Suotimen suunnittelun vaiheet 95

11 FIR-suotimien suunnittelu **97**
11.1 Lineaarinen vaihevaste 97
11.2 FIR-suotimen suunnittelun vaiheet 98

12 IIR-suotimien suunnittelu **105**
12.1 IIR-suotimen suunnittelun vaiheet 106
12.2 Analogiasuotimien muuntaminen digitaalisiksi 107
12.3 IIR-suotimien esitysmuodot 110
12.4 Äärellisen sanapituuden vaikutusten analysointi 110

1 Signaalit ja systeemit

Signaalit kuvaavat jotain muutosta jonkun (yleensä ajan) suhteen. Signaalin informaatio sisältyy tapahtuman muutoksiin. Erityyppisiä signaaleja ovat esim.

- puhe (puhelin, radio ja TV)
- lääketieteelliset signaalit kuten EEG ja EKG
- videosignaali (DV, kuvat)
- audiosignaali (CD, digitaalinen ääni)
- tutkasignaalit

  ⋮

Signaaleja kuvataan matemaattisesti yhden tai useamman muuttujan funktioilla.

Signaalit voidaan jakaa kahteen eri luokkaan: analogisiin ja digitaalisiin signaaleihin. Digitaaliset signaalit ovat yleensä jostakin luonteeltaan analogisesta signaalista säännöllisin välein otettuja näytejonoja.

Nykyisin digitaalinen signaalin käsittely on tärkeämpää kuin analogisten signaalien käsittely – sen eduiksi voidaan laskea

- signaalin tarkkuus riippuu vain käytettyjen bittien määrästä
- toistettavuus, komponenttinen toleranssit eivät vaikuta signaaliin
- ei ryömintää
- puolijohdetekniikalla toteutettavissa olevat signaalinkäsittelyn komponentit (DSP)
- joustavuus
- toiminnallisuus

Digitaalisen signaalinkäsittelyn heikkouksia ovat joissakin tapauksissa nopeus ja kalleus, erityisesti laajakaistaisia signaaleja käsiteltäessä, samoin digitaalisten systeemien suunnittelu on aikaavievää. (Äärellisen sananpituuden ongelma.)

1.1 Signaalin energia ja teho

Tavallisesti signaalit liittyvät fysikaalisiin suureisiin, joilla on energiaa ja tehoa.

Äärellisen mittaisille jatkuville signaaleille $x(t)$ energia määritellään integraalina

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 dt \tag{1.1}$$

ja teho on puolestaan $P = E/(t_2 - t_1)$. Diskreeteille signaaleille energia on

$$E = \sum_{n=n_1}^{n=n_2} |x[n]|^2 \tag{1.2}$$

ja teho $P = E/(n_2 - n_1 + 1)$. Monissa systeemeissä ollaan kiinnostuneita systeemin energiasta ja tehosta äärettömällä aikavälillä, tällöin ne määritellään raja-arvoina

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt, \tag{1.3}$$

ja diskreetille signaalille

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 \ . \tag{1.4}$$

Vastaavat määritelmät teholle ovat

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 dt \tag{1.5}$$

ja

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} |x[n]|^2 \ . \tag{1.6}$$

Näiden määritelmien avulla signaalit voidaan jakaa kahteen luokkaan: signaaleihin, joille $E_\infty < \infty$ ($P_\infty = 0$) ja signaaleihin, joilla P_∞ on äärellinen ($E_\infty = \infty$).

1.2 Riippumattoman muuttujan muunnokset

Keskeinen tekijä signaalien ja systeemien analyysissä on signaalien muunnokset.

Esim. lentokoneen hallintalaitteet: pilotti $\rightarrow$ moottori, laipat, jne. $\rightarrow$ muutokset koneen lentoradassa.

Esim. audiolaitteet: nauhoituksessa parannetaan äänen laatua suodattamalla kohinaa, korostamalla tiettyjä taajuukisia jne.

Tärkeä luokka signaalimuunnoksia on signaalin muunnokset ajan suhteen:

- siirros ajan suhteen: jonot $x[n]$ ja $x[n-n_0]$ (jatkuvilla signaaleilla $x(t-t_0)$)
- ajan suhteen käänteinen signaali $x[-n]$ ($x(-t)$)
- skaalaus ajan suhteen $x(\alpha t)$

Yhdistämällä edelliset saadaan yleinen muunnos $x(\alpha t + \beta)$, joka säilyttää signaalin muodon, mutta venyttää sitä jos $\alpha < 1$, pakkaa signaalia jos $\alpha > 1$ ja siirtää sitä ajassa jos $\beta \neq 0$.

1.3 Jaksolliset signaalit

Signaali on jaksollinen, jos

$$x(t) = x(t+T) \ , \tag{1.7}$$

eli signaali saa saman arvon aina T:n välein. T:tä sanotaan signaalin jaksoksi ja pienintä T_0:n arvoa, jolla (1.7) toteutuu sanotaan signaalin *perusjaksoksi.*

Diskreetti signaali on jaksollinen jaksolla N, jos

$$x[n] = x[n+N] \tag{1.8}$$

kaikille n (perusjakso N_0).

1.4 Parilliset ja parittomat signaalit

Signaalia sanotaan *parilliseksi*, jos se käännettynä ajan suhteen säilyy samana, eli jos jatkuva signaali toteuttaa ehdon

$$x(-t) = x(t) \tag{1.9}$$

ja diskreetti signaali toteuttaa ehdon

$$x[-n] = x[n] \ . \tag{1.10}$$

Signaalia kutsutaan *parittomaksi* jos

$$x(-t) = -x(t) \tag{1.11}$$

ja

$$x[-n] = -x[n] \ . \tag{1.12}$$

1.5 Jatkuvat eksponentiaaliset ja sinimuotoiset signaalit

Yleinen muoto kompleksiselle eksponentiaaliselle signaalille on

$$x(t) = C\mathrm{e}^{at} \ , \tag{1.13}$$

missä C ja a ovat kompleksilukuja. Jos C ja a ovat reaalisia, saadaan vaimeneva signaali kun $a < 0$ ja kasvava signaali kun $a > 0$ ($x(t)$ on vakio kun $a = 0$).

Jos a on puhtaasti imaginäärinen, saadaan muotoa

$$x(t) = \mathrm{e}^{j\omega_0 t} \tag{1.14}$$

oleva signaali, joka on jaksollinen jaksolla

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} \ . \tag{1.15}$$

Perusjaksoa T_0 vastaavaa taajuutta ω_0 kutsutaan signaalin *perustaajuudeksi*.

Eksponentiaaliseen kompleksiseen signaaliin liittyy läheisesti sinimuotoinen signaali (Eulerin kaava!)

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \ , \tag{1.16}$$

jossa merkitään usein $\omega_0 t = 2\pi f_0 t$, missä f_0 on signaalin taajuus (värähdyksiä aikayksikössä, [Hz]).

Kompleksiset eksponentiaaliset ja sinimuotoiset signaalit ovat esimerkkejä signaaleista, joiden energia on ääretön, mutta joilla on äärellinen keskimääräinen teho.

Harmoniseksi signaalijoukoksi kutsutaan signaalijoukkoa, jonka signaalit ovat kaikki jaksollisia jollakin perusjaksolla T_0. Jos k:tta harmonista signaalia merkitään

$$\phi_k(t) = \mathrm{e}^{jk\omega_0 t} \qquad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{1.17}$$

niin k:n arvolla 0 $\phi_k(t)$ on vakio ja muilla k:n arvoilla jaksollinen taajuudella $k\omega_0$ ja jaksolla

$$\frac{2\pi}{|k|\omega_0} = \frac{T_0}{|k|} \ . \tag{1.18}$$

Yhdistämällä edellä esitetyt signaalityypit saadaan joko eksponentiaalisesti vaimenevien tai kasvavien sinimuotoisten signaalien joukko. Esittämällä kompleksinen signaalin $x(t) = C\mathrm{e}^{at}$ vakio C muodossa $C = |C|\mathrm{e}^{j\theta}$ ja vakio a muodossa $a = r + j\omega_0$ saadaan signaali $x(t)$ muotoon

$$x(t) = |C|\mathrm{e}^{rt}\mathrm{e}^{j(\omega_0 t + \theta)} \tag{1.19}$$

ja tästä edelleen Eulerin kaavan avulla muotoon

$$x(t) = |C|\mathrm{e}^{rt}\cos(\omega_0 t + \theta) + j|C|\mathrm{e}^{rt}\sin(\omega_0 t + \theta) \ . \tag{1.20}$$

Jos $r < 0$ niin kyseessä on eksponentiaalisesti vaimeneva signaali ja jos $r > 0$ niin signaali kasvaa eksponentiaalisesti.

1.6 Diskreetit eksponentiaaliset ja sinimuotoiset signaalit

Diskreetti kompleksinen eksponentiaalinen signaali

$$x[n] = C\alpha^n = Ce^{\beta n} \ . \tag{1.21}$$

Jos C ja α ovat reaalisia, saadaan eksponentiaalisesti vaimenevat tai kasvavat signaalit.

Olettamalla β puhtaasti imaginääriseksi ($|\alpha| = 1$) saadaan diskreetti eksponentiaalinen signaali

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \tag{1.22}$$

ja tähän liittyvä sinimuotoinen signaali

$$x[n] = A\cos(\omega_0 n + \phi) \ . \tag{1.23}$$

Edellä esitetyt signaalit ovat esimerkkejä diskreeteistä signaaleista, joiden energia on ääretön, mutta joiden keskimääräinen teho on äärellinen.

Yleinen muoto kompleksiselle diskreetille signaalille on

$$x[n] = C\alpha^n = |C||\alpha|^n \cos(\omega_0 n+\theta)+j|C||\alpha|^n \sin(\omega_0 n+\phi) \ . \tag{1.24}$$

1.7 Diskreetin eksponentiaalisen signaalin jaksollisuus

Jatkuva signaali $e^{j\omega_0 t}$ on jaksollinen mille tahansa ω_0:n arvolle.

Diskreetillä signaalilla taajuudella $\omega_0 + 2\pi$:

$$e^{j(\omega_0+2\pi)n} = e^{j\omega_0 n}e^{j2\pi n} = e^{j\omega_0 n} \ , \tag{1.25}$$

eli signaali on taajuudella $\omega_0 + 2\pi$ *sama* kuin taajudella ω_0 (tämä pätee kaikille 2π:n monikerroille, eli taajuuksille $\omega_0 \pm k2\pi$).

Diskreeteille signaaleille taajuus ω_0 voidaan aina valita 2π:n mittaiselta väliltä (yleensä väliltä $0 \leq \omega_0 < 2\pi$ tai väliltä $-\pi \leq \omega_0 < \pi$).

Diskreetin signaalin taajuus kasvaa arvoon $\omega_0 = \pi$ ja laskee 2π:hin mennessä takaisin nollaan.

Huom. taajuudella $\omega_0 = \pi$: $x[n] = (e^{j\pi})^n = (-1)^n$.

Diskreetin signaalin jaksollisuudelle saadaan ehto

$$\frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N} \ , \tag{1.26}$$

missä m on joku kokonaisluku.

1.8 Impulssi- ja askelfunktiot

Impulssi- ja askelfunktioilla on tärkeä rooli systeemien analyysissä ja muiden signaalien kuvaamisessa.

Diskreetti impulssifunktio määritellään seuraavasti

$$\delta[n] = \begin{cases} 0\,, & n \neq 0 \\ 1\,, & n = 0 \end{cases} \quad . \tag{1.27}$$

Askelfunktio määritellään puolestaan jonona

$$u[n] = \begin{cases} 0\,, & n < 0 \\ 1\,, & n \geq 0 \end{cases} \quad . \tag{1.28}$$

Määritelmien perusteella signaalit voidaan esittää toistensa avulla: impulssifunktio on askelfunktion ensimmäinen differenssi

$$\delta[n] = u[n] - u[n-1] \tag{1.29}$$

ja askelfunktio on impulssifunktion kumulatiivinen summa

$$u[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} \delta[m] \; . \tag{1.30}$$

Impulssifunktiota käytetään näytteenottoon jonosta $x[n]$:

$$x[n]\delta[n-n_0] = x[n_0]\delta[n-n_0] = x[n_0] \; . \tag{1.31}$$

Jatkuva askelfunktio määritellään seuraavasti

$$u(t) = \begin{cases} 0\,, & t < 0 \\ 1\,, & t > 0 \end{cases} \quad . \tag{1.32}$$

Huom. $u(t)$ on epäjatkuva pisteessä $t = 0$.

Impulssifunktion avulla lausuttuna

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\, d\tau \; . \tag{1.33}$$

Jatkuva impulssifunktio voidaan määritellä nyt askelfunktion derivaatan avulla

$$\delta(t) = \frac{d\,u(t)}{dt} \; . \tag{1.34}$$

Impulssifunktiota voidaan jatkuvillakin signaaleilla käyttää näytteenottoon

$$x(t)\delta(t-t_0) = x(t_0)\delta(t-t_0) = x(t_0) \; . \tag{1.35}$$

1.9 Jatkuvat ja diskreetit systeemit

Fysikaaliset systeemit koostuvat komponentteista ja näiden välisistä kytkennöistä. Signaalinkäsittelyssä systeemillä tarkoitetaan sitä tapahtumaa tai tapahtumien joukkoa, jolla sisäänmenosignaalista saadaan ulostulosignaali.

Jatkuvaa systeemiä kuvaa

$$x(t) \rightarrow \boxed{\text{jatkuva systeemi}} \rightarrow y(t) \tag{1.36}$$

ja diskreettiä systeemiä

$$x[n] \rightarrow \boxed{\text{diskreetti systeemi}} \rightarrow y[n] \ . \tag{1.37}$$

Esim. autoon kohdistuvan voiman muuttuminen auton nopeudeksi on jatkuva systeemi ja pankkitilille maksettava kuukausittainen korko on diskreetti systeemi.

Usein todelliset systeemit voidaan jakaa osiin joita voidaan kytkeä joko *sarjaan* tai *rinnakain*. Lisäksi systeemeissä on usein mukana *takaisinkytkentä*, jonka avulla systeemin ulostulo voi vaikuttaa systeemin sisäänmenoon.

1.10 Systeemien perusominaisuuksia

Systeemien perusominaisuuksilla on fysikaaliset vastineensa ja niitä on helppo kuvata aiemmin tässä luvussa esitettyjen käsitteiden avulla.

1.10.1 Muistilliset ja muistittomat systeemit

Systeemi on *muistiton*, jos sen ulostulon arvot riippuvat vain senhetkisistä sisäänmenonarvoista.

Esim. systeemi $y[n] = (2x[n] - x^2[n])^2$ on muistiton, samoin vastus, joka muuntaa sisäänmenovirran ulostulojännitteeksi ($y(t) = Rx(t)$).

Yksinkertaisin muistiton systeemi on *identiteetti*: $y(t) = x(t)$ ja $y[n] = x[n]$.

Muistillisia diskreettejä systeemejä ovat summain

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \ , \tag{1.38}$$

ja viive

$$y[n] = x[n-1] \ . \tag{1.39}$$

1.10.2 Käänteisyys

Systeemin sanotaan olevan *käänteinen* jos on olemassa käänteissysteemi, joka kytkettynä sarjaan alkuperäisen systeemin kanssa tuottaa alkuperäisen sisäänmenosignaalin.

Esim. jatkuva systeemi $y(t) = 2x(t)$ on käänteinen ja sen käänteissysteemi on $w(t) = y(t)/2$.

Summaimen käänteissysteemi on kahden peräkkäisen ulostuloarvon erotus, eli $w[n] = y[n] - y[n-1]$.

Esimerkkejä käänteettömistä systeemeistä ovat $y[n] = 0$, eli systeemi, joka tuottaa ulostuloon nollan millä tahansa sisäänmenojonolla ja systeemi $y(t) = x^2(t)$, jonka sisäänmenon arvoja ei voida päätellä ulostulon arvoista.

1.10.3 Kausaalisuus

Systeemin sanotaan olevan *kausaalinen*, jos sen ulostulon arvot riippuvat vain senhetkisestä ja sitä aikaisempien ajanhetkien sisäänmenojen arvoista.

Jos kaksi kausaalisen systeemin sisäänmenoa ovat identtiset johonkin tiettyyn ajanhetkeen, t_0 tai n_0, asti, niin vastaavat ulostulot ovat myös identtiset tähän samaan ajanhetkeen asti.

Kaikki muistittomat systeemit ovat kausaalisia.

Esim. systeemit $y(t) = x(t+1)$ ja $y[n] = x[n] - x[n+1]$ eivät ole kausaalisia.

Systeemeissä, joissa riippumaton muuttuja ei ole aika (esim. kuvankäsittely), kausaalisuutta ei edellytetä. Samoin systeemien, jotka käsittelevät nauhoitettua dataa, ei tarvitse olla kausaalisia.

Esim. keskiarvoistus tehdään usein ei-kausaalisesti:

$$y[n] = \frac{1}{2M+1} \sum_{k=-M}^{M} x[n-k] \ . \qquad (1.40)$$

1.10.4 Stabiilisuus

Systeemin, jonka ulostulo ei hajaannu, sanotaan olevan *stabiili.*

Esim. heiluri edustaa stabiilia systeemiä: alkusysäyksen jälkeen heilahtelu vaimenee. Jos heiluri käännetään ylösalaisin saadaan epästabiili systeemi, jossa pienikin tönäisy aiheuttaa suuren muutoksen.

Usein kasvua kuvaavat systeemit, joilla ei ole rajoitteita, ovat epästabiileja – pienikin alku aiheuttaa loputtoman kasvun.

Fysikaalisissa systeemeissä energian varastoituminen toiseen muotoon tekee systeemeistä usein stabiileja.

Jos stabiilin systeemin sisäänmeno on rajoitettu, niin myös sen ulostulo pysyy rajoittuneena.

Esim. auto kiihtyy vakiovoimalla niin kauan kunnes ilmanvastus rajoittaa auton nopeuden johonkin vakioarvoon.

Summain ei ole stabiili systeemi, esim. askelfunktion tapauksessa summain tuottaa ulostulon $y[n] = (n+1)u[n]$, eli y[n] kasvaa rajatta.

1.10.5 Aikariippumattomuus

Systeemin sanotaan olevan *aikariippumaton*, jos systeemin toiminta ja määrittely ovat ajasta riippumattomia.

Esim. RC-piirin voidaan olettaa antavan saman vasteen tänään ja huomenna, eli se on ajasta riippumaton, samoin auton kiihtyvyys.

Systeemi on ajasta riippumaton, jos sisäänmenon siirtäminen ajan suhteen määrällä t_0 tai n_0 aiheuttaa vastaavan siirroksen systeemin ulostulossa.

1.10.6 Lineaarisuus

Olkoot $y_1(t)$ ja $y_2(t)$ vasteet signaaleille $x_1(t)$ ja $x_2(t)$. Systeemi on lineaarinen, jos

1. vaste syötteeseen $x_1(t) + x_2(t)$ on $y_1(t) + y_2(t)$
2. vaste syötteeseen $ax_1(t)$ on $ay_1(t)$, missä a on mikä tahansa kompleksinen vakio.

Sama määrittely pätee myös diskreeteille systeemeille.

Lineaarisuus voidaan yleistää mille tahansa määrälle signaaleja, eli jos sisäänmeno on superpostio joukosta sisäänmenosignaaleja

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] = a_1 x_1[n] + a_2 x_2[n] + a_3 x_3[n] + \dots \tag{1.41}$$

niin ulostulo on tällöin superpostio yksittäisten signaalien vasteista

$$y[n] = \sum_k a_k y_k[n] = a_1 y_1[n] + a_2 y_2[n] + a_3 y_3[n] + \dots \,. \tag{1.42}$$

Jos lineaarisen systeemin sisäänmeno on nollasignaali, niin myös sen ulostulo pysyy nollassa.

2 Lineaariset aikariippumattomat systeemit

Monia fysikaalisia tapahtumia voidaan mallintaa lineaarisilla aikariippumattomilla (LTI) systeemeillä. LTI-systeemejä voidaan analysoida yksityiskohtaisesti ja niiden avulla voidaan perustella signaalianalyysin keskeisimmät työkalut.

Lähes mikä tahansa signaali voidaan esittää impulssifunktioiden superpositioina, joten LTI-systeemin toiminta voidaan mallintaa sen impulssifunktiovasteen avulla.

Tällainen systeemin malli vastaa *konvoluution* laskemista.

2.1 Diskreettien signaalien impulssiesitys

Diskreetti signaali voidaan ajatella jonona yksittäisiä pulsseja.

Esim. $x[-1]\delta[n+1] = x[-1]$ kun $n = -1$ ja nolla muulloin. Vastaavasti $x[1]\delta[n-1] = x[1]$ kun $n = 1$ ja nolla muulloin.

Signaali $x[n]$ voidaan siis esittää summana

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \ . \tag{2.1}$$

Esitys tarkoittaa impulssien summaa painokertoimilla $x[k]$, joten esim. askelfunktio

$$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k] \ .$$

Yhtälö (2.1) kuvaa diskreetin impulssin siirto-ominaisuutta: koska $\delta[n-k] = 1$ vain kun $n = k$, niin yhtälön (2.1) oikea puoli poimii jonosta $x[n]$ alkion kerrallaan.

2.2 Diskreetti impulssivaste ja LTI-systeemin konvoluutioesitys

Yhtälö (2.1) esittää impulssifunktioiden superpositiota painokertoimilla $x[n]$. Lineaarisen systeemin vaste tällaiseen jonoon on superpositio näiden siirrettyjen impulssien vasteista.

Lisäksi aikariippumattomuus tässä yhteydessä tarkoittaa sitä, että siirtyneiden impulssien vasteet ovat siirtyneet saman verran.

Olkoon $h_k[n]$ lineaarisen systeemin vaste siirrettyyn impulssiin $\delta[n-k]$. Tällöin lineaarisen systeemin vaste sisäänmenoon $x[n]$ on

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \ . \tag{2.2}$$

Yhtälön (2.2) mukaan, tuntemalla lineaarisen systeemin vaste siirrettyjen impulssien joukolle, voidaan systeemin vaste ratkaista mille tahansa sisäänmenolle.

Vasteiden $h_k[n]$ ei yleisessä tapauksessa tarvitse riippua toisistaan millään tavalla. Kuitenkin, jos systeemi on *aikariippumaton* niin tällöin ajassa siirrettyjen impulssien vasteet ovat keskenään samoja (siirtyneitä ajan suhteen), eli

$$h_k[n] = h_0[n-k] \ . \tag{2.3}$$

Merkitsemällä $h[n] = h_0[n]$ ($h[n]$ on systeemin vaste signaalille $\delta[n]$), saadaan yhtälö (2.2) LTI-systeemille muotoon

$$\underline{y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \ .} \tag{2.4}$$

Tämä tulos tunnetaan *konvoluutiosumman* nimellä ja sitä merkitään usein

$$y[n] = x[n] * h[n] \ . \tag{2.5}$$

2.3 Jatkuvien signaalien impulssiesitys

Mikä tahansa jatkuva signaali voidaan esittää impulssien avulla: annetaan impulsseille ensin joku äärellinen kesto ja puristetaan sitten ne hyvin hyvin lyhytkestoisiksi ideaalisiksi impulsseiksi.

Jatkuva signaalia $x(t)$ voidaan approksimoida porrasfunktiolla $\hat{x}(x)$. Määrittelemällä impulssifunktio

$$\delta_\Delta(t) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \ , & 0 \leq t < \Delta \\ 0 \ , & \text{muulloin} \end{cases} \ , \tag{2.6}$$

niin tällöin, koska $\Delta\delta_\Delta(t)$:n amplitudi on yksi,

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \ . \tag{2.7}$$

Kun $\Delta \to 0$, niin $\hat{x}(t)$ tulee yhä paremmaksi approksimaatioksi $x(t)$:lle, eli

$$x(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \ . \tag{2.8}$$

Kun $\Delta \to 0$, niin summa lausekkeessa (2.8) muuttuu integraaliksi ja $x(t)$:lle saadaan esitys

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau \ . \tag{2.9}$$

Kaavaa (2.9) kutsutaan jatkuvan impulssifunktion *siirto-ominaisuudeksi.*

Esim. jatkuvan askelfunktio on impulssifunktion avulla esitettynä muotoa

$$u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{0}^{\infty} \delta(t-\tau)\,d\tau \ . \tag{2.10}$$

Integraalin (2.9) voidaan ajatella edustavan ääretöntä painotettujen impulssien 'summaa', missä impulssin $\delta(t-\tau)$ painokerroin on $x(\tau)\,d\tau$.

Kaavan (2.8) mukainen signaalin $\hat{x}(t)$ esitys on pulssien $\delta_\Delta(t)$ superpositio. Vastaavasti lineaarisen systeemin ulostulon $\hat{y}(t)$ voidaan ajatella olevan systeemin yksittäisten vasteiden summa.

Merkitään LTI-systeemin vastetta pulssiin $\delta_\Delta(t-k\Delta)$ $\hat{h}_{k\Delta}(t)$:llä. Tällöin superpositioperiaatteen ja yhtälön (2.8) perusteella saadaan jatkuvalle lineaariselle systeemille esitys

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta \ . \tag{2.11}$$

Kun $\Delta \to 0$, niin $\hat{x}(t)$:stä tulee yhä parempi $x(t)$:n approksimaatio. Merkitsemällä $h_\tau(t)$:llä systeemin vastetta ajanhetkellä t impulssiin $\delta(t-\tau)$ saadaan

$$y(t) = \lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\hat{h}_{k\Delta}(t)\Delta = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_\tau(t)\,d\tau \ . \tag{2.12}$$

Yhtälö (2.12) on siirrettyjen inpulssien $\delta(t-\tau)$ vasteiden $h_\tau(t)$ painotettu 'summa' painokertoimilla $x(\tau)\,d\tau$.

Lineaarisessa aikariippumattomassa systeemissä vasteet ovat samat kaikille ajassa siirretyille impulsseille, eli $h_\tau(t) = h_0(t-\tau)$.

Merkitsemällä impulssivastetta $h_0(t)$ $h(t)$:llä saadaan yhtälö (2.12) muotoon

$$\underline{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\ .} \tag{2.13}$$

Yhtlö (2.13) tunnetaan *konvoluutiointegraalina* – kahden funktion konvoluutiota merkitään usein $*$:llä:

$$y(t) = x(t) * h(t)\ . \tag{2.14}$$

LTI-systeemi pystytään siis kuvaamaan täysin kun sen vaste yksinkertaiselle impulssifunktiolle tunnetaan!!

2.4 LTI-systeemien ominaisuuksia

Yhtälöiden (2.4) ja (2.13) esitysten mukaisilla systeemeillä on joukko tärkeitä ominaisuuksia.

2.4.1 Kommutatiivisyys

Konvoluutio on kommutatiivinen operaatio, eli diskreeteille systeemeille pätee

$$x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]\ , \tag{2.15}$$

ja jatkuville systeemeille

$$x(t) * h(t) = h(t) * x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)\,d\tau\ . \tag{2.16}$$

Ominaisuudet on helppo todistaa muuttujanvaidon avulla.

2.4.2 Distributiivisyys

Konvoluutio on summauksen suhteen distributiivinen, eli diskreeteille systeemeille

$$x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n] \ , \quad (2.17)$$

ja jatkuville systeemeille

$$x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \ . \quad (2.18)$$

Distributiivisyys tarkoittaa sitä, että kaksi rinnakkaista LTI-systeemiä voidaan korvata yhdellä systeemillä, jonka impulssivaste on näiden kahden erillisen systeemin impulssivasteiden summa.

2.4.3 Assosiatiivisyys

Diskreeteille systeemeille

$$x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n] \ , \quad (2.19)$$

ja jatkuville systeemeille

$$x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] = [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \ . \quad (2.20)$$

Tulokset tarkoittavat sitä, että konvoluutioiden laskujärjestyksellä ei ole väliä. Kaksi peräkkäistä LTI-systeemiä voidaan korvata yhdellä systeemillä, jonka inpulssivaste on näiden yksittäisten systeemien impulssivasteiden konvoluutio.

2.4.4 Muistilliset ja muistittomat LTI-systeemit

Yhtälön (2.4) perusteella LTI-systeemi voi olla muistiton vain jos $h[n] = 0$ kaikille $n \neq 0$. Tässä tapauksessa impulssivaste on muotoa $h[n] = K\delta[n]$, missä $K = h[0]$ on vakio ja konvoluutiosumma tulee muoton

$$y[n] = Kx[n] \ . \quad (2.21)$$

Vastaavasti jatkuva systeemi on muistiton vain jos $h(t) = 0$ kaikille $t \neq 0$. Sellaisen LTI-systeemin impulssivaste $h(t) = K\delta(t)$ ja systeemi on muotoa

$$y(t) = Kx(t) \ . \tag{2.22}$$

2.4.5 LTI-systeemien käänteisyys

LTI-systeemi on käänteinen vain jos on olemassa systeemi, joka kytkettynä sarjaan alkuperäisen systeemin kanssa tuottaa alkuperäisen signaalin. Tämä tarkoittaa sitä, että systeemin ja sen käänteisen systeemin impulssivasteiden konvoluution on oltava impulssifunktio:

$$h(t) * h_1(t) = \delta(t) \ , \tag{2.23}$$

missä $h_1(t)$ on käänteisen systeemin impulssivaste. Vastaava ehto diskreeteille systeemeille on

$$h[n] * h_1[n] = \delta[n] \ . \tag{2.24}$$

2.4.6 LTI-systeemien kausaalisuus

Jotta diskreetti LTI-systeemi olisi kausaalinen, sen ulostulot $y[n]$ eivät saa riippua sisäänmenoista $x[k]$ arvoilla $k > n$. Yhtälön (2.4) perusteella $x[k]$:n kertoimien $h[n-k]$ arvoilla $k > n$ täytyy olla nollia. Tästä saadaan LTI-systeemeille *kausaalisuusehto*

$$h[n] = 0 \quad \text{kaikille } n < 0 \ . \tag{2.25}$$

Ehto tarkoittaa sitä, että systeemin ulostulo pysyy nollassa jos systeemiin ei mene mitään sisään.

Kausaalisten lineaaristen systeemien konvoluutiosumma on muotoa

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]h[n-k] \ . \tag{2.26}$$

Vastaava päättely voidaan tehdä jatkuville systeemeille, jolloin saadaan kausaalisuusehto

$$h(t) = 0 \quad \text{kaikille } t < 0 \tag{2.27}$$

ja konvoluutiointegraali muotoon

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\ . \tag{2.28}$$

Signaalin sanotaan olevan kausaalinen, jos se on nolla kun $n < 0$ (tai $t < 0$). Tällä tulkinnalla LTI-systeemi on kausaalinen jos sen impulssivaste on kausaalinen signaali.

2.4.7 LTI-systeemien stabiilisuus

Olkoon LTI-systeemin sisäänmeno $x[n]$ rajoitettu: $|x[n]| < B$ kaikille n. Tällöin konvoluutiosumman avulla saadaan ulostulon suuruudelle lauseke

$$|y[n]| = \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right|\ . \tag{2.29}$$

Koska summan itseisarvo ei ole suurempi kuin sen termien itseisarvojen summa, voidaan lauseketta (2.29) arvioida ylöspäin

$$|y[n]| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]||x[n-k]|\ . \tag{2.30}$$

Koska $x[n]$ oletettiin rajoitetuksi, niin

$$|y[n]| \leq B \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \quad \text{kaikille } n. \tag{2.31}$$

Yhtälön (2.31) perusteella LTI-systeemi on stabiili jos summa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty\ . \tag{2.32}$$

Saatu ehto on välttämätön ja riittävä ehto diskreetin LTI-systeemin stabiilisuudelle.

Jatkuville systeemeille voidaan tehdä samanlainen päättely olettamalla systeemin sisäänmeno rajoitetuksi: $|x(t)| < B$. Tällöin saadaan stabiilisuusehdoksi

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|\,d\tau < \infty\ . \tag{2.33}$$

2.4.8 LTI-systeemien vaste askelfunktiolle

Systeemien kuvaamiseen käytettään usein myös niiden askelfunktiovastetta $s[n]$ (tai $s(t)$). Systeemin askelfunktiovaste on askelfunktion ja impulssifunktion konvoluutio:

$$s[n] = u[n] * h[n] \ . \tag{2.34}$$

Konvoluution kommutatiivisyyden nojalla askelfunktiovaste voidaan tulkita diskreetin LTI-systeemin, jonka impulssivaste on $u[n]$, vasteena syötteeseen $h[n]$. Aiemman perusteella $u[n]$ on summaimen impulssivaste, joten

$$s[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \ , \tag{2.35}$$

eli systeemin askelfunktiovaste on kumulatiivinen summa sen impulssifunktiovasteista.

Impulssivaste $h[n]$ voidaan puolestaan lausua askelfunktiovasteen avulla seuraavasti

$$h[n] = s[n] - s[n-1] \ . \tag{2.36}$$

Vastaavasti jatkuvien LTI-systeemien askelfunktiovaste $s(t) = u(t) * h(t)$, eli

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \ . \tag{2.37}$$

Impulssivaste on puolestaan askelfunktiovasteen derivaatta:

$$h(t) = \frac{d\, s(t)}{dt} = s'(t) \ . \tag{2.38}$$

Edellä esitetyn perusteella askelfunktiovastetta voidaan myös käyttää LTI-systeemien kuvaamiseen, koska systeemin impulssivaste voidaan aina ratkaista systeemin askelfunktivasteesta.

2.5 Kausaalisten LTI-systeemien kuvaaminen differentiaaliyhtälöillä

Systeemit, joissa sisäänmeno kytkeytyy ulostuloon lineaarisella vakiokertoimisella differentiaaliyhtälöllä, ovat erittäin merkittävä osa LTI-systeemejä. (Esim. RC-piiri, kiihdyttävä auto, jne.)

Ensimmäisen asteen DY

$$\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t) \tag{2.39}$$

kuvaa sisäänmenon ja ulostulon välistä suhdetta. Jotta jonkin tietyn sisäänmenosignaalin vaste voitaisiin laskea, on ensin ratkaistava DY. Tämän ratkaiseminen tehdään yleensä kahdessa vaiheessa: haetaan ensin yleinen ratkaisu homogeeniselle yhtälölle (ns. nollavaste) ja haetaan sitten jokin erityisratkaisu syötteelle $x(t)$. Kokonaisratkaisu on näiden kahden erillisen ratkaisun summa. Ratkaisuihin tulevat tuntemattomat kertoimet voidaan määrätä alkuarvojen avulla.

2.6 Lineaariset vakiokertoimiset differenssiyhtälöt

Diskreeteillä systeemeillä differenssiyhtälöt vastaavat jatkuvien systeemien differentiaaliyhtälöitä. Vakiokertoiminen N:nnen asteen differenssiyhtälö on muotoa

$$\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \ . \tag{2.40}$$

Tällaiset differenssiyhtälöt voidaan ratkaista samaan tapaan kuin DY:t. Toinen tapa on kirjoittaa yhtälö (2.40) muotoon

$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{\sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k]\right\} \ , \tag{2.41}$$

jolloin saadaan rekursiivinen yhtälö, jonka avulla $y[n]$ voidaan ratkaista $x[n]$:n ja ulostulojen $y[-N], \ldots, y[-1]$ avulla.

Jos yhtälössä (2.41) $N = 0$,niin yhtälö ei ole rekursiivinen ja systeemin impulssivaste on äärellisen mittainen (M): *FIR-systeemi.* Jos $N \geq 1$, niin (2.41) on rekursiivinen ja sen impulssivaste on ääretön: *IIR-systeemi.*

3 Fourier-sarjat

Luvussa 2 esitettiin signaalit lineaarikompinaatioina siirretyistä impulsseista. Tässä luvussa esitetään toinen tapa kuvata signaaleja: valitaan joku kantasignaalien joukko ja esitetään signaalit näiden kantasignaalien summana. Käytettäessä kantasignaaleina kompleksisten eksponenttifunktioiden joukkoa saadaan Fourier-sarjaesitykset sekä jatkuville että diskreeteille signaaleille.

LTI-systeemien vaste kompleksisille eksponenttifunktioille on yksinkertaista muotoa, joten myös näiden avulla LTI-systeemien mallintaminen ja analysointi onnistuu suhteellisen helposti.

3.1 LTI-systeemin vaste kompleksiselle eksponenttifunktiolle

LTI-systeemien analysoinnin kannalta kantafunktioiden käyttö signaalien kuvaamiseen edellyttää kantafunktioilta kahta asiaa:

1. kantafunktioiden avulla on pystyttävä kuvaamaan monenlaisia signaaleja
2. LTI-systeemin vaste kantafunktioille tulee olla yksinkertainen.

LTI-systeemi *muuttaa vain kompleksisen eksponenttifunktion amplitudia*, joten systeemin vaste on muotoa

$$e^{st} \to H(s)e^{st} \ , \tag{3.1}$$

jatkuville signaaleille ja

$$z^n \to H(z)z^n \tag{3.2}$$

diskreeteille signaaleille. (Yhtälössä (3.2) z on joku kompleksiluku.)

Signaalia, jolle systeemin vaste on ko. signaali kerrottuna jollakin (mahdollisesti kompleksisella) vakiolla, kutsutaan systeemin *ominaisfunktioksi*.

Ratkaisemalla konvoluution avulla systeemin vaste signaalille e^{st} saadaan

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}\,d\tau = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau = H(s)e^{st}\,, \tag{3.3}$$

missä kompleksinen vakio $H(s)$ saadaan systeemin impulssivasteesta:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}\,d\tau\,. \tag{3.4}$$

Jollekin tietylle s vakio $H(s)$ on ominaisfunktioon e^{st} liittyvä *ominaisarvo.*

Samaan tapaan konvoluution avulla voidaan osoittaa kompleksisten eksponenttijonojen z^n olevan diskreetin LTI-systeemin ominaisfunktioita. Systeemin vaste yksittäiselle jonolle on siis muotoa

$$y[n] = H(z)z^n \tag{3.5}$$

ja vakio

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]z^{-k} \tag{3.6}$$

on ominaisfunktioon z^n liittyvä ominaisarvo.

Soveltamalla nyt superpositioperiaatetta saadaan systeemin vasteeksi kantafunktioista koostuvalle signaalille jatkuvassa tapauksessa

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t} \;\rightarrow\; y(t) = \sum_k a_k H(s_k)e^{s_k t}\,. \tag{3.7}$$

Diskreeteille signaaleilla vastaava esitys on muotoa

$$x[n] = \sum_k a_k z_k^n \;\rightarrow\; y[n] = \sum_k a_k H(z_k)z_k^n\,. \tag{3.8}$$

Toisin sanoen systeemien ulostulot ovat sisäänmenojen kantafunktioiden lineaarikompinaatioita painokertoimilla $a_k H(s_k)$ (tai $a_k H(z_k)$).

Yleisessä tapauksessa muuttujat s ja z voivat olla mitä tahansa kompleksisia vakioita. Fourier-analyysissä jatkuvilla signaaleilla $s = j\omega$, eli käsitellään vain muotoa $e^{j\omega t}$ olevia kompleksia eksponenttejä. Diskreeteillä signaaleilla rajoitutaan tapaukseen $z = e^{j\omega}$, eli käsitellään muotoa $e^{j\omega n}$ olevia kompleksisia eksponenttejä.

3.2 Jatkuvien signaalien Fourier-sarja esitys

3.2.1 Harmonisten eksponenttifunktioden lineaarikompinaatiot

Signaalit $x(t) = \cos\omega_0 t$ ja $e^{j\omega_0 t}$ ovat molemmat jaksollisia jaksolla $T = 2\pi/\omega_0$. Harmoninen signaalijoukko saadaan, kun ω_0:aa kerrotaan kokonaisluvuilla:

$$\phi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk(2\pi/T)t} \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ . \tag{3.9}$$

Tällaisten eksponenttifunktioiden lineaarikompinaatio

$$x(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(2\pi/T)t} \tag{3.10}$$

on myös jaksollinen jaksolla T. Vakioihin $k = \pm 1$ liittyviä termejä kutsutaan *ensimmäisiksi harmonisiksi* termeiksi, vakioihin $k = \pm 2$ liittyviä termejä *toisiksi harmonisiksi* termeiksi, jne.

Yhtälön (3.10) mukaista jaksollisen signaalin esitystä kutsutaan signalin *Fourier-sarja esitykseksi.*

Jos $x(t)$ on reaalinen signaali, niin tällöin $a_k^* = a_{-k}$, missä $*$ tarkoittaa kompleksikonjugaattia. Tässä tapauksessa yhtälö (3.10) voidaan, käyttämällä merkintää $a_k = A_k e^{j\theta_k}$, saattaa muotoon

$$x(t) = a_0 + 2\sum_{k=1} A_k \cos(k\omega_0 t + \theta_k) \ . \tag{3.11}$$

3.2.2 Kertoimien a_k ratkaiseminen

Kertomalla yhtälö (3.10) molemmin puolin termillä $e^{-jn\omega_0 t}$ ja integroimalla molemmat puolet 0:sta $T = 2\pi/\omega_0$:aan, saadaan yhtälö

$$\int_0^T x(t) e^{-jn\omega_0 t}\, dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \left[\int_0^T e^{j(k-n)\omega_0 t}\, dt \right] \ . \tag{3.12}$$

Koska hakasuluissa olevan integraalin integrandi on jaksollinen (sinimuotoinen) funktio, antaa integrointi tulokseksi nollan kun $k \neq n$. Jos $k = n$, niin tulokseksi saadaan T.

Yhtälön (3.12) oikea puoli tulee siis muotoon Ta_n, joten yhtälöstä voidaan ratkaista kertoimet a_k:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_T x(t)\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{1}{T}\int_T x(t)\mathrm{e}^{-jk(2\pi/T)t}\,dt\ , \tag{3.13}$$

missä integraalimerkin alaindeksi T tarkoittaa integrointia yli minkä tahansa T:n mittaisen jakson.

Yhtälöpari (3.10) ja (3.13) määrittelee jatkuvan funktion $x(t)$ Fourier-sarja esityksen ja kertoimien a_k joukkoa $\{a_k\}$ kutsutaan signaalin $x(t)$ *Fourier-sarja kertoimiksi.*

Huom. kerroin a_0 edustaa jaksollisen signaalin $x(t)$ keskiarvoa yli yhden jakson.

3.3 Fourier-sarjojen suppenevuus

Fourier-sarjoja voidaan käyttää kuvaamaan lähes mitä tahansa jaksollisia signaaleja, myös kanttiaaltoa. Käytännössä joudutaan tyytymään äärellisen mittaiseen sarjaan, eli signaali esitetään approksimaationa

$$x_N(t) = \sum_{k=-N}^{N} a_k \mathrm{e}^{jk\omega_0 t}\ , \tag{3.14}$$

jolloin sarjaesityksen ja signaalin välinen erotus kuvaa tehtyä approksimaatiovirhettä:

$$e_N(t) = x(t) - x_N(t) = x(t) - \sum_{k=-N}^{N} a_k \mathrm{e}^{jk\omega_0 t}\ . \tag{3.15}$$

Yleisesti virheen mittana käytetään *virheen energiaa* yhden jakson mittaisella pätkällä, eli

$$E_N = \int_T |e_N(t)|^2\,dt\ , \tag{3.16}$$

jolloin kertoimet a_k voidaan valita s.e. energia (virhe) E_N minimoituu. Tämän kriteerin käyttö johtaa yhtälön (3.13) mukaiseen tulokseen kertoimille a_k.

Tämä tarkoittaa sitä, että paras Fourier-sarja approksimaatio signaalille saadaan, kun sarjaan otetaan mukaan kertoimia alusta johonkin vakioon N asti.

Joissakin tapauksissa yhtälön (3.13) mukainen kertoimien ratkaiseminen ei onnistu, vaan kertoimesta a_k tulee ääretön. Yhtälön (3.10) mukainen summa voi myös hajaantua, vaikka kaikki kertoimet olisivatkin äärellisiä.

Yleensä kuitenkin suppenevuusongelmaa ei ole: esim. kaikilla jatkuvilla jaksollisilla signaaleilla on Fourier-sarja esitys, eli $E_n \to 0$ kun $N \to \infty$.

Sellaisilla jaksollisilla signaaleilla, joiden energia on äärellinen, on aina Fourier-sarja esitys.

(Huom. virheen energian meneminen nollaan ei takaa sitä, että signaali ja sen sarjaesitys olisvat täsmälleen samat kaikille t:n arvoille. Fysikaaliset systeemien vaste liittyy kuitenkin aina energiaan, ja jos signaalin ja sen approksimaation välinen energiaero on nolla, niin systeemin toiminnan kannalta signaaleilla ei ole eroa.)

Vaihtoehtoisesti Fourier-sarjojen suppenevuuden takaavat ns. Dirichlet-ehdot:

1. signaalin $x(t)$ täytyy olla intgroituva yli minkä tahansa jakson, eli
$$\int_T |x(t)|\, dt < \infty \,. \tag{3.17}$$
2. Millä tahansa jaksolla signaalin taajuuden täytyy olla äärellinen.
3. Missä tahansa signaalin jaksossa on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia.

Ehto 1 takaa sen, että kertoimet a_k ovat äärellisiä.

Jos signaalissa on äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia, niin Fourier-sarja suppenee signaaliin kaikkialla muualla paitsi epäjatkuvuuskohdissa. Näissä kohdissa sarja suppenee signaalin keskiarvoon epäjatkuvuuskohdassa.

Epäjatkuvuuskohdan ympärillä signaalin Fourier-sarja esityksessä esiintyy värähtelyä – ilmiö tunnetaan nimellä *Gibbsin ilmiö*.

3.4 Jatkuvien Fourier-sarjojen ominaisuuksia

Fourier-sarjoilla on joukko ominaisuuksia, jotka sekä helpottavat sigaalien Fourier-sarja esitysten muodostamista, että systeemien analysointia. Seuraavissa kappaleissa esitellään näistä ominaisuuksista muutamia tärkeimpiä.

3.4.1 Lineaarisuus

Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ kaksi jaksollista signaalia, joilla on yhteinen jakso T ja joiden Fourier-sarjojen kertoimet ovat joukot $\{a_k\}$ ja $\{b_k\}$. Tällöin

$$z(t) = Ax(t) + By(t) \rightarrow c_k = Aa_k + Bb_k \ , \qquad (3.18)$$

missä c_k:t ovat jaksollisen signaalin $z(t)$ Fourier-sarjan kertoimia.

3.4.2 Siirros ajan suhteen

Olkoon $y(t) = x(t - t_0)$. Tällöin $y(t)$:n Fourier-sarjan kertoimet saadaan integraalista

$$b_k = \frac{1}{T} \int_T x(t - t_0) \mathrm{e}^{-jk\omega_0 t} \, dt \ . \qquad (3.19)$$

Tekemällä muuttujan vaihto $\tau = t - t_0$ integraaliin, saadaan

$$\frac{1}{T} \int_T x(\tau) \mathrm{e}^{-jk\omega_0(\tau + t_0)} \, d\tau = \mathrm{e}^{-jk\omega_0 t_0} \tfrac{1}{T} \textstyle\int_T x(\tau) \mathrm{e}^{-jk\omega_0 \tau} \, d\tau = \mathrm{e}^{-jk\omega_0 t_0} a_k \ , \qquad (3.20)$$

missä a_k on $x(t)$:n Fourier-sarjan k:s kerroin. Signaalin siirtäminen ajassa muuttaa siis sen Fourier-sarjan kertoimien vaiheita tekijällä $\mathrm{e}^{-jk\omega_0 t_0}$, mutta sarjan kertoimien amplitudit säilyvät samoina ($|b_k| = |a_k|$).

3.4.3 Signaalin kääntäminen ajan suhteen

Signaalin jakso säilyy muuttumattomana kuvauksessa $y(t) = x(-t)$. Olkoon

$$x(-t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-jk2\pi t/T} . \tag{3.21}$$

Tekemällä muuttujan vaihto $k = -m$ saadaan esitys

$$y(t) = x(-t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{-m} e^{-jk2\pi t/T} . \tag{3.22}$$

Yhtälön summalauseke vastaa $x(-t)$:n esitystä kertoimilla $b_k = a_{-k}$. Jos siis $x(t)$:n Fourier-sarjan kertoimet ovat a_k, niin $x(-t)$:n kertoimet ovat a_{-k}.

Jos $x(t)$ on parillinen, niin myös sen kertoimille pätee parillisuusehto, eli $a_{-k} = a_k$. Jos taasen $x(t)$ on pariton, niin myös sen sarjan kertoimet ovat parittomia, eli $a_{-k} = -a_k$.

3.4.4 Skaalaus ajan suhteen

Skaalaus ajan suhteen muuttaa signaalin jakson pituutta: jos $x(t)$:n jakso on T (ja taajuus $\omega_0 = 2\pi/T$), niin $x(\alpha t)$:n, missä α on positiivinen reaaliluku, jakso on T/α ja taajuus $\alpha\omega_0$. Koska skaalaus kohdistuu $x(t)$:n kaikkiin harmonisiin komponentteihin, säilyvät $x(t)$:n Fourier-kertoimet muuttumattomina, eli

$$x(\alpha t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk(\alpha\omega_0)t} . \tag{3.23}$$

3.4.5 Kertolasku

Olkoot $x(t)$ ja $y(t)$ molemmat jaksollisia jaksolla T ja niiden Fourier-sarjojen kertoimet joukot $\{a_k\}$ ja $\{b_k\}$. Tällöin myös tulo $x(t)y(t)$ on jaksollinen jaksolla T ja tulon Fourier-sarjan kertoimet h_k ovat muotoa

$$h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} a_l b_{k-l} . \tag{3.24}$$

3.4.6 Kompleksikonjugaatti

Signaalin $x(t)$ kompleksikonjugaatin $x^*(t)$ Fourier-sarjan kertoimet ovat ajan suhteen käännettyjä $x(t)$:n Fourier-sarjan kertoimia, eli muotoa a^*_{-k}.

Jos $x(t) = x^*(t)$ ($x(t)$ on reaalinen), niin $a_{-k} = a^*_k$.

3.4.7 Parsevallin teoreema

Signaalin teholle pätee Parsevallin mukaan ehto

$$\frac{1}{T}\int_T |x(t)|^2\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \,, \tag{3.25}$$

missä a_k:t ovat jaksollisen signaalin $x(t)$ Fourier-sarjan kertoimet.

Yhtälön (3.25) vasen puoli on signaalin keskimääräinen teho yhden jakson T aikana. Toisaalta

$$\frac{1}{T}\int_T \left|a_k e^{jk\omega_0 t}\right|^2\,dt = \frac{1}{T}\int_T |a_k|^2\,dt = |a_k|^2 \,, \tag{3.26}$$

joten $|a_k|^2$ on $x(t)$:n k:nnen harmonisen komponentin keskimääräinen teho.

Parsevallin teoreeman mukaan siis signaalin keskimääräinen teho on sama kuin sen Fourier-sarjan muodostavien jaksollisten signaalien keskimääräisten tehojen summa.

3.5 Diskreettien signaalien Fourier-sarjat

Merkittävin ero diskreettien jaksollisten signaalien ja jatkuvien jaksollisten signaalien Fourier-sarjojen välillä on se, että diskreettien signaalien Fourier-sarjan summa on äärellinen. Tästä johtuen diskreettien signaalien sarjojen suppenevuutta ei tarvitse tarkastella samaan tapaan kuin jatkuvien signaalien kohdalla jouduttiin tekemään.

3.5.1 Kompleksisten eksponenttien lineaarikombinaatiot

Diskreetin signaalin jaksollisuus määriteltiin ehdolla $x[n] = x[n+N]$, missä N on pienin kokonaisluku, jolla ehto toteutuu. Niiden kaikkien kompleksisten eksponenttien joukko, jotka ovat jaksollisia N:llä on

$$\phi_k[n] = \mathrm{e}^{jk\omega_0 n} = \mathrm{e}^{jk(2\pi/N)n} \ , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \ . \tag{3.27}$$

Kyseisessä joukossa on vain N kpl. erilaisia alkioita: $\phi_0[n] = \phi_N[n]$, $\phi_1[n] = \phi_{N+1}[n]$ ja yleisesti

$$\phi_k[n] = \phi_{k+rN}[n] \ . \tag{3.28}$$

Jaksollinen diskreetti signaali voidaan esittää $\phi_k[n]$ lineaarikombinaationa:

$$x[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \phi_k[n] = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \mathrm{e}^{jk\omega_0 n} = \sum_{k=\langle N\rangle} a_k \mathrm{e}^{jk(2\pi/N)n} \ . \tag{3.29}$$

Merkintä $k = \langle N\rangle$ tarkoittaa N-mittaista k-alkioiden joukkoa — k voi saada esim. arvot $0, 1, \ldots, N-1$ tai $3, 4, \ldots, N+2$.

3.6 Kertoimien a_k ratkaiseminen

Yhtälöstä (3.29) saadaan eri k:n arvoilla joukko lineaarisia yhtälöitä, joista kertoimet a_k voitaisiin ratkaista.

Kertoimille a_k saadaan kuitenkin myös suljettumuotoiset ratkaisut samaan tapaan kuin jatkuvien signaalien kertoimillekin, nimittäin

$$\sum_{n=\langle N\rangle} \mathrm{e}^{jk(2\pi/N)n} = \begin{cases} N, & k = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} . \tag{3.30}$$

Yhtälön (3.30) mukaan jaksollisten kompleksisten eksponenttien summa yli yhden jakson on nolla, paitsi jos eksponentti on 2π:n monikerta.

Kertomalla yhtälö (3.29) molemmin puolin $\mathrm{e}^{-jr(2\pi/N)n}$:llä ja summaamalla N termiä, saadaan

$$\sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\mathrm{e}^{-jr(2\pi/N)n} = \sum_{n=\langle N\rangle} a_k \sum_{k=\langle N\rangle} \mathrm{e}^{j(k-r)(2\pi/N)n} . \tag{3.31}$$

Yhtälön (3.30) perusteella oikean puolimmainen summa poikkeaa nollasta vain kun $(k - r) = 0$ tai N:n monikerta. Joten, jos r:n arvot valitaan samalta väliltä kuin millä k:n arvot vaihtelevat summauksessa, niin sisempi summa yhtälössä (3.31) on N kun $k = r$ ja nolla muulloin. Tällöin yhtälön oikeasta puolesta tulee Na_r ja kertoimille

saadaan esitys

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\mathrm{e}^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N\rangle} x[n]\mathrm{e}^{-jk(2\pi/N)n} \tag{3.32}$$

Yhtälön (3.32) mukaisia kertoimia kutsutaan usein signaalin $x[n]$ *spektraalisiksi kertoimiksi*, joille pätee jaksollisuusehto $a_k = a_{k+N}$.

Diskreeteillä Fourier-sarjoilla ei ole suppenemisongelmia, eikä Gibbsin ilmiötä, koska diskreetti jaksollinen signaali pystytään esittämään täsmälleen N:llä eri parametrillä. Signaalin Fourier-sarjaesityksessä on kyseessä signaalin esittämisestä valittujen kantafunktioiden joukossa, jolloin N kpl. kantafunktioita sopivilla painokertoimilla riittää kuvaamaan signaalin täysin.

3.7 Diskreettien Fourier-sarjojen ominaisuuksia

Diskreettien signaalien Fourier-sarjoilla on samat ominaisuudet kuin jatkuvien signaalien Fourier-sarjoilla. Erona on lähinnä se, että diskreetit sarjat ovat äärellisiä.

3.7.1 Sarjojen kertominen

Jos diskreetteihin signaaleihin $x[n]$ ja $y[n]$ liittyvät Fourier-sarjojen kertoimet ovat joukot $\{a_k\}$ ja $\{b_k\}$, niin silloin tuloon $x[n]y[n]$ liityvät kertoimet saadaan *jaksollisella konvoluutiolla*

$$x[n]y[n] \rightarrow d_k = \sum_{l=\langle N \rangle} a_l b_{k-l} \ . \tag{3.33}$$

3.7.2 Ensimmäinen differenssi

Ensimäinen differenssi määritellään diskreetin signaalin peräkkäisten termien erotuksena $x[n] - x[n-1]$. Jos $x[n]$ on jaksollinen, niin myös sen ajassa siirretyt versiot ovat jaksollisia. Myöskin sellaisten signaalien, joiden jakso on N, lineaarikombinaatio on jaksollinen jaksolla N. Näiden ominaisuuksien perusteella ensimmäiseen differenssiin liittyvät Fourier-kertoimet ovat muotoa

$$x[n] - x[n-1] \rightarrow \left(1 - \mathrm{e}^{-jk(2\pi/N)}\right) a_k \ . \tag{3.34}$$

3.7.3 Parsevallin teoreema

Parsevallin mukaan diskreeteille signaaleille pätee

$$\frac{1}{N} \sum_{n\langle N \rangle} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k\langle N \rangle} |a_k|^2 \ . \tag{3.35}$$

Kuten jatkuvien signaalien kohdallakin yhtälön vasen puoli edustaa signaalin keskimääräistä tehoa yhden jakson aikana ja oikea puoli yhtälöstä puolestaan edustaa harmonisten komponentien keskimääräisten tehojen summaa yhden jakson aikana.

3.8 Fourier-sarjat ja LTI-systeemit

Jatkuvien ja diskreettien signaalien vasteille eksponenttifunktiohin saatiin tämän luvun alussa tulokset $y(t) = H(s)e^{st}$ ja $y[n] = H(z)z^n$; kertoimet $H(s)$ ja $H(z)$ on määritelty yhtälöissä (3.4) ja (3.6). Kun s ja z ovat mitä tahansa kompleksilukuja kutsutaan $H(s)$:ää ja $H(z)$:aa *systeemifunktioiksi.*

Jatkuvilla signaaleilla käytetään yleensä esitystä, jossa $s = j\omega$, jolloin funktio $H(j\omega)$ on systeemin *taajuusvaste*

$$H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t}\, dt \ . \tag{3.36}$$

Vastaavasti diskreeteillä signaaleilla valitaan $z = e^{j\omega}$, jolloin systeemifunktio $H(z)$ edustaa systeemin taajuusvastetta ja se on muotoa

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n]e^{-j\omega n} \ . \tag{3.37}$$

LTI-systeemin vaste kompleksisiin eksponentiaalisiin signaaleihin on siis helpointa ilmaista systeemin taajuusvasteena.

Jos jatkuva signaali, jonka Fourier-sarjan esitys on yhtälön (3.10) mukainen, pistetään syötteenä LTI-systeemiin, jonka impulssivaste on $h(t)$, niin ulostulosta saadaan signaali

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t} \ . \tag{3.38}$$

Signaali $y(t)$ on myös jaksollinen samalla jaksolla kuin $x(t)$:kin. Jos $x(t)$:n Fourier-sarjan kertoimet ovat $\{a_k\}$, niin $y(t)$:n sarjan kertoimet ovat $\{a_k H(jk\omega_0)\}$. Tämä tarkoittaa sitä, että LTI-systeemi muuttaa jokaista Fourier-kerrointa kertomalla tämän arvon ko. taajuutta vastaavalla systeemin taajuusvasteen tekijällä.

3.9 Signaalin suodattaminen

Monissa sovelluksissa on tarpeen muuttaa signaalin taajuuskomponettien suhteita tai poistaa joitain taajuuskomponentteja kokonaan. Tätä toimenpidettä kutsutaan suodattamiseksi.

LTI-systeemejä, jotka muokkaavat signaalin spektriä kutsutaan *taajuussuotimiksi.* Esimerkkejä tällaisista suotimista ovat vahvistimien basson ja korkeiden taajuuksien säätönamuskat.

Esim. signaalin derivointi ($y(t) = d\,x(t)/dt$) johtaa eksponentiaalisella signaalilla taajuusvasteeseen $H(j\omega) = j\omega$, jonka perusteella systeemin voidaan päätellä korostavan korkeita taajuuksia.

Alipäästösuodin päästää läpi matalat taajuudet johonkin rajataajuuten asti.

Ylipäästösuodin päästää läpi taajuudet, jotka ovat korkeampia kuin suotimen rajataajuus.

Ideaalisen *alipäästösuotimen* taajuusvaste on muotoa

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} . \tag{3.39}$$

Käytetystä eksponettiesitysmuodosta johtuen suotimien taajuusvasteet ovat symmetrisiä taajuuden $\omega = 0$ suhteen.

Diskreettien suotimen kohdalla on muistettava taajuuksien jaksollisuus: myös suotimet ovat jaksollisia taajuusjaksolla 2π.

Edellä esitetyt ideaaliset suotimet soveltuvat ideaalisten systeemien kuvaamiseen, mutta valitettavasti ideaalisia suotimia ei voida käytännössä toteuttaa.

3.9.1 RC-alipäästösuodin

Yksinkertaisen RC piirin jännite yli kondensaattorin kytkeytyy sisäänmenojännitteeseen seuraavasti

$$RC\frac{dv_C(t)}{dt} + v_C(t) = v_s(t) \ . \tag{3.40}$$

Määritelmän mukaan systeemin vaste sisäänmenosignaalille $v_s(t) = \mathrm{e}^{j\omega t}$ on $v_C(t) = H(j\omega t)\mathrm{e}^{j\omega t}$. Sijoittamalla nämä yhtälöön (3.40) saadaan ratkaistua

$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + RCj\omega} \ . \tag{3.41}$$

Pienillä taajuuksilla $|H(j\omega)| \approx 1$ – taajuuksien kasvaessa $|H(j\omega)|$ pienenee, eli systeemi toimii alipäästosuotimen tavoin.

Yhtälön (3.40) mukaisen systeemin impulssivaste on

$$h(t) = \frac{1}{RC}\mathrm{e}^{-t/RC}u(t) \ , \tag{3.42}$$

ja vaste askelfunktiolle on muotoa

$$s(t) = [1 - \mathrm{e}^{-t/RC}]u(t) \ . \tag{3.43}$$

Taajuusvasteen perusteella tulon RC pitäisi olla suuri, jotta suodin läpäisisi mahdollisimman vähän korkeita taajuuksia. Toisaalta jos RC on suuri, niin systeemin ulostulo nousee hitaasti maksimiarvoonsa kun sisäänmenoon kytketään vakiosignaali (u(t)). Suodattimia suunniteltaessa joudutaankin usein valitsemaan millaista toimintaa systeemiltä halutaan.

3.9.2 Ensimmäisen asteen diskreetit suotimet

Edelläesitettyä RC-piirin tyyppisiä suotimia vastaa diskreetillä puolella systeemit, joita kuvaa ensimmäisen asteen rekursiivinen differenssiyhtälö

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \ . \tag{3.44}$$

Sijoittamalla $x[n] = \mathrm{e}^{j\omega n}$ ja $y[n] = H(\mathrm{e}^{j\omega})e^{j\omega n}$ yhtälöön (3.44) saadaan systeemin taajuusvaste ratkaistua:

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-j\omega}} \ . \tag{3.45}$$

Jos a on positiivinen, niin suodin, jonka taajuusvaste on yhtälön (3.45) mukainen, toimii alipäästösuotimen tavoin päästäen läpi taajuuksia arvon $\omega = 0$ ympärillä.

Jos taasen a on negatiivinen, niin suodin on silloin ylipäästösuodin, joka läpäisee taajuuksia taajuuden $\omega = \pi$ ympäriltä.

Yleinen muoto ei-rekursiiviselle FIR-tyyppisen systeemin differenssiyhtälölle on

$$y[n] = \sum_{k=-N}^{M} b_k x[n-k] \ . \tag{3.46}$$

Tämän tyyppistä suodinta kutsutaan *liukuvan keskiarvon suotimeksi.* Ideana on signaalin paikallinen keskiarvoistaminen, jolloin korkeat taajuudet suodattuvat pois ja matalammilla taajuuksilla esiintyvät signaalin vaihtelut jäävät jäljelle.

Esim. suotimen

$$y[n] = \frac{1}{3}\left(x[n-1] + x[n] + x[n+1]\right) \tag{3.47}$$

taajuusvaste on

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{3}(1 + 2\cos\omega) \ , \tag{3.48}$$

eli suodin on alipäästötyyppinen suodin. Suotimen leveyttä ei kuitenkaan voida säätää mitenkään.

Liukuvan keskiarvon suotimen yleistys on suodin, jossa keskiarvoistetaan $N + M + 1$ pistettä:

$$y[n] = \frac{1}{N+M+1} \sum_{k=-N}^{M} x[n-k] \ . \tag{3.49}$$

Systeemin impulssivaste $h[n] = 1/(N+M+1)$ kun $-N \leq n \leq M$ ja nolla muulloin. Systeemin taajuusvasteelle saadaan esitys

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{N+M+1} \mathrm{e}^{j\omega[(N-M)/2]} \frac{\sin[(M+N+1)/2]}{\sin(\omega/2)} \ . \tag{3.50}$$

Säätämällä summan $N+M+1$ arvoa voidaan siis säätää systeemin taajuusvasteen leveyttä.

Ei-rekursiivisiä differenssiyhtälöitä voidaan käyttää myös kuvaamaan ylipäästösuotimia. Yksinkertainen esimerkki tällaisesta suotimesta on

$$y[n] = \frac{x[n] - x[n-1]}{2} \ , \tag{3.51}$$

jonka taajuusvaste on muotoa

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = j\mathrm{e}^{j\omega/2} \sin(\omega/2) \ . \tag{3.52}$$

Systeemi ei siis päästä läpi matalia taajuuksia ($\sin 0 = 0$).

4 Jatkuva Fourier-muunnos

Edellisessä luvussa esitettiin kuinka jaksollinen signaali voidaan esittää lineaarikombinaationa jostakin valitusta kantafunktiojoukosta. Tässä luvussa käytetty malli laajennetaan koskemaan signaaleja, joilla ei ole jaksoa. Signaalin jaksottomuus johtaa siihen, että kantafunktiota pitää olla äärettömän tiheässä taajuusalueessa ajateltuna, jolloin niiden lineaarikombinaatio on esitettävä integraalina summan asemasta. Tuloksena saatavaa kertoimien muodostamaa spektriä kutsutaan *Fourier-muunnokseksi* ja *käänteismuunnoksella* tarkoitetaan sitä integraalia, jolla, Fourier-spektrin kertoimien avulla, saadaan esitettyä alkuperäinen signaali.

4.1 Fourier-muunnoksen perustelu

Olkoon (kuten aiemminkin)

$$x(t) = \begin{cases} 1, & |t| < T_1 \\ 0, & T_1 < |t| < T/2 \end{cases} , \tag{4.1}$$

jaksollinen signaali jaksolla T. Tämän signaalin Fourier-sarjan kertoimet olivat

$$a_k = \frac{2\sin(k\omega_0 T_1)}{k\omega_0 T} , \tag{4.2}$$

missä $\omega_0 = 2\pi/T$. Toinen tapa tulkita yhtälöä (4.2) on ajatella se näytteinä verhokäyrästä, eli

$$Ta_k = \left.\frac{2\sin\omega T_1}{\omega}\right|_{\omega=k\omega_0} . \tag{4.3}$$

Tämä tarkoittaa, että jos ω oletaan jatkuvaksi muuttujaksi niin $(2\sin\omega T_1)/\omega$ kuvaa Ta_k:n verhokäyrää ja kertoimet a_k ovat tasavälisiä näytteitä tästä käyrästä. Jollekin kiinteälle T_1 verhokäyrä on riippumaton T:stä. Kun T kasvaa, niin $\omega_0 = 2\pi/T$ pienenee joten yhtälön (4.3) mukaisessa näytteenotossa näytteenottoväli lyhenee.

Kun $T \to \infty$, niin voidaan ajatella näytteenoton antavan tuloksena verhokäyrän.

Edellä kuvattu menettely on Fourier-muunnoksen laskemisen perusidea jaksottomille signaaleille.

Olkoon $x(t)$ jaksoton signaali ($x(t) = 0$ kun $|t| > T_1$) ja $\tilde{x}(t)$ sen jaksollinen versio, joka suppenee $x(t)$:hen, kun $T \to \infty$. Fourier-sarja esitys $\tilde{x}(t)$:lle on

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t} , \tag{4.4}$$

kertoimilla

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \tilde{x}(t) e^{-jk\omega_0 t} \, dt . \tag{4.5}$$

Koska $\tilde{x}(t) = x(t)$ kun $|t| < T/2$ ja $x(t) = 0$ tämän välin ulkopuolella, kertoimet a_k voidaan kirjoittaa muotoon

$$a_k = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-jk\omega_0 t} \, dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-jk\omega_0 t} . \tag{4.6}$$

Määrittelemällä Ta_k:n verhokäyrä $X(j\omega)$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} \, dt , \tag{4.7}$$

saadaan kertoimille a_k

$$a_k = \frac{1}{T} X(jk\omega_0) . \tag{4.8}$$

Yhdistämällä yhtälöt (4.4) ja (4.8) saadaan

$$\tilde{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X(jk\omega_0) e^{jk\omega_0 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0) e^{k\omega_0 t} \omega_0 . \tag{4.9}$$

Kun $T \to \infty$, niin $\tilde{x}(t) \to x(t)$, ja $\omega_0 \to 0$, jolloin yhtälön oikea puoli muuttuu integraaliksi ja voidaan kirjoittaa

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{+j\omega t} \, d\omega . \tag{4.10}$$

Yhtälöt (4.7) ja (4.10) muodostavat *Fourier-muunnosparin*, jossa $X(j\omega)$ on $x(t)$:n *Fourier-muunnos* ja yhtälö (4.10) sen *käänteismuunnos*. Jaksottoman signaalin muunnosta $X(j\omega)$ kutsutaan myös signaalin *spektriksi*.

Usein Fourier-muunnokselle ja käänteismuunnokselle käytetään merkintöjä

$$\boxed{X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \text{ ja } x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\}\ .}$$

Jaksollisen signaalin $\tilde{x}(t)$ Fourier-kertoimet a_k voidaan tulkita Fourier-muunnoksesta tasavälein otetuiksi näytteiksi

$$a_k = \frac{1}{T} X(j\omega)\Big|_{\omega=k\omega_0}\ , \tag{4.11}$$

missä ω_0 on jaksollisen signaalin $\tilde{x}(t)$ taajuus.

4.2 Fourier-muunnoksen suppenevuus

Fourier-muunnoksen suppenevuutta voidaan tarkastella samaan tapaan kuin Fourier-sarjojenkin suppenevuutta. Käyttämällä signaalin estimaattina $\hat{x}(t)$ $X(j\omega)$:n avulla laskettua kaavan (4.10) mukaista tulosta voidaan virheen $e(t) = \hat{x}(t) - x(t)$ energian osoittaa menevän nollaan, kun

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2\, dt < \infty\ , \tag{4.12}$$

siis silloin kun $X(j\omega)$ on äärellinen.

Aivan kuten sarjoillakin suppenemisehdoiksi saadaan Dirichlet-ehdot:

1. signaalin $x(t)$ täytyy olla intgroituva, eli

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt < \infty\ . \tag{4.13}$$

2. Millä tahansa äärellisellä välillä $x(t)$:llä on rajoitettu määrä minimi- ja maksimiarvoja.
3. Millä tahansa äärellisellä välillä $x(t)$:llä on vain äärellinen määrä epäjatkuvuuskohtia. Näiden kaikkien epäjatkuvuuskohtien tulee vielä olla äärellisiä.

Fourier-muunnosparin symmetrisyyden perusteella voidaan sanoa, että esim. kanttipulssi tuottaa aina sinc-funktion, esiintyipä se kummassa tahansa tasossa. Sama pätee kaikille muillekin signaalimuodoille.

Huom. sinc-funktion määritelmä signaalinkäsittelyssä:

$$\mathrm{sinc}(\theta) = \frac{\sin \pi\theta}{\pi\theta}\ . \tag{4.14}$$

4.3 Jaksollisten signaalien Fourier-muunnos

Jaksollisten signaalien Fourier-muunnos on *sama* kuin niiden Fourier-sarja esitys.

Olkoon $x(t)$:n Fourier-muunnos $X(j\omega)$ yksi impulssi pisteessä $\omega = \omega_0$ ja olkoon impulssin pinta-ala 2π, eli

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0) \ . \tag{4.15}$$

Ratkaisemalla käänteismuunnoksella signaali, joka liittyy $X(j\omega)$:aan, saadaan

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)\mathrm{e}^{j\omega t\, d\omega} = \mathrm{e}^{j\omega_0 t} \ . \tag{4.16}$$

Jos $X(j\omega)$ koostuu tasavälein taajuusasteikolla olevien pulssien lineaarikombinaatiosta

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta(\omega - k\omega_0) \ , \tag{4.17}$$

niin tällöin

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \mathrm{e}^{jk\omega_0 t} \ . \tag{4.18}$$

Saatu yhtälö on täsmälleen sama kuin jaksollisen signaalin Fourier-sarjan esitys. Jaksollisen signaalin, jonka Fourier-sarjan kertoimet ovat $\{a_k\}$, Fourier-muunnos on joukko impulsseja, joiden pinta-ala k:nnen harmonisen taajuuden kohdalla on $2\pi a_k$.

4.4 Jatkuvan Fourier-muunnoksen ominaisuuksia

Fourier-muunnoksen ominaisuudet kuvaavat erilaisia yhteyksiä signaalien aika- ja taajuustason esitysten välillä.

Fourier-muunnoksen ominaisuudet ovat samanlaisia kuin aiemmin käsiteltyjen Fourier-sarjojenkin ominaisuudet.

4.4.1 Lineaarisuus

Jos $x(t)$ ja $X(j\omega)$, sekä $y(t)$ ja $Y(j\omega)$ ovat Fourier-muunnospareja, niin

$$\mathcal{F}\{ax(t) + by(t)\} = aX(j\omega) + bY(j\omega) \ . \tag{4.19}$$

4.4.2 Siirros ajan suhteen

Fourier-muunnosparille, $(x(t),\ X(j\omega))$, pätee

$$\mathcal{F}\{x(t-t_0)\} = \mathrm{e}^{-j\omega t_0} X(j\omega)\ . \tag{4.20}$$

Ominaisuus on helppo osoittaa Fourier-muunnos -integraalista muuttujan vaihdon avulla.

4.4.3 Kompleksikonjugaattin muunnos ja symmetria

Fourier-muunnosparille, $(x(t),\ X(j\omega))$, pätee

$$\mathcal{F}\{x^*(t)\} = X^*(-j\omega)\ . \tag{4.21}$$

Tämä ominaisuus saadaan ratkaisemalla yhtälön (4.7) kompleksikonjugaatti:

$$X^*(j\omega) = \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)\mathrm{e}^{j\omega t}\,dt\ , \tag{4.22}$$

josta muuttujan vaihdolla $\omega = -\omega$ saadaan yhtälön (4.21) mukainen tulos.

Jos $x(t)$ on reaalinen, niin tällöin

$$X(-j\omega) = X^*(j\omega)\quad . \tag{4.23}$$

Yhtälön (4.23) tulos tarkoittaa sitä, että kun $x(t)$ on reaalinen, niin $\mathrm{Re}\{X(j\omega)\} = \mathrm{Re}\{X(-j\omega)\}$ $\mathrm{Im}\{X(j\omega)\} = -\mathrm{Im}\{X(-j\omega)\}$, eli Fourier-muunnoksen reaaliosa on parillinen ja imaginääriosa pariton.

Jos $X(j\omega)$ esitetään polaarimuodossa

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\mathrm{e}^{j\angle X(j\omega)}\ , \tag{4.24}$$

niin tällöin $|X(j\omega)|$ on parillinen funktio ja $\angle X(j\omega)$ on pariton.

Jos $x(t)$ on reaalinen ja parillinen, niin myös $X(j\omega)$ on reaalinen ja parillinen.

4.4.4 Derivaatta ja intergraali

Olkoon $x(t)$:n Fourier-muunnos $X(j\omega)$. Tällöin

$$\mathcal{F}\left\{\frac{d\,x(t)}{dt}\right\} = j\omega X(j\omega)\ . \tag{4.25}$$

Tuloksen mukaan derivointi aikatasossa tarkoittaa signaalin kertomista tekijällä $j\omega$ taajuustasossa. Tätä tulosta voidaan hyödyntää analysoitaessa differentiaaliyhtälöillä kuvattuja LTI-systeemejä.

Fourier-muunnoksen käänteisyyden perusteella integrointi johtaa signaalin jakamiseen tekijällä $j\omega$ taajuustasossa:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\,d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega}X(j\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)\ . \tag{4.26}$$

Yhtälön oikealla puolella oleva impulssitermi edustaa integroinnista mahdollisesti syntyvää vakiota tai keskiarvoa.

4.4.5 Ajan ja taajuuden skaalaus

Fourier-muunnosparille $(x(t),\ X(j\omega))$

$$\mathcal{F}\{x(at)\} = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{j\omega}{a}\right)\ , \tag{4.27}$$

missä a on nollasta eroava reaaliluku.

Ajan skaalaaminen tekijällä a tarkoittaa siis taajuuksien skaalaamista tekijällä $1/a$ ja kääntäen. Kun $a = -1$, niin saadaan

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega)\ , \tag{4.28}$$

eli signaalin kääntäminen ajan suhteen kääntää sen Fourier-muunnoksen taajuuksien suhteen.

Skaalausominaisuuden perusteella voidaan myös sanoa, että signaalin jakson pituuden kasvattaminen pienentää signaalin taajuutta.

4.4.6 Kytkös

Yhtälöiden (4.7) ja (4.10) symmetrisyys kytkee aika- ja taajuustason samanmuotoiset signaalit toisiinsa.

Jos esim. $x_1(t) = 1$, kun $|t| < T_1$ ja nolla muulloin, niin

$$\mathcal{F}\{x_1(t)\} = \frac{2\sin\omega T_1}{\omega} \ . \tag{4.29}$$

Jos taas $x_2(t) = \sin Wt/\pi t$, niin

$$\mathcal{F}\{x_2(t)\} = \begin{cases} 1, & |\omega| < W \\ 0, & |\omega| > W \end{cases} \tag{4.30}$$

Tämänkaltainen symmetria pätee yleisesti kaikille Fourier-muunnoksille.

Tätä ominaisuutta voidaan hyödyntää johdettaessa Fourier-muunnoksen muita ominaisuuksia. Esim. derivoimalla yhtälö (4.7) saadaan,

$$\frac{d\,X(j\omega)}{d\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)\mathrm{e}^{-j\omega t}\,dt \ , \tag{4.31}$$

josta voidaan päätellä, että

$$\mathcal{F}\{-jtx(t)\} = \frac{d\,X(j\omega)}{d\omega} \ . \tag{4.32}$$

Samalla tavalla saadaan yhtälöistä (4.20) ja (4.26) kytkökset

$$\mathcal{F}\{\mathrm{e}^{j\omega_0 t}x(t)\} = X\left(j(\omega - \omega_0)\right) \ , \tag{4.33}$$

ja

$$\mathcal{F}\left\{-\frac{1}{jt}x(t) + \pi x(0)\delta(t)\right\} = \int_{-\infty}^{\omega} X(j\eta)\,d\eta \ . \tag{4.34}$$

4.4.7 Parsevallin teoreema

Jos $x(t)$ ja $X(j\omega)$ ovat Fourier-muunnospari, niin tällöin

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 \, d\omega \ . \tag{4.35}$$

Teoreema saadaan tulon $x(t)x^*(t)$ Fourier-muunnoksesta.

Parsevallin yhtälön mukaan kokonaisenergia saadaan joko integroimalla tehoa aikayksikköä kohden $|x(t)|^2$ yli signaalin keston tai tai integroimalla tehoa taajuusyksikköä kohden $X(j\omega)/2\pi$ yli koko taajuusalueen. Tästä johtuen $|X(j\omega)|^2$:aa kutsutaan usein signaalin $x(t)$ *energiatiheysspektriksi.*

4.5 Konvoluutio ja Fourier-muunnos

Aiemmin on osoitettu, että jos LTI-systeemin sisäänmeno voidaan esittää Fourier-sarjana, niin tällöin myös systeemin ulostulo on esitettävissä Fourier-sarjana.

Yhtälön (4.9) perusteella käänteinen Fourier-muunnos on esitettävissä raja-arvona summasta, jossa $\omega_0 \to 0$. Toisaalta lineaarisen systeemin, jonka impulssivaste on $h(t)$,

vaste syötteeseen $e^{jk\omega_0 t}$ on $H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}$, missä

$$H(jk\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-jk\omega_0 t} \, dt \ . \tag{4.36}$$

Taajuusvastetta $H(j\omega)$ voidaan pitää systeemin impulssivasteen Fourier-muunnoksena. Nyt lineaarisen systeemin vaste syötteeseen $x(t)$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned} y(t) &= \lim_{\omega_0 \to 0} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)H(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}\omega_0 \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} \, d\omega \ . \end{aligned} \tag{4.37}$$

Yhtälö on $Y(j\omega)$:n käänteismuunnoksen muotoa, joten voidaan päätellä, että

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega) \ . \tag{4.38}$$

Sama tulos saataisiin ottamalla konvoluutiointegraalista molemmin puolin Fourier-muunnokset. Siis aikatason konvoluutio on konvoloitavien signaalien Fourier-muunosten tulo taajuustasossa:

$$\underline{\mathcal{F}\{h(t) * x(t)\} = Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega) \ .} \tag{4.39}$$

Aikatasossa LTI-systeemin kuvaa täysin sen impulssivaste $h(t)$; taajuustasossa systeemin kuvaamiseen voidaan käyttää impulssivasteen Fourier-muunnosta $H(j\omega)$.

4.6 Tulo-ominaisuus

Fourier-muunnoksen symmetrisyyden perusteella voidaan päätellä, että aikatason tulon täytyy johtaa konvoluutioon taajuustasossa, eli jos $r(t) = s(t)p(t)$, niin

$$\mathcal{F}\{r(t)\} = R(j\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} S(j\theta)P(j(\omega-\theta))\,d\theta\ . \tag{4.40}$$

Kertomalla signaali toisella signaalilla saadaan signaalin amplitudia muutettua halutulla tavalla; tällöin puhutaan *amplitudimodulaatiosta.*

Tulo-ominaisuuden avulla signaalia voidaan myös siirtää taajuusalueessa: moduloidaan signaalia sinimuotoisesti signaalilla $e^{j\omega_c t}$, jolloin se saadaan siirrettyä esim. alipäästösuotimen toiminta-alueelle, tehdään suodatus ja siirretään signaali takaisin kertomalla se tekijällä $e^{-j\omega_c t}$.

4.7 Vakiokertoiminen differentiaaliyhtälöesitys

LTI-systeemi voidaan kuvata vakiokertoimisella differentiaaliyhtälöllä

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k\,y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{N} b_k \frac{d^k\,x(t)}{dt^k}\ . \tag{4.41}$$

Konvoluutiotuloksen (4.39) perusteella saadaan $H(j\omega) = Y(j\omega)/X(j\omega)$. Ottamalla nyt yhtälöstä (4.41) Fourier-muunnokset molemmin puolin ja käyttämällä Fourier-muunnoksen derivaatta-ominaisuutta, saadaan

$$\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k Y(j\omega) = \sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k X(j\omega)\ , \tag{4.42}$$

josta saadaan ratkaistua $H(j\omega)$

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^{N} b_k (j\omega)^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k (j\omega)^k}\ . \tag{4.43}$$

Systeemin impulssivasteen Fourier-muunnos on siis ratkaistavissa rationaalifunktiona, jos systeemiä kuvaavan differentiaaliyhtälön painokertoimet a_k ja b_k tunnetaan.

5 Diskreetin signaalin Fourier-muunnos

Tässä luvussa seurataan edellisessä luvussa käytettyä menettelyä diskreetin signaalin Fourier-muunnoksen perustelemiseen ja sen ominaisuuksien esittelyyn. Tällä menettelyllä pyritään helpottamaan jatkuvan Fourier-muuunnoksen ja diskreetin Fourier-muunnoksen yhtäläisyyksien ja eroavaisuuksien havaitsemista.

5.1 Fourier-muunnoksen perustelu

Olkoon $x[n]$ jono, joka saa jotain arvoja välillä $-N_1 \leq n \leq N_2$ ja on muualla nolla. Tästä jaksottomasta signaalista saadaan jaksollinen signaali $\tilde{x}[n]$ ottamalla $x[n]$ signaalin yhdeksi jaksoksi ja toistamalla sitä N:n välein. Kun $N \to \infty$, niin $\tilde{x}[n] \to x[n]$ kaikille n:n äärellisille arvoille.

Aiemman esitetyn yhtälön (3.29) perusteella

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \mathrm{e}^{jk(2\pi/N)n} , \tag{5.1}$$

missä

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} \tilde{x}[n] \mathrm{e}^{-jk(2\pi/N)n} . \tag{5.2}$$

Koska $x[n] = \tilde{x}[n]$ yhden jakson ajan, eli sisältäen välin $-N_1 \leq n \leq N_2$, voidaan summauksessa korvata $\tilde{x}[n]$ $x[n]$:llä, eli

$$a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-N_1}^{N_2} x[n] \mathrm{e}^{-jk(2\pi/N)n} = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathrm{e}^{-jk(2\pi/N)n} . \tag{5.3}$$

Määrittelemällä funktio

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \mathrm{e}^{-j\omega n} , \tag{5.4}$$

nähdään, että kertoimet a_k ovat verrannollisia $X(\mathrm{e}^{j\omega})$:sta otettuihin näytteisiin, eli

$$a_k = \frac{1}{N} X(\mathrm{e}^{jk\omega_0}) , \tag{5.5}$$

missä $\omega_0 = 2\pi/N$ on näytteiden väli taajuustasossa.

Yhdistämällä yhtälöt (5.1) ja (5.5) saadaan

$$\begin{aligned}\tilde{x}[n] &= \sum_{k=\langle N\rangle} \frac{1}{N} X(\mathrm{e}^{jk\omega_0})\mathrm{e}^{jk\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N\rangle} X(\mathrm{e}^{jk\omega_0})\mathrm{e}^{jk\omega_0 n}\omega_0 \ , \qquad (5.6)\end{aligned}$$

missä on käytetty tietoa $1/N = \omega_0/2\pi$. Kun N kasvaa, niin ω_0 pienenee ja summaus muuttuu integraaliksi, eli

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\mathrm{e}^{j\omega})\mathrm{e}^{j\omega n}\, d\omega \ . \qquad (5.7)$$

Integointi tarvitsee suorittaa vain yli yhden jakson, koska $X(\mathrm{e}^{j\omega})\mathrm{e}^{j\omega n}$ on jaksollinen 2π:llä.

Yhtälöt (5.4) ja (5.7) muodostavat *diskreetin Fourier-muunnosparin.* Fourier-muunnosta $X(\mathrm{e}^{j\omega})$ kutsutaan $x[n]$:n spektriksi, koska se kertoo millaisista kompleksista eksponenteista $x[n]$ koostuu.

Fourier-sarjan kertoimet voidaan taaskin nähdä näytteinä äärellisen kestoisen jaksottoman signaalin $x[n]$ Fourier-muunnoksesta.

Diskreetin Fourier-muunnoksen tärkeimmät erot jatkuvaan muunnokseen verrattuna ovat $X(\mathrm{e}^{j\omega})$:n jaksollisuus, ja tästä johtuva integrointi yli yhden jakson käänteismuunnoksen kaavassa (5.7).

5.2 Diskreetin muunnoksen suppenevuus

Diskreetti muunnos (5.4) on olemassa, jos summa

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \ , \qquad (5.8)$$

tai jos signaalin $x[n]$ energia on äärellinen, eli

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \ . \qquad (5.9)$$

Käänteismuunoksen laskemiseen ei liity mitään suppenemisongelmaa, koska integrointi tehdään yhden jakson yli.

Jos $x[n]$:ää approksimoidaan taajuuksiin $|\omega| \leq W$ liittyvillä signaaleilla, eli

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-W}^{W} X(\mathrm{e}^{j\omega}) \mathrm{e}^{j\omega n} \, d\omega \ , \tag{5.10}$$

niin $\tilde{x}[n] = x[n]$, kun $W = \pi$.

Diskreettin signaalin Fourier-muunnokseen ei liity Gibbsin ilmiötä.

5.3 Jaksollisten signaalien Fourier-muunnos

Kuten jatkuvillekin signaaleille jaksollisten diskreettien signaalien Fourier-muunnos voidaan ajatella taajuustasossa olevan impulssijonona.

Olkoon $x[n] = \mathrm{e}^{j\omega_0 n}$, jolloin sen Fourier-muunnos on taajuustasossa oleva impulssi kohdassa $\omega = \omega_0$. Diskreetin Fourier-muunnoksen täytyy lisäksi olla jaksollinen 2π:llä, eli myös kohdissa $\omega_0 \pm l2\pi$ täytyy olla impulssit.

Siispä $x[n]$:n Fourier-muunnos on

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \ , \tag{5.11}$$

Sijoittamalla tämä tulos kaavaan (5.7) saadaan

$$\frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\mathrm{e}^{j\omega}) \mathrm{e}^{j\omega n} \, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} \sum_{l=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega - \omega_0 - 2\pi l) \mathrm{e}^{j\omega n} \, d\omega \ . \tag{5.12}$$

Jokaisella 2π:n pituisella pätkällä on yksi impulssi yhtälön oikean puolen summauksessa. Jos integrointivälillä oleva pulssi on kohdassa $\omega_0 + 2\pi r$, niin tulokseksi lausekkeesta (5.12) saadaan $\mathrm{e}^{j\omega_0 n}$.

Jos jaksollisen signaalin (jakso N) Fourier-sarja esitys on

$$x[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} a_k \mathrm{e}^{jk(2\pi/N)n} \ , \tag{5.13}$$

niin sen Fourier-muunnos tulee muotoon

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi a_k \delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right) \ . \tag{5.14}$$

Jaksollisen signaalin Fourier-muunnos saadaan siis suoraan sen Fourier-sarjan kertoimien avulla.

5.4 Diskreetin signaalin Fourier-muunnoksen ominaisuuksia

Diskreetin muunnoksen ominaisuudet ovat hyvin samankaltaiset kuin jatkuvankin. Osa ominaisuuksista voidaan perustella myös suoraan Fourier-sarjojen ominaisuuksien avulla. Seuraavassa käyteään muunnokselle ja käänteismuunnokselle merkintöjä

$$\boxed{X(\mathrm{e}^{j\omega}) = \mathcal{F}\{x[n]\} \text{ ja } x[n]) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\mathrm{e}^{j\omega})\}\ .}$$

5.4.1 Jaksollisuus

Diskreettin signaalin Fourier-muunnos on aina jaksollinen

$$X(e^{j(\omega+2\pi)}) = X(\mathrm{e}^{j\omega})\ . \tag{5.15}$$

5.4.2 Lineaarisuus

Jos $\mathcal{F}\{x_1[n]\} = X_1(\mathrm{e}^{j\omega})$ ja $\mathcal{F}\{x_2[n]\} = X_2(\mathrm{e}^{j\omega})$, niin

$$\mathcal{F}\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aX_1(\mathrm{e}^{j\omega}) + bX_2(\mathrm{e}^{j\omega})\ . \tag{5.16}$$

5.4.3 Siirros ajan ja taajuuden suhteen

Jos $\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\mathrm{e}^{j\omega})$, niin

$$\mathcal{F}\{x[n-n_0]\} = \mathrm{e}^{-j\omega n_0} X(\mathrm{e}^{j\omega}) \tag{5.17}$$

ja

$$\mathcal{F}\left\{\mathrm{e}^{j\omega_0 n} x[n]\right\} = X(\mathrm{e}^{j(\omega-\omega_0)})\ . \tag{5.18}$$

Tulokset saadaan sijoittamalla $x[n-n_0]$ yhtälöön (5.4) ja sijoittamalla $X(\mathrm{e}^{j(\omega-\omega_0)})$ yhtälöön (5.7).

5.4.4 Kompleksikonjugaatti ja symmetria

Jos $\mathcal{F}\{x_1[n]\} = X_1(\mathrm{e}^{j\omega})$, niin

$$\mathcal{F}\{x^*[n]\} = X^*(\mathrm{e}^{-j\omega}) \ . \tag{5.19}$$

Jos $x[n]$ on reaalinen, niin

$$X(\mathrm{e}^{j\omega}) = X^*(\mathrm{e}^{-j\omega}) \ . \tag{5.20}$$

Tämän tuloksen perusteella $\mathrm{Re}\{X(\mathrm{e}^{j\omega})\}$ on parillinen funktio ja $\mathrm{Im}\{X(\mathrm{e}^{j\omega})\}$ on pariton. Samoin $X(\mathrm{e}^{j\omega})$:n moduli on parillinen funktio ja vaihekulma on pariton. Jos signaali jaetaan parilliseen ja parittomaan osaan (tämä voidaan aina tehdä), niin tällöin parillisen osan Fourier-muunnos on sama kuin $\mathrm{Re}\{X(\mathrm{e}^{j\omega})\}$ ja parittoman osan muunnos on $\mathrm{Im}\{X(\mathrm{e}^{j\omega})\}$.

5.4.5 Derivointi ja summaus

Olkoon $\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\mathrm{e}^{j\omega})$. Tällöin ensimmäiselle differenssille saadaan lineaarisuuden ja aikasiirrosominaisuuden perusteella

$$\mathcal{F}\{x[n] - x[n-1]\} = (1 - \mathrm{e}^{-j\omega})X(\mathrm{e}^{j\omega}) \ . \tag{5.21}$$

Signaalin

$$y[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} x[m] \tag{5.22}$$

muunnoksen voidaan olettaa kytköksen takia sisältävän jaon termillä $(1 - \mathrm{e}^{-j\omega})$. Lisäksi muunnokseen tulee perustasoon tai keskiarvoon liittyvä termi:

$$\mathcal{F}\left\{\sum_{m=-\infty}^{n} x[m]\right\} = \tag{5.23}$$

$$\frac{1}{1-\mathrm{e}^{-j\omega}} X(\mathrm{e}^{j\omega}) + \pi X(\mathrm{e}^{j0}) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k) \ .$$

5.4.6 Kääntäminen ajan suhteen

Olkoon $x[n]$ signaali, jonka spektri on $X(\mathrm{e}^{j\omega})$. Tarkastellaan $y[n] = x[-n]$ muunnosta $Y(\mathrm{e}^{j\omega})$. Kaavan (5.4) perusteella

$$Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[-n]\mathrm{e}^{-j\omega n} \ . \quad (5.24)$$

Sijoittamalla $m = -n$ saadaan

$$Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]\mathrm{e}^{-j(-\omega m)} = X(\mathrm{e}^{-j\omega}) \ , \quad (5.25)$$

eli

$$\mathcal{F}\{x[-n]\} = X(\mathrm{e}^{-j\omega}) \ . \quad (5.26)$$

5.4.7 Skaalaus ajan suhteen

Johtuen ajan diskreeteistä arvoista skaalaus ajan suhteen poikkeaa jatkuvien signaalien aikaskaalausesta. Jos yritetään ratkaista signaalia $x[an]$, joudutaan vaikeuksiin, mikäli a ei ole kokonaisluku. Jos a on ykkösestä poikkeava kokonaisluku, niin esim. $x[2n]$ ei 'nopeuta' alkuperäistä signaalia, sensijaan $x[2n]$ edustaa $x[n]$:n parillisia arvoja. Tulos on kuitenkin samankaltainen yhtälön (4.27) tuloksen kanssa.

Määritellään signaali

$$x_{(k)}[n] = \begin{cases} x[n/k], & \text{jos } n \text{ on } k\text{:n monikerta} \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases} \quad (5.27)$$

Signaali $x_{(k)}[n]$ voidaan ajatella $x[n]$:n hidastetuksi versioksi, jonka Fourier-muunnos tulee muotoon

$$X_{(k)}(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x_{(k)}[rk]\mathrm{e}^{-j\omega rk} \ . \quad (5.28)$$

Tuloksen saamiseksi on käytetty tietoa, että $x_{(k)}[n] = 0$, jollei n ei ole k:n monikerta, eli jollei $n = rk$. Lisäksi, koska $x_{(k)}[rk] = x[r]$, saadaan että $X_{(k)}(\mathrm{e}^{j\omega}) = X(\mathrm{e}^{jk\omega})$, joten

$$\mathcal{F}\{x_{(k)}[n]\} = X(\mathrm{e}^{jk\omega}) \ . \quad (5.29)$$

Signaalin levittäminen ja hidastaminen aikatasossa ($k > 1$) pakkaa signaalia taajuustasossa.

5.4.8 Derivointi taajuustasossa

Jälleen kerran, olkoon $\mathcal{F}\{x[n]\} = X(\mathrm{e}^{j\omega})$. Jos diskreetin Fourier-muunnoksen kaava (5.4) derivoidaan puolittain, saadaan

$$\frac{dX(e^{j\omega})}{d\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} -jnx[n]\mathrm{e}^{-j\omega n} \ . \tag{5.30}$$

Yhtälön oikea puoli on $-jnx[n]$:n Fourier-muunnos, joten kertomalla vielä puolittain j:llä saadaan

$$\mathcal{F}\{nx[n]\} = j\frac{dX(\mathrm{e}^{j\omega})}{d\omega} \ . \tag{5.31}$$

5.4.9 Parsevallin teoreema

Fourier-muunnosparille ($x[n]$, $X(\mathrm{e}^{j\omega})$ pätee

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} \left|X(\mathrm{e}^{j\omega})\right|^2 d\omega \ . \tag{5.32}$$

Tämä teoreema voidaan johtaa samalla tavalla kuin jatkuvien signaalienkin tulos.

Signaalin kokonaisenergia saadaan selville integroimalla sen energia taajuusyksikköä kohden ($\left|X(\mathrm{e}^{j\omega})\right|^2/2\pi$) yli yhden 2π-pituisen taajuusjakson.

Lauseketta $\left|X(\mathrm{e}^{j\omega})\right|^2$ kutsutaan signaalin *energiatiheysspektriksi.*

5.4.10 Konvoluutio-ominaisuus

Luvussa 4.5 käsiteltiin jatkuvien signaalien konvoluution (LTI-systeemien analyysi) ja Fourier-muunnoksen yhteyttä. Täsmälleen samanlainen tulos on myös voimassa diskreetille muunnokselle. Jos $y[n] = x[n] * h[n]$, niin

$$\underline{\mathcal{F}\{y[n]\} = Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = X(\mathrm{e}^{j\omega})H(\mathrm{e}^{j\omega}) \ .} \tag{5.33}$$

Tulos voidaan todistaa samaan tapaan kuin jatkuvien signaalienkin tulos.

Lisäksi voidaan sanoa, että systeemin taajuusvaste $H(\mathrm{e}^{j\omega})$ on sen impulssivasteen $h[n]$ Fourier-muunnos.

Kaikilla LTI-systeemeillä ei ole taajuusvastetta, esim. jos systeemin impulssivaste $h[n] = 2^n u[n]$, niin systeemin vaste sinimuotoisille sisäänmenoille ei pysy äärellisenä.

Tämä tarkoittaa sitä, että systeemin Fourier-muunnos $\mathcal{F}\{h[n]\}$ hajaantuu. Kuitenkin, jos systeemi on stabiili, niin sillä on äärellinen taajuusvaste.

5.4.11 Tulo-ominaisuus

Ominaisuus on samanlainen kuin luvussa 4.6 esitetty jatkuvien signaalien ominaisuus ja sitä voidaan soveltaa samoihin tarkoituksiin.

Olkoon $y[n] = x_1[n]x_2[n]$ ja $X_1(e^{j\omega})$ sekä $X_2(e^{j\omega})$ $x_1[n]$:n ja $x_2[n]$:n Fourier-muunnokset. Tällöin

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n]e^{-j\omega n} = \tag{5.34}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2[n]e^{-j(\omega-\theta)n}\right] d\theta \ .$$

Yhtälö on saatu sijoittamalla $x_1[n]$:n paikalle sen käänteismuunnosesitys.

Hakasulkulausekkeesta saadaan $X_2(e^{j(\omega-\theta)})$, joten

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})\, d\theta \ . \tag{5.35}$$

Yhtälö (5.35) tarkoittaa $X_1(e^{j\omega})$:n ja $X_2(e^{j\omega})$:n *jaksollista* konvoluutiota.

5.4.12 Kytkös diskreetin Fourier-muunnoksen tapauksessa

Jatkuvan muunnoksen tapauksessa yhtälöiden (4.7) ja (4.10) välillä oli selvä symmetria. Diskreetin muunnoksen tapauksessa yhtälöiden (5.4) ja (5.7) välillä ei ole symmetriaa: toinen on integraaliyhtälö ja toinen summalauseke. Kuitenkin diskreetin Fourier-sarjan yhtälöt (3.29) ja (3.32) ovat symmetrisiä.

Koska signaalin $x[n]$ Fourier-sarjan kertoimet a_k muodostavat itsekin jaksollisen jonon, voidaan tämä jono kehittää Fourier-sarjaksi. Fourier-sarjojen kytkös-ominaisuuden perusteella jonon a_k Fourier-sarjan kertoimet ovat $(1/N)x[-n]$.

Tarkastellaan kahta jaksollista jonoa, joiden jakso on N, ja joiden välillä on yhteys

$$f[m] = \frac{1}{N} \sum_{r=\langle N \rangle} g[r] \mathrm{e}^{-jr(2\pi/N)m} \ . \tag{5.36}$$

Jos tehdään muuttujan vaihdot $m = k$ ja $r = n$, saadaan

$$f[k] = \frac{1}{N} \sum_{n=\langle N \rangle} g[n] \mathrm{e}^{-jk(2\pi/N)n} \ . \tag{5.37}$$

Vertaamalla tätä yhtälöön (3.32), nähdään, että jono $f[k]$ vastaa signaalin $g[n]$ Fourier-sarjan kertoimia.

Vaihtoehtoisesti, jos $m = n$ ja $r = -k$, niin saadaan

$$f[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\langle N \rangle} g[-k] \mathrm{e}^{jk(2\pi/N)n} \ . \tag{5.38}$$

Vertaamalla tätä yhtälöön (3.29) havaitaan $(1/N)g[-k]$-kertoimien olevan jonon $f[n]$ Fourier-sarjan kertoimia.

Tämä tulos tarkoittaa sitä, että kaikilla diskreettien Fourier-sarjojen ominaisuuksilla on kytkös-ominaisuus, esim. jos

$$\mathcal{FS}\{x[n - n_0]\} = a_k \mathrm{e}^{-jk(2\pi/N)n_0} \ , \tag{5.39}$$

niin

$$\mathcal{FS}\left\{\mathrm{e}^{jm(2\pi/N)n} x[n]\right\} = a_{k-m} \ . \tag{5.40}$$

Yhtälöissä $\mathcal{FS}\{\cdot\}$ tarkoittaa Fourier-sarjan muodostamista.

5.4.13 Kytkös diskreetin Fourier-muunnoksen ja jatkuvien signaalien Fourier-sarjojen välillä

Vertaamalla jatkuvan signaalin yhtälöiden (3.10) ja (3.13) Fourier-sarjaesitystä yhtälöiden (5.4) ja (5.7) kuvaamaan diskreettiin Fourier-muunnospariin, havaitaan Fourier-sarjan kertoimien esityksen (3.13) olevan hyvin samankaltainen kuin diskreetti käänteismuunnos (5.7), ja vastaavasti diskreetin signaalin Fourier-muunnos (5.4) on hyvin samankaltainen kuin jatkuvan signaalin Fourier-sarja esitys (3.10).

Diskreetti Fourier-muunnos $X(\mathrm{e}^{j\omega})$ voidaan tulkita Fourier-sarjaksi, jonka painokertoimia ovat termit $x[-n]$.

5.4.14 Vakiokertoiminen differenssiyhtälöesitys

Yleinen vakiokertoiminen differenssiyhtälö, joka kytkee jonot $y[n]$ ja $x[n]$ LTI-systeemissä toisiinsa on muotoa

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k] \ . \tag{5.41}$$

Systeemin taajuusvaste (impulssivasteen Fourier-muunnos) voidaan ratkaista käyttäen diskreetin Fourier-muunnoksen ominaisuuksista konvoluutiota, lineaarisuutta ja aikasiirrosta. Olkoot $X(\mathrm{e}^{j\omega})$, $Y(\mathrm{e}^{j\omega})$ ja $H(\mathrm{e}^{j\omega})$ jonojen $x[n]$, $y[n]$ ja $h[n]$ Fourier-muunnokset. Konvoluutiotuloksen (5.33) perusteella saadaan

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{X(\mathrm{e}^{j\omega})}{Y(\mathrm{e}^{j\omega})} \ . \tag{5.42}$$

Ottamalla Fourier-muunnokset yhtälön (5.41) molemmin puolin ja käyttämällä em. ominaisuuksia, saadaan

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k \mathrm{e}^{-jk\omega}}{\sum_{k=0}^{N} a_k \mathrm{e}^{-jk\omega}} \ . \tag{5.43}$$

Vertaamalla yhtälöitä (5.43) ja (4.43), havaitaan, että jatkuvassa tapauksessa $H(e^{j\omega})$ on sellaisten polynomien suhde, joissa muuttujana on $j\omega$, mutta diskreetissä tapauksessa polynomien muuttujana on $\mathrm{e}^{-j\omega}$.

Diskreetin LTI-systeemin taajuusvaste saadaan ratkaistua, kun sen yhtälön (5.41) mukainen N:nnen kertaluvun differenssiyhtälö tunnetaan.

6 Signaalien aika- ja taajuustason ominaisuuksista

LTI-systeemien taajuustason esitys on kätevämpi kuin aikatason esitys, koska aikatason differentiaali- ja differenssiyhtälöt ja konvoluutio-operaatiot ovat Fourier-tasossa yhteen- vähennys- ja kertolaskuoperaatiota. Myöskin erilaisten suotimien toiminnan kuvaaminen Fourier-tasossa on hyvin havainnollista.

Monissa sovelluksissa systeemin toiminnalle halutaan asettaa sekä taajuustason, että aikatason vaatimuksia; hyvin usein nämä vaatimukset ovat ristiriidassa keskenään ja joudutaan tekemään valintoja toivottujen ominaisuuksien välillä.

Systeemien suunnittelun kannalta on tärkeää tiedostaa molempien tasojen vaatimukset, sekä näiden välinen yhteys. Tässä luvussa esitellään tärkeimpiä signaaleihin liittyviä aika- ja taajuustason ominaisuuksia.

6.1 Fourier-muunnoksen moduli-vaihe -esitys

Fourier-muunnos on luonteeltaan kompleksinen, ja se voidaan esittää jatkuville signaaleille muodossa

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|\, e^{j\angle X(j\omega)} , \tag{6.1}$$

ja diskreeteille signaaleille muodossa

$$X(e^{j\omega}) = \left|X(e^{j\omega})\right| e^{j\angle X(e^{j\omega})} . \tag{6.2}$$

Tekijä $|X(j\omega)|$ kuvaa signaalin $x(t)$ energiatiheyttä, eli sitä, kuinka paljon signaalissa on tietyllä taajuudella ω energiaa.

Vaihekulma $\angle X(j\omega)$ kuvaa signaalin eri taajuuskomponenttien keskinäisten vaiheiden suhdetta. Signaalin $x(t)$ ulkomuoto riippuu hyvin paljon sen muodostavien signaalien keskinäisistä vaiheista.

Esim. signaalin

$$x(t) = 1+\frac{1}{2}\cos(2\pi t+\phi_1)+\cos(4\pi t+\phi_2)+\frac{2}{3}\cos(6\pi t+\phi_3)$$

muoto on erilainen eri ϕ:n arvoilla.

Pienet vaihemuutokset eivät heikennä esim. puheen ymmärrettävyyttä, mutta esim. signaalin kääntö ajan suhteen (nauhan soittaminen takaperin) tarkoittaa Fourier-tasossa signaalin vaiheen etumerkin vaihtamista:

$$\mathcal{F}\{x(-t)\} = X(-j\omega) = |X(j\omega)|\,\mathrm{e}^{-j\angle X(j\omega)} \ . \qquad (6.3)$$

6.2 LTI-systeemien moduli-vaihe -esitys

LTI-systeemi kuvataan Fourier-tasossa tulona $Y(j\omega) = H(j\omega)X(j\omega)$, missä $H(j\omega)$ on systeemin taajuusvaste. Esitysmuodon perusteella LTI-systeemi muuttaa jokaisen taajuuskomponentin kompleksista amplitudia.

Tarkastelemalla erikseen modulia ja vaihetta saadaan modulille

$$|Y(j\omega)| = |H(j\omega)||X(j\omega)| \qquad (6.4)$$

ja vaiheelle

$$\angle Y(j\omega) = \angle H(j\omega) + \angle X(j\omega) \ . \qquad (6.5)$$

Yhtälön (6.4) mukaan LTI-systeemi skaalaa signaaliin eri taajuuskomponentteja taajuusvasteensa mukaisilla kertoimilla. Tästä syystä $|H(j\omega)|$:aa kutsutaan systeemin *vahvistukseksi*. Vaiheet taas summautuvat yhtälön (6.5) mukaisesti; $\angle H(j\omega)$:aa kutsutaan systeemin *vaihesiirrokseksi*.

6.2.1 Lineaarinen ja epälineaarinen vaihe

Jos vaihesiirros riippuu lineaarisesti taajuudesta ω, niin tällainen systeemi aiheuttaa signaaliin aikasiirroksen.

Esim. jos systeemin taajuusvaste $H(j\omega) = \mathrm{e}^{-j\omega t_0}$, niin $|H(j\omega)| = 1$ ja $\angle H(j\omega) = -\omega t_0$ ja systeemin ulostulo $y(t) = x(t - t_0)$.

Diskreeteissä systeemeissä vaiheen kulmakertoimen on oltava kokonaisluku, jotta signaalin siirros ajan suhteen osuisi kohdakkain näytepaikkojen kanssa. Jos näin ei ole, niin tällöin signaalin verhokäyrän voidaan ajatella siirtyvän ajan suhteen ja tämä aiheuttaa näytteiden arvojen muuttumisen.

Lineaarinen vaihesiirros säilyttää signaalin muodon. Jos vaihemuutos on epälineaarinen, niin tällöin signaalin muoto muuttuu.

6.2.2 Ryhmäviive

Vaihevaste voidaan aina ajatella lineaariseksi hyvin kapeakaistaiselle signaalille. Oletaan, että signaali keskittyy Fourier-tasossa taajuuden $\omega = \omega_0$ ympärille, tällöin systeemin vaihetta tällä kaistalla voidaan approksimoida lineaarisella vaiheella

$$\angle H(j\omega) \approx -\phi - \omega\alpha \ , \tag{6.6}$$

jolloin systeemin ulostulolle saadaan

$$Y(j\omega) = X(j\omega)|H(j\omega)|\mathrm{e}^{-j\phi}\mathrm{e}^{-j\omega\alpha} \ . \tag{6.7}$$

Kapeakaistaisen signaalin modulia muokataan siis tekijällä $|H(j\omega)|$, kerrotaan kompleksisella vakiolla $\mathrm{e}^{-j\phi}$ ja kerrotaan lineaarisella vaihetermillä $\mathrm{e}^{-j\omega\alpha}$. Tämä lineaarinen termi vastaa signaalin viivästämistä tekijllä α – tätä tekijää kutsutaan *ryhmäviiveeksi* taajuudella $\omega = \omega_0$.

Ryhmäviive on vastakkaismerkkinen systeemin vaihevasteen kulmakertoimelle ja se määritellään derivaattana

$$\tau(\omega) = -\frac{d}{d\omega}\{\angle H(j\omega)\} \ . \tag{6.8}$$

Ryhmäviiveen määrittely diskreeteille systeemeille on vastaavanlainen; derivaattaa joudutaan kuitenkin approksimoimaan differensseillä.

6.2.3 Logaritminen moduli ja Bode-kuvaajat

Fourier-muunnoksen modulille käytetään usein logaritmista esitystä, koska tällöin

$$\log|Y(j\omega)| = \log|(H(j\omega)| + \log|X(j\omega)| \ , \tag{6.9}$$

eli systeemin taajuusvaste saadaan logaritmien summana. Lisäksi logaritminen skaala korostaa pieniä yksityiskohtia.

Logaritmisenä skaalana käytetään desibelejä [dB], jotka on määritelty $20\log_{10}\{\cdot\}$. Taajuusvasteen arvo 1 tarkoittaa 0 dB, 20 dB:tä tarkoittaa kymmenkertaista vahvistusta ja -20 dB:tä vaimennusta tekijällä 10.

Jatkuvien signaalien kanssa käytetään usein myös logaritmistä taajuuasteikkoa. Kun $20\log_{10}|H(j\omega)|$ ja $\angle H(j\omega)$ esitetään $\log_{10}(\omega)$:n funktiona, puhutaan *Bode-kuvaajista.*

6.3 Ideaalisen taajuussuotimen aikatason ominaisuudet

Fourier-sarjojen yhteydessä esiteltiin ideaaliset taajuustason suotimet, jotka läpäisevät haluttuja taajuuksia ja poistavat signaalista kaikki muut taajuudet.

Ideaalisten alipäästösuotimien määrittelyt jatkuville ja diskreeteille signaaleille olivat

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} \tag{6.10}$$

ja

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & |\omega| \leq \omega_c \\ 0, & \omega_c < |\omega| \leq \pi \end{cases} . \tag{6.11}$$

Näiden ideaalisten alipäästösuotimien impulssivasteet ovat muotoa

$$h(t) = \frac{\sin \omega_c t}{\pi t} \quad \text{ja} \quad h[n] = \frac{\sin \omega_c n}{\pi n} . \tag{6.12}$$

Jos taajuusvasteisiin liittyy lineaarinen vaihe, niin tämä aiheuttaa aiemmin kuvatun mukaisen signaalin siirtymän ulostulossa.

Ideaalisten alipäästösuodinten askelfunktiovasteet $s(t)$ ja $s[n]$ ovat muotoa

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(\tau)\, d\tau \quad \text{ja} \quad s[n] = \sum_{m=-\infty}^{n} h[m] . \tag{6.13}$$

Näihin askelfunktiovasteisiin liittyy värähtelyä, joka aiheutuu suodattimien jyrkkästä (ideaalisesta) katkaisusta. Värähtelyä kutsutaan *soimiseksi.*

Koska suodattimien taajuusvasteen ensimmäiset nollakohdat ovat paikoissa $-\omega_c$ ja $+\omega_c$, saadaan suodattimen askefunktiovasteen *nousuajalle* aikatasossa arvio erotuksesta $\pi/\omega_c - (-\pi/\omega_c) = 2\pi/\omega_c$, eli nousuaika on käänteen verrannollinen alipäästösuotimen taajuuskaistan leveyteen.

6.4 Suodattimien ominaisuuksia

Haluttaessa erottaa kaksi signaalia toisistaan voidaan joutua tilanteeseen, jossa signaalien spektrit taajuustasossa ovat osittain päällekkäin. Suodatuksen kannalta on tällöin parempi, että suotimessa ei ole jyrkkää rajaa taajuusalueessa, vaan siirtyminen estokaistalta päästökaistalle tapahtuu vähitellen.

Ideaalisten alipäästösuotimien impulssivasteista (kaavat (6.12):ssa) voidaan päätellä, että suotimet eivät ole kausaalisia. Kuitenkin reaaliaikaisille systeemeille kausaalisuus on välttämätöntä, joten suotimesta on tehtävä kausaalisuusehdon täyttävä approksimaatio.

Käytännössä myös suodinten toteutus edellyttää sitä, että siirtyminen esto- ja päästökaistojen välillä toteutettaan suunnitteluvaiheessa jollakin siirtymäfunktiolla.

Sitä modulaatiota, jolla suotimen taajuusvasteen modulin päästökaistan amplitudi poikkeaa ykkösestä, kutsutaan *päästökaistan rippeliksi.* Vastaavasti estokaistan poikkeamaa nollasta kutsutaan *estokaistan rippeliksi.*

Päästökaistan reunataajuuden ω_p ja estokaistan reunataajuuden ω_s välistä aluetta kutsutaan *siirtymäkaistaksi.*

Taajuustasossa suotimen taajuusvasteen vaiheen olisi hyvä olla lineaarinen tai ainakin lähes lineaarinen, jotta signaalin muoto säilyisi systeemissä.

Aikatason ominaisuuksien kuvaamisen käytetään usein systeemin vastetta askelfunktiolle, jonka avulla saadaan selville systeemin nousuaika t_r. Muita tärkeitä parametrejä ovat soimisen amplitudi ja soimisen vaimeneminen alle jonkin ennalta asetetun tavoitetason.

6.5 Ensimmäisen ja toisen asteen jatkuvat systeemit

Monia fysikaalisia systeemejä voidaan mallintaa ensimmäisen ja toisen asteen differentiaaliyhtälöillä. Korkeamman asteen systeemit voidaan usein kuvata ensimmäisen ja toisen asteen systeemien avulla. Seuraavassa esitetään lyhyt katsaus ensimmäisen ja toisen asteen systeemien ominaisuuksiin.

6.5.1 Ensimmäisen asteen jatkuvat systeemit

Ensimmäisen asteen systeemiä kuvataan differentiaaliyhtälöllä

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t) \ , \tag{6.14}$$

missä τ on positiivinen luku. Systeemin taajuusvaste on muotoa

$$H(j\omega) = \frac{1}{j\omega\tau + 1} \ , \tag{6.15}$$

ja sen impulssivaste on

$$h(t) = \frac{1}{\tau} \mathrm{e}^{-t/\tau} u(t) \ , \tag{6.16}$$

sekä askelfunktiovaste

$$s(t) = h(t) * u(t) = [1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}] u(t) \ . \tag{6.17}$$

Kun systeemin *aikavakio* τ pienenee, vaimenee systeemin impulssivaste nopeammin ja systeemin nousuaika lyhenee.

Systeemin Bode-kuvaajaa voidaan approksimoida helposti, sillä yhtälöstä (6.15) saadaan

$$20 \log_{10} |H(j\omega)| = -10 \log_{10}[(\omega\tau)^2 + 1] \ , \tag{6.18}$$

josta voidaan päätellä, että kun $\omega\tau \ll 1$, niin moduli (logaritmisenä) on lähes nolla. Kun $\omega\tau \gg 1$, niin moduli on $\log_{10}(\omega)$:n lineaarinen funktio.

Toisin sanoen ensimmäisen asteen systeemin asymptoottiset rajat matalilla ja korkeilla taajuuksilla ovat suoria, jotka leikkaavat pisteessä $\omega = 1/\tau$. Tässä pisteessä logaritmisellä asteikolla $(\omega\tau)^2 = 1$ ja

$$20 \log_{10} \left| H\left(j\frac{1}{\tau}\right) \right| = -10 \log_{10}(2) \simeq -3 \text{ [dB]} \ . \tag{6.19}$$

Tämän vuoksi pistettä $\omega = 1/\tau$ kutsutaan usein -3 dB:n pisteeksi.

Myös vaiheelle $\angle H(j\omega)$ saadaan approksimaatio

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}(\omega\tau) \tag{6.20}$$

$$\simeq \begin{cases} 0, & \omega \leq 0.1\tau \\ -(\pi/4)[\log_{10}(\omega\tau) + 1], & 0.1\tau \leq \omega \leq 10/\tau \\ -\pi/2, & \omega \geq 10/\tau \end{cases}$$

Approksimaatio on lineaarinen $\log_{10}(\omega)$:n funktiona välillä $[0.1/\tau,\ 10/\tau]$ ja pisteessä $1/\tau$ vaihe saa arvon $-\pi/4$.

Aikatasossa $\tau h(t)$ on t/τ:n funktio ja taajuustasossa $H(j\omega)$ on $\omega\tau$:n funktio, joten τ:n muuttaminen skaalaa signaalia sekä aika- että taajuustasossa. Vakiota τ kutsutaankin systeemin *aikavakioksi.*

6.5.2 Toisen asteen jatkuvat systeemit

Toisen asteen differentiaaliyhtälö on muotoa

$$\frac{d^2\,y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n\frac{d\,y(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = \omega_n^2 x(t)\ . \qquad (6.21)$$

Tällainen toisen asteen DY on tyypillinen monille fysikaalisille systeemeille, kuten RLC-piireille ja mekaanisille systeemeille, joissa on jousia, massoja ja joku systeemin toimintaa vaimentava tekijä.

Toisen asteen systeemin taajuusvaste on

$$H(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2}\ . \qquad (6.22)$$

Systeemin impulssivasteen voidaan osoittaa olevan verrannollinen $\omega_n t$:hen ja taajuusvasteen verrannollinen ω/ω_n:ään, joten ω_n:n muuttaminen vastaa aika- ja taajuusskaalausta.

Parametri ζ on systeemin *vaimennustekijä* ja parametri ω_n on systeemin *vaimentamaton, luonnollinen taajuus.*

Systeemin vaihevasteelle saadaan lauseke

$$\angle H(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{2\zeta(\omega/\omega_n)}{1-(\omega/\omega_n)^2}\right)\ , \qquad (6.23)$$

jonka approksimaatio on muotoa

$$\angle H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \le 0.1\omega_n \\ -\frac{\pi}{2}\left[\log_{10}\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)+1\right], & 0.1\omega_n \le \omega \le 10\omega_n \\ -\pi, & \omega_n \ge 10\omega_n \end{cases}\ . \qquad (6.24)$$

6.6 Ensimmäisen ja toisen asteen diskreetit systeemit

Kaikki diskreetit LTI-systeemit voidaan esittää ensimmäisen ja toisen asteen differenssiyhtälöiden avulla.

6.6.1 Ensimmäisen asteen diskreetit systeemit

Olkoon LTI-systeemin kuvaus muotoa

$$y[n] - ay[n-1] = x[n] \ . \tag{6.25}$$

Tällaisen systeemin taajuusvaste on

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a\mathrm{e}^{-j\omega}} \ , \tag{6.26}$$

impulssivaste

$$h[n] = a^n u[n] \tag{6.27}$$

ja askelfunktiovaste

$$s[n] = h[n] * u[n] = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} u[n] \ . \tag{6.28}$$

Vakion a merkitys on sama kuin vakion τ jatkuvien systeemien tapauksessa: pienillä a:n arvoilla systeemin impulssivaste vaimenee nopeasti ja systeemin nousuaika on lyhyt.

Systeemin taajuusvasteen moduli on

$$|H(\mathrm{e}^{j\omega}| = \frac{1}{(1 + a^2 - 2a\cos\omega)^{1/2}} \tag{6.29}$$

ja vaihe

$$\angle H(\mathrm{e}^{j\omega}) = -\tan^{-1}\left[\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right] \ . \tag{6.30}$$

Modulin perusteella systeemin voidaan sanoa vaimentavan korkeita taajuuksia, kun $a > 0$ ja kun $a < 0$, systeemi vahvistaa korkeita taajuuksia.

6.6.2 Toisen asteen diskreetit systeemit

Kausaalinen toisen asteen LTI-systeemi voidaan kuvata yhtälöllä

$$y[n] - 2r\cos\theta\, y[n-1] + r^2 y[n-2] = x[n] \ , \qquad (6.31)$$

missä $0 < r < 1$ ja $0 \leq \theta \leq \pi$. Systeemin taajuusvaste on muotoa

$$H(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta \mathrm{e}^{-j\omega} + r^2 \mathrm{e}^{-j2\omega}} \qquad (6.32)$$

ja systeemin impulssivaste tulee muotoon

$$h[n] = r^n \frac{\sin[(n+1)\theta]}{\sin\theta} u[n] \ . \qquad (6.33)$$

Systeemin impulssivasteen vaimeneminen riippuu tekijästä r; tekijä θ puolestaan määrää systeemin värähtelytaajuuden. (Jos $\theta = 0$, niin systeemin impulssivaste ei värähtele ollenkaan, ja jos $\theta = \pi$, niin värähtely on hyvin nopeaa).

7 Näytteenotto

Tietyillä edellytyksillä jatkuva signaali voidaan kuvata täydellisesti tasavälein otettujen näytteiden avulla. (Elokuvassa on 24 yksittäistä kuvaa sekunnin aikajaksoa kohden, tämä riittää luomaan vaikutelman jatkuvasta liikkeestä. Tulostimet tekevät periaatteessa vain pisteitä, mutta kun niitä on riittävän tiheään saadaan vaikutelma jatkuvasta pinnasta.)

Näytteenotto mahdollistaa jatkuvien signaalien digitaalisen käsittelyn: muutetaan jatkuva signaali näytteenotolla diskreetiksi, käsitellään signaalia ja palautetaan se takaisin jatkuvaksi.

7.1 Näytteenottoteoreema

Tasavälein oleva näytejono pystyy kuvaamaan useaa eri signaalia, kunhan signaalien arvot ovat samat näytepisteissä ($x_1(kT) = x_2(kT) = \ldots$).

Jos signaali on kuitenkin *kaistarajoitettu*, eli sillä on joku taajuusalue, jolla kaikki sen taajuudet ovat, ja näytteitä otetaan riittävän tiheästi, niin tällöin näytteet voivat kuvata signaalin yksikäsitteisesti.

7.1.1 Näytteenotto impulssijonon avulla

Näytteenottoa voidaan mallintaa impulssijonon avulla: muodostetaan tasavälinen impulssijono $p(t)$ ja kerrotaan tällä signaali, jolloin saadaan tuloksena tasavälinen näytejono signaalista. Jaksolista impulssijonoa $p(t)$ kutsutaan *näytteenottofunktioksi*, sen jakso T on *näytteenottoväli* ja
$\omega_s = 2\pi/T$ on *näytteenottotaajuus*. Aikatasossa näytteenottoa kuvaa yhtälö

$$x_p(t) = x(t)p(t) \ , \tag{7.1}$$

missä

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) \ . \tag{7.2}$$

Impulssifunktion ominaisuuksien perusteella signaali

$$x_p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT) \ . \tag{7.3}$$

Fourier-muunnoksen tulo-ominaisuuden perusteella tiedetään, että

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\theta)P(j(\omega - \theta)\, d\theta \ . \tag{7.4}$$

Näytteenottofunktion Fourier-muunnos on puolestaan muotoa

$$P(j\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \ . \tag{7.5}$$

Koska konvoluutio impulssifunktion kanssa vain siirtää signaalia, saadaan yhtälöstä (7.4)

$$X_p(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\omega - k\omega_s)) \ . \tag{7.6}$$

Näytejonon $x_p(t)$ Fourier-muunnos $X_p(j\omega)$ on siis jaksollinen funktio, joka on summa alkioista $(1/T)X(j\omega)$ siirrettynä taajuuden suhteen.

Olkoon ω_M signaalin $x(t)$ suurin taajuus. Tällöin, jos $\omega_M < (\omega_s - \omega_M)$, niin siirretyt signaalit $X(j\omega)$ eivät mene päällekkäin taajuustasossa, ja signaali $x(t)$ saadaan $x_p(t)$:stä alipäästösuodatuksella.

Näytteenottoteoreema: Olkoon $x(t)$ kaistarajoitettu signaali s.e. $X(j\omega) = 0$ kun $|\omega| > \omega_M$. Tällöin $x(t)$ on yksikäsitteisesti määritelty näytteidensä $x(nT)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) avulla, jos $\omega_s > 2\omega_M$ ($\omega_s = 2\pi/T$).

Signaali $x(t)$ saadaan rekonstruoitua muodostamalla impulssijono, jossa näytteiden arvot ovat ja suodattamalla tämä impulssijono ideaalisella alipäästösuotimella, jonka katkaisutaajuus on välillä $[\omega_M, \omega_s - \omega_M]$.

Näytteenottotaajuutta $2\omega_M$ kutsutaan usein *Nyquistin taajuudeksi.*

Käytännössä ideaalinen suodin on korvattava suotimella, joka mahdollisimman hyvin täyttää ehdot $|H(j\omega)| \simeq 1$ kun $|\omega| < \omega_m$ ja $|H(j\omega)| \simeq 0$ kun $|\omega| > \omega_s - \omega_M$.

7.1.2 Tason säilyttävä näytteenotto

Näytteenottoteoreema on helpointa selittää impulssifunktioiden avulla. Käytännössä tällaisten kapeiden pulssien, joiden amplitudi olisi suuri, tekeminen ja samalla signaalin rekonstruoint on vaikeaa. Siksi usein näytteenotossa muodostetaan ns. *tason säilyttävä signaali* $x_0(t)$, joka tarkoittaa sitä, että $x(t)$:stä otetaan näyte, joka säilytetään seuraavaan näytteenottohetkeen asti. Signaali saadaan tässäkin menettelyssä palautettua alkuperäiseen muotoonsa alipäästösuodatuksella, mutta suotimen taajuusvasteen moduli ei enää ole vakio.

Signaali $x_0(t)$ on sellaisen LTI-systeemin, jonka impulssivaste on näytteenottovälin T levyinen kanttipulssi, vaste impulssifunktiojonolle. Signaalin $x(t)$ rekonstruointi signaalista $x_0(t)$ voidaan ajatella suodatuksena, jossa signaali ajetaan sellaisen LTI-systeemin, jonka impulssivaste on $h_r(t)$ ja taajuusvaste $H_r(j\omega)$. Nyt $H_r(j\omega)$:n ulostulon $r(t)$ pitää olla sama kuin alkuperäinen signaali $x(t)$. Tämä tarkoittaa sitä, että sarjaankytkettyjen systeemien $h_0(t)$ ja $h_r(t)$ pitää muodostaa ideaalinen alipäästösuodin $H(j\omega)$.

$H_0(j\omega)$ on $T/2$:lla siirretty laatikkofunktion Fourier-muunnos

$$H_0(j\omega) = \mathrm{e}^{-j\omega T/2}\left[\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}\right] , \qquad (7.7)$$

ja koska asetetun ehdon mukaan on oltava $H(j\omega) = H_0(j\omega)H_r(j\omega)$, niin

$$H_r(j\omega) = \frac{\mathrm{e}^{j\omega T/2}H(j\omega)}{\frac{2\sin(\omega T/2)}{\omega}} . \qquad (7.8)$$

Tällaisen suotimen katkaisutaajuus on pisteessa $\omega = \omega_s/2$ ja sen vaihe on lineaarinen.

7.2 Signaalin rekonstruointi interpoloinnin avulla

Jatkuvan signaalin sovittamista näytejoukkoon kutsutaan *interpolaatioksi.* Edellisessä luvussa kuvattu tason säilyttäminen on alimman asteen interpolaatio, seuraava (ensimmäisen asteen interpolaartio) on suoran piirtäminen datapisteiden välille. Korkeamman asteen interpolaatioissa datapisteistöön sovitetaan paikallisesti joko korkeamman asteen polynomeja tai muita funktioita.

Signaalin rekonstruointi voidaan tulkita interpolaatioksi. Tarkastellaan alipäästösuotimen ulostuloa:

$$x_r(t) = x_p(t) * h(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)h(t-nT) . \qquad (7.9)$$

Yhtälö (7.9) kertoo, kuinka jatkuva signaali voidaan sovittaa pisteisiin $x(nT)$, eli yhtälö (7.9) kuvaa interpolaatiota. Ideaalisen alipäästösuotimen impulssivaste

$$h(t) = \frac{\omega_c T \sin(\omega_c t)}{\pi\omega_c t} , \qquad (7.10)$$

joten

$$x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\frac{\omega_c T}{\pi}\frac{\sin\left(\omega_c(t-nT)\right)}{\omega_c(t-nT)} . \qquad (7.11)$$

Tällaista interpolaatiota, jossa käytetään sinc-funktiota, kutsutaan *kaistarajoitetuksi interpolaatioksi.*

Suotimen poikkeminen ideaalisesta alipäästösuotimesta tarkoittaa interpoloinnin kannalta yksinkertaisempien funktioiden käyttöä signaalin rekonstruoinnissa.

Esim. tason säilyttävä näytteenotto vastaa interpolointia, jossa yhtälön (7.10) $h(t)$ on korvattu laatikkoimpulssivasteella $h_0(t)$. Impulssivaste $h_0(t)$ edustaa sitä $h(t)$:n approksimaatiota, jolla näytejonosta $x_0(nT)$ saadaan rekonstruoitua signaali $x(t)$.

Lineaariseen interpolaatioon liittyvä impulssivaste on kolmio $h_1(t) = 1 - |t|$, $|t| < 1/T$. Tämän systeemin taajuusvaste on

$$H(j\omega) = \frac{1}{T}\left[\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega/2}\right]^2 . \tag{7.12}$$

7.3 Aliasing-ilmiö

Jos näytteitä otetaan signaalista liian vähän, eli $\omega_s < 2\omega_M$, niin tällöin signaalin $x(t)$ spektri $X(j\omega)$ ei enää toistu täydellisenä $X_p(j\omega)$:ssa ja signaalia ei saada palautettua alkuperäiseksi alipäästösuodatuksella. Tätä ilmiötä, jossa yhtälön (7.6) mukaisesti spektrit $X_p(j\omega)$ summautuvat päällekkäin, kutsutaan *aliasing- eli laskostumisilmiöksi.* Ilmiö johtuu liian vähäisestä näytteenotosta.

Kun laskostumista tapahtuu, niin alkuperäinen taajuus ω_0 korvautuu signaalissa erotustaajuudella $\omega_s - \omega_0$. Lisäksi ilmiöön liittyy signaalin vaiheen etumerkin muuttuminen, eli vaiheen kääntyminen ympäri.

Esim. sopivalla nopeudella pyörivä puolallinen pyörä näyttää pyörivän väärään suuntaan johtuen aliasing-ilmiöstä.

7.4 Jatkuvien signaalien diskreetti käsittely

Monissa sovelluksissa jatkuva signaali kannattaa muuntaa diskreetiksi, koska silloin signaalin käsittelyyn voidaan käyttää digitaalitekniikkaan perustuvia erikoisprosessoreita tai tietokoneita. Tällöin signaalin käsittely muodostaa ketjun

$$x_c(t) \rightarrow \boxed{\text{Muunnos}} \xrightarrow{x_d[n]} \boxed{\text{Diskreetti systeemi}} \xrightarrow{y_d[n]}$$

$$\boxed{\text{Käänteismuunnos}} \rightarrow y_c(t)$$

Muunnosta $x(t) \rightarrow x_d[n]$ merkitään lyhenteellä C/D (Continuous-to-Discrete-time conversion) ja käänteismuunnosta lyhenteellä D/C (Discrete-time to Continuous-time conversion).

Operaatio D/C tarkoittaa interpolaatiota jonka tuloksena saatava jatkuvan signaalin $y_c(t)$ näytteitä ovat $y_d[n]$:t: $y_d[n] = y_c(nT)$.

Laitteita, jolla C/D- ja D/C-muunnokset tehdään, kutsutaan vastaavasti AD- tai DA-muuntimiksi.

Näytejonoa $x_p(t)$, jonka näytteenottoväli on T, vastaa diskreetti signaali $x_d[n]$, jonka arvot ovat samat kuin $x_p(t)$:n, mutta muuttuja n on riippumaton.

Fourier-tasossa tarkasteltuna

$$X_p(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\mathrm{e}^{-j\omega nT} \ . \tag{7.13}$$

Diskreetin jonon $x_d[n]$ Fourier-muunnos on puolestaan

$$X_d(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_c(nT)\mathrm{e}^{-j\Omega n} \ , \tag{7.14}$$

missä selvyyden vuoksi diskreettiin signaaliin liittyvää taajuutta on merkitty Ω:lla.

Fourier-muunnosten välinen yhteys on siis seuraavanlainen

$$X_d(\mathrm{e}^{j\Omega}) = X_p(j\Omega/T) \ . \tag{7.15}$$

Yhtälöä (7.6) vastaava diskreetti muoto on

$$X_d(\mathrm{e}^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_c\left(j\Omega - 2\pi k)/T\right) \ . \tag{7.16}$$

Fourier-muunnos $X_d(\mathrm{e}^{j\Omega})$ on taajuuden suhteen skaalattu versio $X_p(j\omega)$:sta: $\Omega = \omega T$.

Spektri $Y_d(\mathrm{e}^{j\Omega})$ on signaalin spektrin ja systeemin taajuusvasteen tulo: $Y_d(\mathrm{e}^{j\Omega}) = X_d(\mathrm{e}^{j\Omega})H_d(\mathrm{e}^{j\Omega})$. Muunnos $Y_d(\mathrm{e}^{j\Omega})$:sta $Y_c(j\omega)$:ksi vaatii taajuuden skaalauksen ja alipäästösuodatuksen.

Kokonaisuudessaan signaalin muuntaminen diskreetiksi, sen käsittely ja palauttaminen takaisin jatkuvaksi signaaliksi vastaa LTI-systeemiä, jonka taajuusvaste

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} H_d(\mathrm{e}^{j\omega T}), & |\omega| < \omega_s/2 \\ 0, & |\omega| > \omega_s/2 \end{cases} \ , \tag{7.17}$$

eli jatkuvan systeemin taajuusvaste on diskreetin systeemin taajuusvasteen yksi jakso.

7.4.1 Diskreetti derivaattori

Jatkuvan derivaattorin taajuusvaste $H_c(j\omega) = j\omega$ ja tämän kaistarajoitettu vastine on

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} j\omega, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & |\omega| > \omega_c \end{cases} . \tag{7.18}$$

Jos näytteenottotaajuus $\omega_s = 2\omega_c$, niis vastaava diskreetti siirtofunktio on

$$H_d(\mathrm{e}^{j\Omega}) = j\left(\frac{\Omega}{T}\right), \quad |\Omega| < \pi . \tag{7.19}$$

Tätä vastaava diskreetti aikatason siirtofunktio $h_d[n]$ tuottaa signaalin $x_c(t)$ derivaatan systeemin ulostulosignaalina $y_c(t)$.

7.4.2 Diskreetti viive

Tarkastellaan seuraavassa signaalin digitaalista viivästämistä. Olkoon ulostulon ja kaistarajoitetun sisäänmenon välillä yhteys

$$y_c(t) = x_c(t - \Delta) , \tag{7.20}$$

missä Δ edustaa viivettä. Aikasiirrosominaisuuden perusteella

$$Y_c(j\omega) = \mathrm{e}^{-j\omega\Delta} X_c(j\omega) . \tag{7.21}$$

Signaalin diskreettiä käsittelyä varten systeemin tulee olla kaistarajoitettu:

$$H_c(j\omega) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-j\omega\Delta}, & |\omega| < \omega_c \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} , \tag{7.22}$$

missä ω_c on jatkuvan suotimen katkaisutaajuus. Yhtälön (7.22) mukainen suodin viivästyttää siis kaistarajoitettua signaalia ja poistaa kaikki taajuutta ω_c suuremmat taajuudet.

Kun näytteenottotaajuus $\omega_s = 2\omega_c$, niin vastaava diskreettin systeemin taajuusvaste on

$$H_d(e^{j\Omega}) = e^{j\Omega\Delta/T}, \quad |\Omega| < \pi \ . \tag{7.23}$$

Kun Δ/T on kokonaisluku, saadaan viivästetty signaali

$$y_d[n] = x_d\left[n - \frac{\Delta}{T}\right] \ . \tag{7.24}$$

Jos Δ/T ei ole kokonaisluku, yhteys $y_d[n]$:n ja $x_d[n]$:n välille voidaan johtaa kaistarajoitetun interpolaation avulla. Signaali $x_c(t)$ saadaan $x_d[n]$:stä kaistarajoitetulla interpoloinnilla samoin $y_c(t)$ saadaan $y_d[n]$:stä. Systeemin taajuusvasteen ollessa $H_d(e^{j\Omega})$ on signaali $y_d[n]$ tulkittavissa näytteiksi jonosta $x_d[n]$ interpoloidusta ja siirretystä signaalista.

Kun $\Delta/T = 1/2$, puhutaan puolen näytteen viiveestä.

7.5 Diskreettien signaalien näytteenotto

Diskreettien signaalien näytteenotolla on hyvin samankaltaiset ominaisuudet kuin jatkuvien signaalien näytteenotollakin.

7.5.1 Näytteenotto impulssijonolla

Jonosta $x[n]$ voidaan muodostaa tasavälein otettu näytejono $x_p[n]$ seuraavasti

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & \text{jos } n \text{ on } N\text{:n kokonaislukumonikerta} \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \ . \tag{7.25}$$

Näytejono $x_p[n]$ voidaan esittää tulona:

$$x_p[n] = x[n]p[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN]\delta[n - kN] \ . \tag{7.26}$$

Käyttäen Fourier-muunnoksen tulo-ominaisuutta saadaan taajuustasossa esitys

$$X_p(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} P(\mathrm{e}^{j\theta})X(\mathrm{e}^{j(\omega-\theta)})\,d\theta\ . \tag{7.27}$$

Näytteenottojonon $p[n]$ Fourier-muunnos on

$$P(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega - k\omega_s)\ , \tag{7.28}$$

missä ω_s on näytteenottotaajuus, $\omega_s = 2\pi/N$. Yhdistämällä yhtälöt (7.27) ja (7.28) saadaan

$$X_p(\mathrm{e}^{j\omega}) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X\left(\mathrm{e}^{j(\omega-k\omega_s)}\right)\ . \tag{7.29}$$

Saatu tulos on yhtälön (7.6) diskreetti vastine. Kun $\omega_s > 2\omega_M$, niin laskostumista ei tapahdu ja alkuperäinen signaali voidaan rekonstruoida näytejonosta $x_p[n]$ alipäästösuotimella, jonka vahvistus päästökaistalla on N ja jonka katkaisutaajuus on välillä $[\omega_M,\ \omega_s - \omega_M]$.

7.5.2 Näytteenotto ja interpolaatio

Jonoa $x_p[n]$ ei tietenkään kannata tallentaa prosessointia varten sellaisenaan, koska suurin osa sen alkioista on nollia. Käsittelyä varten muodostetaan uusi signaali $x_b[n]$, joka sisältää yksinkertaisesti $x_p[n]$ nollasta eroavat alkiot, eli

$$x_b[n] = x_p[nN] = x[nN]\ . \tag{7.30}$$

Tällaisen näytteenoton vaikutus taajuustasossa saadaan selville määräämällä $x_b[n]$:n Fourier-muunnoksen ja $x[n]$:n Fourier-muunnoksen välinen yhteys. Näytejonon Fourier-muunnos on

$$X_b(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_b[k]\mathrm{e}^{-j\omega k} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[kN]\mathrm{e}^{-j\omega k}\ . \tag{7.31}$$

Merkitsemällä $n = kN$, voidaan kirjoittaa

$$X_b(\mathrm{e}^{j\omega}) = \sum_{\tilde{n}} x_p[n]\mathrm{e}^{-j\omega n/N} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_p[n]\mathrm{e}^{-j\omega n/N}\ , \tag{7.32}$$

missä $\tilde{n}$ tarkoittaa sellaisia n:n arvoja, jotka ovat N:n kokonaislukumonikertoja. Viimeinen yhtäsuuruus on saatu sillä perusteella, että $x_p[n]$ poikkeaa nollasta vain kohdissa nN.

Yhtälön (7.32) oikea puoli on $x_p[n]$:n Fourier-muunnos, joten

$$X_b(e^{j\omega}) = X_p(e^{j\omega/N}) \ . \tag{7.33}$$

Fourier-muunnoksista voidaan päätellä, että nollien poistaminen jonosta $x_p[n]$ levittää signaalin laajemmalle taajuusalueessa.

Jos alkuperäinen $x[n]$ on saatu näytteenotolla jatkuvasta signaalista, niin nollien poisto jonosta $x_p[n]$ vastaa näytteenottovälin pidentämistä tekijällä N.

Jos jatkuvasta signaalista otetusta näytejonosta $x[n]$ voidaan edelleen ottaa näytteitä aiheuttamatta signaalin laskostumista, niin tällöin alkuperäinen näytteenotto on tehty liian tiheällä aikavälillä.

Jos signaalin prosessointi kaventaa sen taajuusspektriä, niin tällöin datamäärää voidaan vähentää ottamalla signaalista uusi näytejono edellä kuvatulla tavalla.

Joskus signaalin näytemäärää on tarpeen lisätä. Tämä voidaan tehdä interpoloimalla alkuperäistä pisteistöä jollakin sopivalla funktiolla ja ottamalla tästä interpoloidusta signaalista näytteitä tiheämmin.

8 Kommunikaatiosysteemit

Kommunikaatiosysteemeillä tarkoitetaan järjestelmiä, joilla siirretään viestejä ja tietoa. Kaikissa siirtojärjestelmissä viesti muokataan lähetyspäässä siirtokanavan vaatimaan muotoon ja vastaanottopäässä tehdään viestin purku takaisin alkuperäiseen muotoonsa.

Esim. äänen siirrossa viesti koodataan korkeille taajuuksille, koska niiden vaimeneminen ilmassa on huomattavasti vähäisempää kuin matalien taajuuksien.

Signaalin muuntamista toiseen muotoon kutsutaan *modulaatioksi*: tämä voidaan toteuttaa joko *amplitudi-* (AM) tai *taajuusmodulaationa* (FM).

Amplitudimodulaatiossa *kantoaallon* amplitudia moduloidaan siirrettävällä signaalilla ja taajuusmodulaatiossa kantoaallon taajuutta moduloidaan siirrettävällä signaalilla.

8.1 Eksponentiaalinen ja sinimuotoinen amplitudimodulaatio

Moduloitu signaali voidaan esittää muodossa

$$y(t) = x(t)c(t) \ , \tag{8.1}$$

missä $x(t)$ on signaali ja $c(t)$ edustaa kantoaaltoa.

8.1.1 kompleksinen, eksponentiaalinen kantoaalto

Sinimuotoinen kantoaalto voidaan esittää joko kompleksisena eksponenttifunktiona

$$c(t) = \mathrm{e}^{j(\omega_c t + \theta_c)} \tag{8.2}$$

tai sinimuotoisena funktiona

$$c(t) = \cos(\omega_c t + \theta_c) \ . \tag{8.3}$$

Molemmissa tapauksissa ω_c on *kantoaallon taajuus*.

Moduloidun signaalin Fourier-muunnos saadaan taajuustasossa signaalin Fouriermuunnoksen ja eksponentiaalisen signaalin Fourier-muunnoksen konvoluutiolla muotoon

$$Y(j\omega) = X(j\omega - j\omega_c) \ . \tag{8.4}$$

Yhtälön (8.2) perusteella signaali saadaan palautettua kertomalla $y(t)$ eksponentilla $e^{-j\omega_c t}$, toimitusta kutsutaan *demodulaatioksi.*

8.1.2 Amplitudimodulaatio sinimuotoisella kantoaallolla

Yhtälön (8.3) mukaisen moduloivan signaalin Fouriermuunnos on muotoa

$$C(j\omega) = \pi\left[\delta(\omega - \omega_c) + \delta(\omega + \omega_c)\right] \tag{8.5}$$

ja moduloitu signaali Fourier-tasossa

$$Y(j\omega) = \frac{1}{2}\left[X(j\omega - j\omega_c) + X(j\omega + j\omega_c)\right] \ . \tag{8.6}$$

Sinimuoitoinen modulaatio edellyttää, että kantoaallon taajuus $w_c > \omega_M$, missä ω_M on moduloitavan signaalin suurin taajuus.

8.2 Sinimuotoisen AM-signaalin demodulaatio

Jos lähetin ja vastaanotin ovat samassa vaiheessa kutsutaan demodulaatiota samavaiheiseksi (synkroniseksi); jos taasen lähetin ja vastaanotin ovat eri vaiheessa on kyseessä erivaiheinen (synkronoimaton) demodulaatio.

8.2.1 Samavaiheinen demodulaatio

Kuten aiemmin eräässä esimerkissä laskettiin, signaali $x(t)$ saadaan palautettua moduloitusta signaalista $y(t)$ kertomalla moduloitu signaali uudelleen kantoaallolla ja tekemällä alipäästösuodatus:

$$w(t) = x(t)\cos^2\omega_c t = \frac{1}{2}x(t) + \frac{1}{2}x(t)\cos 2\omega_c t \ . \tag{8.7}$$

Alipäästösuodatuksella $w(t)$:stä saadaan siis ensimmäinen termi, joka on amplitudiltaan puolet alkuperäisestä signaalista.

Olkoon moduloivan kantoaallon vaihe θ_c ja demoduloivan kantoaallon vaihe ϕ_c, tällöin eksponentiaalisesti moduloitu signaali

$$y(t) = \mathrm{e}^{j(\omega_c t + \theta_c)} x(t) \tag{8.8}$$

ja demoduloitu signaali

$$w(t) = \mathrm{e}^{-j(\omega_c t + \phi_c)} y(t) = \mathrm{e}^{j(\theta_c - \phi_c)} x(t) \ . \tag{8.9}$$

Jos $\theta_c \neq \phi_c$, niin signaaliin $w(t)$ tulee kompleksinen amplituditekijä, jos taas $x(t)$ on positiivinen, niin tällöin $x(t) = |w(t)|$, eli alkuperäinen signaali saadaan ottamalla moduli $w(t)$:stä.

Sinimuotoisella kantoaallolla saadaan

$$w(t) = x(t)\cos(\omega_c t + \theta_c)\cos(\omega_c t + \phi_c) \ , \tag{8.10}$$

joka saadaan muotoon

$$w(t) = \frac{1}{2}\cos(\theta_c - \phi_c)x(t) + \frac{1}{2}\cos(2\omega_c t + \theta_c + \phi_c)x(t) \ . \tag{8.11}$$

Alipäästösuodatuksella saadaan alkuperäinen signaali kerrottuna amplituditekijällä $\cos(\theta_c + \phi_c)$.

Yhtälön (8.11) mukaan lähettimen ja vastaanottimen kannattaisi olla samassa vaiheessa vastaanotetun signaalin amplitudin maksimoimiseksi.

Vielä tärkeämpää on kuitenkin, että vaihe-ero pysyy vakiona, jotta vältytään vastaanotetun signaalin amplitudin moduloitumiselta ajan suhteen.

8.2.2 Erivaiheinen demodulaatio

Jos kantoaallon taajuus ω_c on paljon suurempi kuin moduloitavan signaalin suurin taajuus ω_M, niin tällöin kantoaallon verhokäyrä edustaa alkuperäisen signaalin approksimaatiota. Tällöin alkuperäinen signaali saadaan erotetettua erityisellä *verhokäyrädetektorilla.*

Erivaiheinen demodulaatio edellyttää, että $x(t)$ on positiivinen ja että $\omega_c \gg \omega_M$.

Verhokäyrädetektorin käyttö edellyttää, että $x(t)+A > 0$. Olkoon $K = \max|x(t)|$, jolloin on siis oltava $A > K$.

Modulaatioindeksillä m tarkoitetaan suhdetta $m = K/A$.

8.3 Taajuusmultipleksointi

Monet siirtosysteemit tarjoavat leveämmän taajuuskaistan kuin on tarpeen yhdellekään yksittäiselle signaalille. Esim. tyypillinen mikroaaltokanavan leveys on useita gigahertsejä.

Taajuusmultipleksauksessa (FDM) siirtokanavaa pyritään hyödyntämään tehokkaasti: useita signaaleja laitetaan kanavaan eri taajuuksilla moduloituina. (Kantoaaltojen taajuuseron on oltava niin suuri, etteivät moduloidut signaalit mene taajuustasossa päällekkäin.)

Taajuusmultipleksausta hyödynnetään puhelinliikenteessä samoin kuin radiotaajuuksilla (RF) toimivissä lähettimissä (jokaisella asemalla on oma taajuutensa..).

8.4 Yksipuoleinen sinimuotoinen amplitudimodulaatio

Aiemmin esitetyissä modulaatiomalleissa (eksponentiaalinen ja sinimuotoinen) signaalin kokonaisleveys taajuustasossa on $2\omega_M$ sisältäen $x(t)$:n sekä positiiviset että negatiiviset taajuudet.

Yksipuoleisen sinimuotoisen modulaation (SSB) tarkoituksena on poistaa 'tarpeeton' osa signaalista; joko spektrin ala- tai yläosa.

Temppu voidaan tehdä sopivalla taajuustason ali- tai ylipäästösuotimella. Toinen tapa toteuttaa modulointi perustuu vaihesiirtoihin: alemmat puoliskot voidaan säilyttää suotimella, joka tekee $\pi/2$:den vaihesiirron:

$$H(j\omega) = \begin{cases} -j, & \omega > 0 \\ j, & \omega < 0 \end{cases} . \tag{8.12}$$

Ylemmät puolitasot saadaan mukaan suotimella

$$H(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases} . \tag{8.13}$$

8.5 Amplitudimodulaatio pulssijonolla

Pulssijonomodulaatio vastaa tasavälisten viipaleiden siirtämistä signaalista $x(t)$ (vrt. näytteenottoon pulssijonolla). Tällaisen modulaation edellytykset ovat samat kuin näytteenotossakin: $\omega_c > 2\omega_M$.

Jos $y(t) = x(t)c(t)$, niin nyt

$$C(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - k\omega_c) \ , \tag{8.14}$$

missä $\omega_c = 2\pi/T$ ja kertoimet a_k ovat $c(t)$:n Fourier-sarjan kertoimet

$$a_k = \frac{\sin(k\omega_c \Delta/2)}{\pi k} \ . \tag{8.15}$$

Moduloidun signaalin $y(t)$ spektri on

$$Y(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k X\left(j(\omega - k\omega_c)\right) \ . \tag{8.16}$$

Alkuperäinen signaali voidaan palauttaa moduloidusta signaalista alipäästösuodatuksella.

Pulssijonomodulaatiota voidaan käyttää myös signaalien multipleksaukseen lähetyskanavaan: otetaan useasta signaalista näytteitä vuorotellen ja lähetetään ne kanavaan. Tässä menettelyssä kukin signaali etenee kanavassa tietyin aikavälein esiistyvinä pulsseina.

Tätä menettelyä kutsutaan *aikajako-multipleksaukseksi* (TDM).

8.6 Pulssien amplitudimodulaatio

Monissa käytännön systeemeissä on rajoituksia maksimiamplitudille, joka voidaan välittää kanavan läpi. Tästä syystä edellä esitetty signaalin viipaleiden lähettäminen ei aina ole mahdollista.

Parempi menettely onkin käyttää signaalin $x(t)$ näytteitä $x(nT)$ moduloimaan pulssijononon amplitudia (PAM).

Suorakaiteen muotoisten pulssien käyttö vastaa tason säilyttävää näytteenottoa.

Myös tämä modulointimenettely mahdollistaa aikajako-multipleksauksen.

Mitä lyhyempiä pulsseja käytetään, sitä suurempaa amplitudia joudutaan käyttämään, jotta pulssien sisältämä energia olisi riittävän suuri detektoitavaksi.

Aikajako-multipleksattu signaali voidaan purkaa ottamalla siitä näytteitä sopivin väliajoin.

Käytännön systeemeissä pulssit vääristyvät. Vääristymistä aiheuttaa systeemien kohina, suodatukset, lähetyskanavan kaistarajoitteet ja eri taajuuksien erialainen vaihevaste kanavassa.

Jos systeemin taajuusvaste ei ole ideaalinen, signaalit voivat mennä aikataossa osittain päällekkäin ja interferoida keskenään. Tämä interferenssi vääristää tietenkin aikajakomultipleksatun signaalin näytteenottoa.

Jos interferessiä aiheuttaa vain siirtokanavan kaistarajoittuneisuus, interferenssi voidaan välttää käyttämällä kaistarajoitettuja pulsseja, esim. $p(t) = T_1 \sin(\pi t/T_1)/\pi t$. Koska pulssi on T_1:n monikertojen välein nolla, eivät pulssit näytteidenottohetkillä häiritse toisiaan.

Itseasiassa kaikkia sellaisia pulsseja, jotka ovat nollia T_1:den monikerran välein, voidaan käyttää pulssiamplitudi-modulaatiossa. Tälläisten pulssien spektrit ovat muotoa

$$P(j\omega) = \begin{cases} 1 + P_1(j\omega), & |\omega| \leq \frac{\pi}{T_1}\ , \\ P_1(j\omega) & \frac{\pi}{T_1} < |\omega| \leq \frac{2\pi}{T_1}\ , \\ 0 & \text{muulloin}\ . \end{cases} \tag{8.17}$$

Lisäksi $P_1(j\omega)$:n pitää olla pariton pisteen π/T_1 suhteen.

Digitaalissa systeemeissä moduloitava amplitudi voi saada vain rajatun joukon arvoja. Jos $x[n]$:n arvot esitetään tietyllä määrällä bittejä, niin silloin amplitudimodulaatiossa tarvitaan vain kahta arvoa: 0 tai 1.

Tällaisissa digitaalisissa siirtosysteemeissä voidaan käyttää virheen havaitsevaa koodausta (pariteettibitti); myös erilaiset virheitä korjaavat koodausmenetelmät, kuten polynomikoodaus, ovat mahdollisia.

8.7 Sinimuotoinen taajuusmodulaatio

Toinen tapa koodata lähettävä signaali kantoaaltoon on *taajuusmodulaatio* (FM).

Taajuusmodulaatiolla on kaksi selvää etua amplitudimodulaatioon verrattuna:

1. kantoaallon amplitudi on vakio, minkä vuoksi lähettimiltä ja vastaanottimilta ei vaadita suurta dynamiikkaa, vaan ne voivat toimia koko ajan vakioteholla,
2. lähetyskanavassa syntyvä kantoaallon amplitudimodulaatio ei vaikuta signaaliin.

Näistä syistä taajuusmodulaatiota käytetään erityisesti radiosignaalien välityksessä.

Taajuusmodulaatio vaatii lähetyskanavalta leveämmän kaistanleveyden ja systeemien analysointi ei ole niin yksinkertaista kuin amplitudimodulaatiosysteemien.

Taajuusmodulaatiota voidaan mallintaa *kulmamodulaation* avulla: olkoon kantoaalto

$$c(t) = A\cos(\omega_c t + \theta_c) = A\cos\theta(t) \ , \qquad (8.18)$$

missä $\theta(t) = \omega_c t + \theta_c$, ω_c on kantoaallon taajuus ja θ_c on kantoaallon vaihe.

Kulmamodulaatiossa signaalilla $x(t)$ muutetaan $\theta(t)$:tä. Tämä voidaan tehdä kahdella tavalla. Moduloidaan vaihetta θ_c, jolloin

$$y(t) = A\cos\left[\omega_c t + \theta_c(t)\right]; \quad \theta_c(t) = \theta_0 + k_p x(t) \ . \quad (8.19)$$

Jos $x(t)$ on nyt vakio, niin $y(t)$:n vaihe on vakio, joka on verrannollinen $x(t)$:n amplitudiin. Tätä modulaatiota kutsutaan *vaihemodulaatioksi.*

Toinen tapa tehdä kulmamodulaatio perustuu siihen, että kantoaallon vaihekulman derivaatta on verrannollinen signaaliin $x(t)$:

$$y(t) = A\cos\theta(t); \quad \frac{d\theta(t)}{dt} = \omega_c + k_f x(t) \ . \qquad (8.20)$$

Yhtälöiden (8.20) mukaan $x(t)$:n ollessa vakio, signaalin $y(t)$ taajuus on kantoaallon taajuus ω_c lisättynä tekijällä, joka riippuu signaalin $x(t)$ amplitudista. Tätä modulaatiotapaa kutsutaan taajuusmodulaatioksi.

Yhtälön (8.19) mukainen vaihedulaatio on sama kuin jos yhtälön (8.20) modulaatiossa käytettäisiin $x(t)$:n derivaattaa.

Taajuusmodulaatio askelfunktiolla tarkoittaa kantoaallon taajuuden muuttamista askelfunktion amplitudiin verrannollisella taajuudella.

8.7.1 Kapeakaistainen taajuusmodulaatio

Olkoon $x(t) = A\cos\omega_m t$, tällöin kantoaallon taajuus on muotoa

$$\omega_i(t) = \omega_c + k_f A\cos\omega_m t = \omega_c + \Delta\omega\cos\omega_m t \ . \quad (8.21)$$

Taajuus $\omega_i(t)$ vaihtelee siis sinimuotoisesti taajuuksien $\omega_c + k_f A$ ja $\omega_c - k_f A$ välillä.

Moduloitu signaali $y(t)$ on muotoa

$$\begin{aligned} y(t) &= \cos\left[\omega_c t + \int x(t)\,dt\right] \\ &= \cos\left(\omega_c t + \tfrac{\Delta\omega}{\omega_m}\sin\omega_m t + \theta_0\right) , \end{aligned} \tag{8.22}$$

missä θ_0 on integroimisvakio, joka voidaan valita $\theta_0 = 0$.

Suhdetta $m = \Delta\omega/\omega_m$ kutsutaan taajuusmodulaation modulaatioindeksiksi. Taajuusmodulaatiota sanotaan kapeakaistaiseksi, jos m on pieni.

Kun $m \ll \pi/2$, niin moduloidun signaalin esitystä yhtälössä (8.22) voidaan approksimoida lausekkeella

$$y(t) \simeq \cos\omega_c t - m(\sin\omega_m t)(\sin\omega_c t) . \tag{8.23}$$

8.7.2 Laajakaistainen taajuusmodulaatio

Jos modulaatioindeksi m on suuri, ei yhtälön (8.23) mukaista approksimaatiota voida enää käyttää. Esittämällä yhtälö (8.22) muodossa

$$y(t) = \cos\omega_c t\cos(m\sin\omega_m t) - \sin\omega_m t\sin(m\sin\omega_m t) , \tag{8.24}$$

havaitaan kertoimien $\cos(m\sin\omega_m t)$ ja $\sin(m\sin\omega_m t)$ olevan jaksollisia signaaleja, joiden taajuus on ω_m. Näiden signaalien Fourier-muunnos on impulssijono, jossa impulssit ovat ω_m:n kokonaislukumonikertojen kohdilla ja niiden amplitudit ovat verrannollisia $y(t)$:n tekijöiden Fourier-sarjan kertoimiin.

Yhtälön (8.24) termit edustavat sinimuotoisten kantoaaltojen, joiden taajuudet ovat ω_c, amplitudimodulaatiota tekijöillä $\cos(m\sin\omega_m t)$ ja $\sin(m\sin\omega_m t)$. Taajuustasossa tämä tarkoittaa moduloivien signaalien spektrien siirtämistä kantoaallon taajuuden ympärille.

Moduloidun signaalin $y(t)$ spektri koostuu impulsseista taajuuksilla $\pm\omega_c + n\omega_m$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Tämä spektri ei ole kaistarajoitettu ω_c:n ympärillä, mutta termien $\cos(m \sin \omega_m t)$ ja $\sin(m \sin \omega_m t)$ Fourier-sarjojen kertoimet pienevät s.e. kun $|n| > m$, niin niiden merkitys on mitätön, joten kaistanleveydeksi voidaan ottaa

$$B \simeq 2m\omega_m = 2k_f A = 2\Delta\omega \ . \tag{8.25}$$

Yhtälön perusteella moduloidun signaalin kaistanleveys B on on paljon suurempi kuin signaalin $x(t)$ kaistanleveys ω_m, koska oletettiin $m \gg 1$.

8.7.3 Kanttiaallolla moduloiminen

Olkoon $x(t)$ kanttiaalto ja $k_f = 1$ sekä $\Delta\omega = A$. Tällöin moduloitu signaali esiintyy kahdella taajuudella $\omega_c + \Delta\omega$ ja $\omega_c - \Delta\omega$, ja se voidaan kirjoittaa muotoon

$$y(t) = r(t)\cos\left[(\omega_c + \Delta\omega)t\right] + r\left(t - \frac{T}{2}\right)\cos\left[(\omega_c - \Delta\omega)t\right] \ , \tag{8.26}$$

missä $r(t)$ tarkoittaa nyt parillista kanttiaaltoa ja T on kanttiaallon yhden jakson pituus.

Moduloidun signaalin spektri saadaan ratkaistua kahden amplitudimoduloidun signaalin spektrien summama

$$\begin{aligned} Y(j\omega) = {} & \tfrac{1}{2}\left[R(j\omega + j\omega_c + j\Delta\omega) + R(j\omega - j\omega_c - j\Delta\omega)\right] \\ & + \tfrac{1}{2}\left[R_T(j\omega + j\omega_c + j\Delta\omega) + R_T(j\omega - j\omega_c - j\Delta\omega)\right] \ , \end{aligned} \tag{8.27}$$

missä $R(j\omega)$ on kanttiaallon $r(t)$ Fourier-muunnos ja $R_T(j\omega)$ on $r(t - T/2)$:den Fourier-muunnos.

Taajuusmodulaation purkuun voidaan käyttää kahta menettelyä. Taajuusmoduloitu signaali voidaan muuntaa amplitudimoduloiduksi signaaliksi differentioimalla sitä. Toinen vaihtoehto on seurata suoraan joko moduloidun signaalin vaihetta tai taajuutta.

8.8 Diskreettien signaalien modulaatio

Diskreetti amplitudimodulaatio voidaan esittää muodossa

$$y[n] = x[n]c[n] \ , \tag{8.28}$$

jolloin moduloidun signaalin spektri $Y(\mathrm{e}^{j\omega})$ on spektrien $X(\mathrm{e}^{j\omega})$ ja $C(\mathrm{e}^{j\omega})$ konvoluutio taajuustasossa. (Jaksollisuuden vuoksi konvuluutio lasketaan vain yhden 2π-mittaisen jakson yli.)

Jos moduloiva signaali on kompleksinen eksponentti $c[n] = \mathrm{e}^{j\omega_c n}$, niin tällöin sen Fourier-muunnos on impulssijono taajuustasossa ja moduloidun signaalin spektri on jaksollinen ja $Y(\mathrm{e}^{j\omega}) = X(\mathrm{e}^{j(\omega-\omega_c)})$.

Signaali $x[n]$ saadaan kertomalla $y[n]$ $\mathrm{e}^{-j\omega_c n}$:llä.

Jos $\omega_c = \pi$, eli $c[n] = (-1)^n$, niin modulaatio tarkoittaa jonon $x[n]$ parittomien alkioiden etumerkin vaihtamista: Fourier-tasossa tämä tarkoittaa puolestaan signaalin siirtämistä korkeille taajuuksille.

Eksponentiaalisen modulaation sijaan voidaan käyttää myös sinimuotoista modulaatiota, $c[n] = \cos\omega_c n$. Nyt kantoaallon spektri koostuu impulssipareista, jotka ovat taajuuksilla $\omega = \pm\omega_c + k2\pi$.

Jotta spektrit eivät laskostuisi, on oltava $\omega_c > \omega_M$ ja $2\pi - \omega_c - \omega_M > \omega_c + \omega_M$, eli $\omega_c < \pi - \omega_M$. Yhdistämällä nämä kaksi tulosta saadaan kantoaallon taajuudelle rajoite

$$\omega_M < \omega_c < \pi - \omega_M \ . \tag{8.29}$$

Demodulaatio voidaan tehdä kertomalla $y[n]$ uudelleen kantoaallolla ja tekemällä sopiva alipäästösuodatus.

Diskreetti taajuusjako-multipleksaus (FDM) vaatii, että jokainen signaali $x_i[n]$ on kaistarajoitettu. Jos signaalit on saatu jatkuvista signaaleista jollain vakiotaajuuksisella näytteenotolla, niin kukin signaali voidaan siirtää sopivalle taajuusalueelle ylisämpläyksellä, ts. interpoloimalla näytteiden väliin lisää datapisteitä.

9 z-muunnos

Jatkuvien systeemien analyysiin voidaan käyttää Fourier-muunnoksen lisäksi Laplace-muunnosta. Verrattuna Fourier-muunnokseen Laplace-muunnos monipuolisempi, koska Laplace-muunnos yleensä suppenee myös sellaisissa tapauksissa, joissa Fourier-muunnos ei suppene. Laplace-muunnosta voidaan käyttää esim. epästabiilien LTI-systeemien analysointiin. Laplace-muunnoksen heikkoutena on sen käänteismuunnoksen laskemisen vaikeus.

Nykyisin kuitenkin diskreetit systeemit ja niiden analysointi on tärkeämpää kuin jatkuvien systeemien analysointi, joten seuraavassa perehdytään Laplace-muunnosta vastaavaan diskreettiin muunnokseen, *z-muunnokseen.*

9.1 Määritelmä z-muunnokselle

LTI-systeemin vaste kompleksiselle syötteelle z^n on muotoa

$$y[n] = H(z)z^n \ , \tag{9.1}$$

missä

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n} \ . \tag{9.2}$$

Kun $z = \mathrm{e}^{j\omega}$, ω on reaalinen ja $|z| = 1$, niin yhtälö (9.2) vastaa diskreetin signaalin $h[n]$ Fourier-muunnosta. Jos z:aa ei rajoiteta mitenkään, kutsutaan yhtälön (9.2) tyyppistä muunnosta *z-muunnokseksi.*

Jonolle $x[n]$ z-muunnos määritellään muodossa

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \ , \tag{9.3}$$

missä z on joku kompleksinen muuttuja. Muunnokselle voidaaan käyttää merkintää $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$.

Diskreetin signaalin Fourier-muunnoksen ja z-muunnoksen välinen yhteys saadaan selville kun asetetaan $z = re^{j\omega}$, tällöin

$$X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n](re^{j\omega})^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \{x[n]r^{-n}\}\, e^{-j\omega n}\,. \tag{9.4}$$

Yhtälön (9.4) mukaan $X(re^{j\omega})$ on jonon $x[n]r^{-n}$ Fourier-muunnos, ja jos $|z| = 1$, eli $r = 1$, niin z-muunnos edustaa signaalin $x[n]$ Fourier-muunnosta.

Tulos tarkoittaa sitä, että z-muunnoksen avulla saadaan selville Fourier-muunnos tarkastelemalla z-muunnosta pitkin yksikköympyrän kehää kompleksitasossa.

Yhtälön (9.3) mukainen muunnos suppenee, kun signaalin $x[n]r^{-n}$ Fourier-muunnos suppenee. Sitä aluetta kompleksitasossa, jonka z-arvoilla muunnos (9.3) suppenee kutsutaan munnoksen *suppenemisalueeksi* (ROC).

Jos signaalin arvot ovat nollia kun $n < 0$, niin tällöin z-muunnos on kätevintä esittää z^{-1}:den polynomina.

9.2 z-muunnoksen suppeneminen

Muunnoksen suppenemisalueelle voidaan kirjoittaa seuraavat ominaisuudet

1. $x(z)$:n suppenemisalue on origokeskinen rengas z-tasossa.
2. Suppenemisalueeseen ei kuulu napoja (nimittäjän nollakohtia).
3. Jos $x[n]$ on äärellisen mittainen, niin suppenemisalue on koko z-taso, lukuunottamatta mahdollisesti $z = 0$ ja $z = \infty$.
4. Jos $x[n]$:n arvot eroavat nollasta vain kun $n > N_1$ ja jos ympyrä $|z| = r_0$ kuuluu suppenemisalueeseen, niin tällöin kaikki z:n äärelliset arvot, joille $|z| > r_0$, kuuluvat suppenemisalueeseen.
5. Jos $x[n]$:n arvot eroavat nollasta vain kun $n < N_2$ ja jos ympyrä $|z| = r_0$ kuuluu suppenemisalueeseen, niin tällöin kaikki z:n äärelliset arvot, joille $0 < |z| < r_0$, kuuluvat suppenemisalueeseen.

6. Jos $x[n]$:n arvot eroavat nollasta kun $N_1 < n < N_2$ ja jos ympyrä $|z| = r_0$ kuuluu suppenemisalueeseen, niin tällöin suppenemisalueen muodostaa rengas, johon ympyrä $|z| = r_0$ kuuluu.

7. Jos $x[n]$:n z-muunnos $X(z)$ on rationaalinen, niin tällöin suppenemisaluetta rajoittaa navat tai suppenemisalue ylettyy äärettömään.

8. Yhdistämällä ominaisuudet 4, 5 ja 7 saadaan, että jos $X(z)$ on rationaalinen ja $x[n] \neq 0$ kun $n > N_1$, niin $X(z)$:n suppenemialue on uloimman navan kautta piirretyn ympyrän ulkopuolinen alue. Lisäksi, jos $x[n]$ on kausaalinen, niin myös $z = \infty$ kuuluu suppenemisalueeseen.

9. Jos $X(z)$ on rationaalinen ja $x[n] \neq 0$ kun $n < N_2$, niin suppenimisalue on lähinnä origoa olevan navan kautta piirretyn ympyrän sisäpuolinen alue. Erityisesti, jos $x[n]$ on antikausaalinen ($x[n] = 0$ kun $n > 0$), niin tällöin $z = 0$ kuuluu suppenemisalueeseen.

9.3 Käänteinen z-muunnos

Käänteiselle z-muunnokselle ei ole mitään laskukaavaa, vaan se joudutaan ratkaisemaan jollakin tarkoitukseen sopivalla menetelmällä. Symbolisesti merkitään $x[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Jos $x[n]$ on kausaalinen, niin tällöin

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \ldots \quad (9.5)$$

ja käänteismuunnos saadaan suoraan tekijöiden z^{-n} ($n = 0, 1, 2, \ldots$) kertoimista.

Käytännössä $X(z)$ esitetään kahden joko tekijöistä z^{-1} tai z koostuvan polynomin suhteena

$$X(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \ldots + a_N z^{-N}}{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \ldots + b_M z^{-M}} \,. \quad (9.6)$$

Tässä muodossa esitetyn z-muunnoksen käänteismuunnos voidaan ratkaista jollakin seuraavista kolmesta menetelmästä:

1. potenssisarjakehitelmä ('pitkä jako')
2. osamurtokehitelmä
3. residy-lasketa

9.3.1 Potenssisarjakehitelmä

Jos $X(z)$ on kausaalinen, niin tällöin yhtälön (9.6) mukainen esitys saadaan tekijöistä z^{-1} koostuvaan äärettömän sarjan muotoon

$$X(z) = x[0] + x[1]z^{-1} + x[2]z^{-2} + x[3]z^{-3} + \dots \ , \quad (9.7)$$

minkä kertoimet $x[n]$ voidaan määrätä jakolaskun avulla. Kertoimille $x[n]$ saadaan rekursiivinen yhtälö:

$$\begin{aligned} x[0] &= a_0/b_0 \\ x[1] &= [a_1 - x[0]b_1]/b_0 \\ x[2] &= [a_2 - x[1]/b_1 - x[0]b_2]/b_0 \\ &\vdots \qquad \vdots \\ x[n] &= \left[a_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n} x[n-i]b_i\right]/b_0 \ . \end{aligned} \quad (9.8)$$

Viimeisen rivin yhtälö on itseasiassa yleinen yhtälö kertoimille $x[n]$; sen avulla saadaan kaikki $x[n]$:t, kun $n = 0, 1, 2, \dots$.

9.3.2 Osamurtokehitelmä

Yhtälön (9.6) mukainen esitys saadaan esitettyä yksinkertaisempien lausekkeiden summana, jos $X(z)$ navat ovat vain ensimmäistä astetta ja $N = M$. Tällöin

$$\begin{aligned} X(z) &= B_0 + \tfrac{C_1}{1-p_1 z^{-1}} + \tfrac{C_2}{1-p_2 z^{-1}} + \dots + \tfrac{C_M}{1-p_M z^{-1}} \\ &= B_0 + \tfrac{C_1 z}{z-p_1} + \tfrac{C_2 z}{z-p_2} + \dots + \tfrac{C_M z}{z-p_M} \\ &= B_0 + \textstyle\sum_{k=1}^{M} \tfrac{C_k z}{z-p_k} \ , \end{aligned} \quad (9.9)$$

missä p_k:t ovat $X(z)$ napoja (oletettu erillisiksi), C_k:t ovat osamustokehitelmän kertoimia ja $B_0 = a_N/b_N$.

Jos nimittäjän aste on suurempi kuin osoittajan aste, eli $N < M$, niin $B_0 = 0$.

Jos $N > M$, niin tällöin $X(z)$ on ensin saatettava esim. potenssisarjakehitelmällä muotoon, jossa $N \leq M$, jonka jälkeen voidaan soveltaa osamurtokehitelmää.

Napaan p_k liittyvä kerroin C_k voidaan määrätä kertomalla yhtälön (9.9) molemmat puolet tekijällä $(z - p_k)/z$ ja sitten sijoittamalla $z = p_k$:

$$C_k = \frac{X(x)}{z}(z - p_k)\bigg|_{z=p_k} . \tag{9.10}$$

Jos $X(z)$ navat ovat moninkertaisia, niin tällöin yhtälöön (9.9) tulee lisätermejä. Esim. jos $X(z)$ sisältää m:nnen asteen navan pisteessä $z = p_k$, niin osamurtokehitelmään tulee termit

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{D_i}{(z - p_k)^i} . \tag{9.11}$$

Kertoimet D_i saadaan yhtälöstä

$$D_i = \frac{1}{(m-i)!}\frac{d^{m-i}}{dz^{m-i}}\left[(z - p_k)^m X(z)\right]\bigg|_{z=p_k} . \tag{9.12}$$

9.3.3 Residy-menetelmä

Residymenetelmässä sovelletaan viivaintegraalia:

$$x[n] = \frac{1}{2\pi j}\oint_C z^{n-1}X(z)\,dz , \tag{9.13}$$

missä C on integrointitie (suljettu silmukka), joka sisältää kaikki $X(z)$:n navat.

Rationaalipolynomien tapauksessa voidaan integraalin ratkaisemiseen soveltaa Chauchyn residy-teoreemaa: $x[n]$ on $z^{n-1}X(z)$:n kaikkien residyjen summa kaikissa C:n sisään jäävissä navoissa.

Napaan p_k liittyvä $z^{n-1}X(z)$:n residy saadaan yhtälöstä

$$\mathrm{Res}[F(x),\, p_k] = \frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z - p_k)^m F(z)\right]\bigg|_{z=p_k} , \tag{9.14}$$

missä $F(z) = z^{n-1}X(z)$, m on navan aste pisteessä p_k ja $\mathrm{Res}[F(x),\, p_k]$ on $F(z)$:n residy pisteessä $z = p_k$.

Jos napa on yksinkertainen, niin

$$\mathrm{Res}[F(x),\, p_k] = (z - p_k)F(z) = (z - p_k)z^{n-1}X(z)\big|_{z=p_k} . \tag{9.15}$$

9.4 z-muunnoksen ominaisuuksia

z-muunnoksella on joukko samantapaiset ominaisuudet kuin Fourier-muunnoksellakin.

1. Lineaarisuus:

$$ax_1[n] + bx_2[n] \rightarrow aX_1(z) + bX_2(z) \ . \tag{9.16}$$

2. Viive: jos $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, niin

$$\mathcal{Z}\{x[n-n_0]\} = z^{-n_0}X(z) \ . \tag{9.17}$$

3. Konvoluutio: jos $y[n] = x[n] * h[n]$, niin z-tasossa $Y(z) = X(x)H(z)$.
4. Differentiointi: jos $X(z) = \mathcal{Z}\{x[n]\}$, niin

$$nx[n] \rightarrow -z\frac{dX(z)}{dz} \ . \tag{9.18}$$

Lisäksi z-muunnos voidaan kytkeä Laplace-muunnokseen määrittelemällä $z = e^{sT}$, missä s on kompleksinen Laplace-muuttuja $s = d + j\omega$.

9.5 z-muunnoksen soveltaminen signaalinkäsittelyssä

Digitaalisen signaalinkäsittelyn analysointi ja suotimien suunnittelu perustuu z-muunnokseen ja sen ominaisuuksiin. Seuraavassa käsitellään muutamia, asiaa toivottavasti valaisevia esimerkkejä.

9.5.1 Diskreettien systeemien napa-nolla-kuvaus

Systeemin siirtofunktio $H(z)$ pystytään esittämään *napojen* (nimittäjän nollakohtien) ja *nollien* (osoittajan nollakohtien) avulla. Olkoon esim.

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \ , \tag{9.19}$$

missä

$$\begin{aligned} N(z) &= a_0z^N + a_1z^{N-1} + a_2z^{N-2} + \ldots + a_N \\ D(z) &= b_0z^N + b_1z^{N-1} + b_2z^{N-2} + \ldots + b_N \end{aligned} \ . \tag{9.20}$$

Kertoimet a_k ja b_k ovat suotimen kertoimia. Jos $H(z)$:n navat ovat pisteissä $z = p_1, p_2, \ldots, p_N$ ja nollat pisteissä $z = z_1, z_2, \ldots, z_n$, niin

$$H(z) = \frac{K(z - z_1)(z - z_2)\cdots(z - z_N)}{(z - p_1)(z - p_2)\cdots(z - p_N)} , \qquad (9.21)$$

missä K on vahvistuskerroin.

$H(z)$:n navat ja nollat voivat olla joko reaalisia tai kompleksia: mikäli ne ovat kompleksia, niin niiden on oltava kompleksikonjugaattipareja, jotta suotimen kertoimet a_k ja b_k pysyisivät reaalisina.

z-muunnokseen liittyvä tieto voidaan esittää kätevästi *napa-nolla-kuvaajana*, missä navat ja nollakohdat esitetään kompleksitasossa merkinnöillä $\times$ (napa) ja $\circ$ (nollakohta).

Napa-nolla-kuvaajasta voidaan päätellä systeemin taajuusvaste ja stabiilisuus: stabiilin systeemin kaikki navat ovat yksikköympyrän sisällä.

Systeemin siirtofunktion napojen ja nollien ratkaiseminen vastaa polynomin juurten ratkaisemista ja tämä joudutaan tavallisesti tekemään numeerisesti.

9.5.2 Taajuusvasteen estimointi

Systeemin taajuusvaste saadaan z-muunnosesta asettamalla $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$:

$$\begin{aligned} H(z) &= \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]z^{-n}\big|_{z=\mathrm{e}^{j\omega T}} \\ &= H(\mathrm{e}^{j\omega T}) = \textstyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n]\mathrm{e}^{-jn\omega T} , \end{aligned} \qquad (9.22)$$

missä $H(\mathrm{e}^{j\omega T})$ on systeemin taajuusvaste. Merkintää T on käytetty korostamaan systeemin taajuusvasteen riippuvuutta näytteenotosta.

Käytännössä taajuusvaste voidaan laskea $H(z)$:sta usealla eri tavalla:

1. Geometrisessa ratkaisussa tarkastellaan napojen ja nollien etäisyyttä yksikköympyrän kehästä; mitä lähempänä nolla on kehää, sitä pienempi taajuusvasteen arvo on sillä kohtaa ja mitä lähempänä napa on kehää, sitä suurempi taajuusvasteen arvo on tällä kohtaa.

2. Taajuusvasteen suora laskeminen numeerisesti sijoituksella $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$, tähän voidaan vielä soveltaa Eulerin kaavaa.

3. Myös FFT:tä (FFT = Fast Fourier Transform) voidaan käyttää taajuusvasteen ratkaisemiseen erityisesti IIR-systeemeille. Ratkaistaan ensin systeemin impulssivaste käänteisellä z-muunnoksella ja lasketaan tämän impulssivasteen Fourier-muunnos.

   Taajuusvaste voidaan laskea myös ratkaisemalla nimittäjän ja osoittajan Fourier-muunnokset erikseen, jolloin $H(e^{j\omega T}) = N(k)/D(k)$, missä $k = 0, 1, \ldots, N/2$.

9.5.3 Differenssiyhtälöt

Differenssiyhtälö kuvaa aikatasossa signaalin prosessointia

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{M} b_k y[n-k] \ . \qquad (9.23)$$

Laskemalla tämän esityksen z-muunnos puolittain ja ratkaisemalla $H(z) = Y(z)/X(x)$ saadaan

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\left(1 + \sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}\right)} \ . \qquad (9.24)$$

Jos kertoimet $b_k = 0$, niin kyseessä on FIR-systeemi ja kertoimia a_k merkitään tavallisesti impulssivasteella $h[k]$. Jos vähintään yksi b_k kerroin eroaa nollasta, niin kyseessä on IIR-systeemi.

9.5.4 Impulssivasteen estimointi

Diskreetin systeemin impulssivaste saadaan käänteisellä z-muunnoksella

$$h[n] = \mathcal{Z}^{-1}\{H(z)\} \ , \quad k = 0, 1, \ldots \ . \qquad (9.25)$$

Impulssivaste saadaan selville esittämällä ensin $H(z)$ differenssiyhtälönä aikatasossa ja ratkaisemalla systeemin ulostulo syötteelle $x[n] = \delta[n]$.

9.5.5 Digitaalisten suotimien suunnittelu

z-muunnosta voidaan hyödyntää digitaalisten suotimien suunnittelussa ja analysoinnissa, esim. suotimen kertoimien virheiden (pyöristysvirheen tyyppisiä virheitä, jotka johtuvat lukujen äärellisestä esitystarkkuudesta digitaalisissa systeemeissä) analysointi on helppoa.

Suotimen kertoimet vaikuttavat suoraan $H(z)$:aan ja tätä kautta kertoimien vaikutus esim. taajuusvasteeseen saadaan suoraan laskettua.

9.5.6 Digitaalisten suotimien realisaatio

Systeemin differenssiyhtälöt esitetään usein lohkokaavioina tai signaalin kulkua kuvaavana piirroksena.

Symboli z^{-1} kuvaa yhden yksikön viivettä, signaalien summaus jossain pisteessä kuvataan ympyrällä, jonka sisällä on $+$ ja signaalien kertominen keskenään jossain pisteessä kuvataan ympyrällä, jonka sisällä on $\times$.

Jos $H(z)$:n aste on korkea, suora realisaatio ei ole mahdollinen. Tällöin käytetään joko tulomuotoista *kaskadi-realisaatiota* tai *rinnakkaisrealisaatiota*. Kaskadi-realisaatiossa siirtofunktio esitetään alkeisfunktioiden tulona:

$$H(z) = H_1(z)H_2(z)\cdots H_K(z) = \prod_{i=1}^{K} H_i(z) \ . \qquad (9.26)$$

Alkeisfunktiot $H_i(z)$:t ovat joko ensimmäistä tai toista astetta:

$$\begin{aligned} H_i(z) &= \tfrac{a_{0i}+a_{1i}z^{-1}}{1+b_{1i}z^{-1}} \qquad \text{tai} \\ H_i(z) &= \tfrac{a_{0i}+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}{1+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2}} \ . \end{aligned} \qquad (9.27)$$

Rinnakkaisrealisaatiossa $H(z)$ puretaan osiin osamurtokehitelmän avulla:

$$H(z) = B_0 + \sum_{i=1}^{K} H_i(z) \ , \qquad (9.28)$$

missä, kuten edelläkin, $H_i(z)$:t ovat joko ensimmäistä tai toista astetta.

Digitaalisten suotimien suunnitteluohjelmat antavat tyypillisesti keroimet a_{ki} ja b_{ki} kaskadi-ratkaisulle. Rinnakkaisrealisaatiota varten joudutaan ratkaisemaan osamurtokehitelmä kaskadi-muotoisesta esityksestä.

10 Digitaalisuotimien suunnittelun yleiset periaatteet

Tässä luvussa pyritään antamaan yleiskuva digitaalisten suotimien suunnittelusta – eräänlaisena askel-askeleelta tyyppisenä ohjeistona 'vasta-alkajille'.

10.1 Digitaalisten suotimien olemus

Suodin on systeemi, joka valikoivasti muuttaa signaalin aaltomuotoa: amplitudia, taajuutta tai vaihetta. Suodatuksen tarkoituksena on parantaa signaalin laatua, erottaa signaalista tietoa, tai erottaa kaksi tai useampia signaaleja toisistaan.

Digitaalinen suodin on matemaattinen algoritmi, joka voidaan toteuttaa joko ohjelmallisesti tai rautatasolla.

Digitaalisuotimien eduiksi voidaan laskea seuraavia ominaisuuksia:

- ominaisuuksia, joita ei voi olla analogisilla suotimilla, kuten esim. aidosti lineaarinen vaihevaste,
- ympäristöolosuhteiden muutokset eivät vaikuta suotimen toimintaan,
- suotimen taajuusvastetta voidaan säätää automaattisesti ohjelmoitavissa systeemeissä, mikä mahdollistaa adaptiiviset suotimet,
- useita kanavia voidaan käsitellä samalla suotimella,
- sekä suodatettu että suodattamaton signaali voidaan tallentaa jatkokäsittelyä varten,
- suotimien toteutuksessa voidaan hyödyntää VLSI-tekniikoita,
- analogisten suotimien tarkkuus on rajoitettu, tyypillisesti esim. vaimennus voi olla 60-70 dB, digitaalisissa suotimissa rajoituksena on vain lukujen esitystarkkuus laskentavaiheessa,
- sama digitaalinen suodin toimii eri laiteympäristöissä aina samalla tavalla,
- digitaalisuotimet toimivat hyvin matalilla taajuuksilla toisin kuin analogiset suotimet,

- suotimien toiminnan taajuuskaista voi olla hyvin laaja: eri näytteenottotaajuuksilla otetut signaalit voidaan ajaa saman suotimen läpi, jolloin suotimen vaikutus määräytyy näytteenottotaajuudesta.

Digitaalisten suotimien suurimmat heikkoudet ovat:

- nopeusrajoitus, joka aiheuttaa sen, että digitaalisten suotimien kaistaleveys on paljon alhaisempi kuin analogisten suotimien. Analoginen-digitaalinen-analoginen -systeemeissä rajoittavana tekijänä on AD-muunninten toimintanopeus ja prosessoreiden nopeus,
- äärellisten sanapituuksien aiheuttamat virheet, vaikuttavat lähinnä suodinten kertoimiin ja sitä kautta niiden toimintaan,
- digitaalisten suotimien suunnittelu- ja kehitystyö on varsin hidasta, mutta toisaalta suunniteltua systeemiä on suhteellisen helppo muuttaa vastaamaan muihin tarkoituksiin sopivaksi (erit. taajuuden vaihtaminen).

10.2 Digitaaliset suodintyypit: FIR ja IIR

Digitaaliset suotimet voidaan jakaa kahteen luokkaan: sellaisiin, joiden impulssivaste on ääretön (*IIR = Infinite Impulse Responce*) ja sellaisiin, joiden impulssivaste on äärellinen (*FIR = Finite Impulse Responce*).

Suotimien ulostulot saadaan konvoluution avulla:

$$\begin{array}{ll} y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] & \text{(IIR)} \\ y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] & \text{(FIR)} \end{array} . \tag{10.1}$$

Koska IIR-suotimen impulssivaste on ääretön, ei suoraa konvoluutioon perustuvaa laskukaavaa voida käyntännössä käyttää. Sen sijaan käytetään rekursioon perustuvaa kaavaa

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]h[n-k] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{M} b_k y[n-k] \ , \tag{10.2}$$

missä kertoimet a_k ja b_k ovat suotimen kertoimia.

Suotimien suunnittelun kannalta olennaisia ovat FIR-suotimen kertoimet $h[n]$ ja IIR-suotimen kertoimet a_k ja b_k.

Toinen tapa esittää suotimet on käyttää z-muunnosta:

$$\begin{array}{ll} H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}{\left(1-\sum_{k=1}^{M} b_k z^{-k}\right)} & \text{(IIR)} \\ H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k] z^{-k} & \text{(FIR)} \end{array} . \tag{10.3}$$

10.3 Valinta FIR- ja IIR-suotimen välillä

Molemmilla on omat etunsa..

1. FIR-suotimen vaihevaste voi olla täysin lineaarinen, eli suodin ei vääristä signaalin vaihetta ollenkaan. IIR-suotimien vaihevaste on epälineaarinen, erityisesti kaistojen reunoilla.
2. FIR-suotimien äärellinen impulssivaste takaa niiden stabiilisuuden, IIR-suotimien stabiilisuutta ei aina voida taata.
3. Äärellisestä lukujen esitystarkkuudesta aiheutuvat virheet ovat paljon vähäisempiä FIR-suotimissa kuin IIR-suotimissa.
4. FIR-suotimen kertoimien määrä on suurempi kuin IIR-suotimen, kun halutaan toteuttaa terävä katkaisureuna, joten FIR-suotimen toteutus vie enemmän muistia ja suodatus on hitaampi laskea.
5. Analogiset suotimet voidaan suoraan muuntaa vastaaviksi IIR-suotimiksi; tätä muunnosta ei voida tehdä FIR-suotimiksi.
6. FIR-suotimien suunnittelu on laskennallisesti hankalampaa kuin IIR-suotimien suunnittelu.

Edellä olevan lista voidaan kiteyttää kahteen nyrkkisääntöön:

- jos suotimen pitää olla jyrkkä ja todella nopea, käytä IIR-suotimia,
- jos suotimen kertoimia ei ole liikaa ja vaihevirheitä ei saa syntyä, käytä FIR-suotimia.

10.4 Suotimen suunnittelun vaiheet

Suotimen suunnitelu voidaan jakaa viiteen vaiheeseen:

1. suotimen määrittely ja sille asetettavat vaatimukset,
2. sopivien kertoimien ratkaiseminen,
3. suotimen esittäminen sopivassa muodossa realisaatiota varten,
4. äärellisten sanapituuksien vaikutusten analysointi,
5. suotimen toteutus joko ohjelmallisesti tai raudalla.

10.4.1 Suotimen määrittely

Suotimen määrittelyssä on huomioitava a) signaalin luonne (signaalin lähde, I/O-liittymä, käsiteltävä datamäärä ja suurin taajuus), b) suotimen määrittely (amplitudi- ja vaihevaste, sekä niiden suurin sallittu vaihtelu, toimintanopeus ja toimintatapa – joko reaaliaikainen tai muistiin talletun signaalin suodatus),

c) suotimen toteutustapa (ohjelmallisesti, tai DSP-pohjainen[a] systeemi – prosessorin valinta) ja d) muut suotimen rajoitteet, kuten hinta.

Suotimen asetettavat vaatimukset, b), määritellään usein taajuustasossa; toiminta-alue, siirtymäkaistojen leveydet ja rippeleiden amplitudit (f_p, f_s, δ_p, δ_s).

10.4.2 Kertoimien laskeminen

Tässä vaiheessa on tehtävä valinta FIR- ja IIR-suotimen välillä, jolloin ratkaistavaksi jää joko $h[n]$ tai a_k ja b_k.

IIR-suotimien kertoimien ratkaiseminen perustuu tunnettujen analogisten suotimien muuntamiseen digitaalisiksi suotimiksi joko ns. impulssiriippumattomalla menetelmällä tai bilineaarisella muunnoksella.

Impulssiriippumaton mentelmä soveltuu analogisten suotimien mallintamiseen ja bilineaarinen menelmä soveltuu parhaiten taajuusriippuvien IIR-suotimien suunnitteluun.

[a] DSP = Digital Signal Processor

FIR-suotimien suunnitteluun on kolme tapaa: a) ikkuna, b) taajuusnäytteet ja c) optimaalinen menetelmä (Parks-McClellan -algoritmi). Näistä menetelmistä viimemainittu johtaa parhaaseen tulokseen.

10.4.3 Suotimen esitysmuodot

Suotimen siirtofunktio $H(z)$ on muunnettava sopivaan (realisoitavissa olevaan) muotoon. Tähän esitykseen käytetään joko lohko- tai vuokaavioita.

IIR-suotimille käytetään kolmea esitysmuotoa: suoraa, kaskadi tai rinnakkaismuotoa. Kaskadimuodossa $H(z)$ esitetään ensimmäisen ja/tai toisen asteen tekijöiden tulona ja rinnakkaismuodossa $H(z)$ esitetään ensimmäisen ja/tai toisen asteen tekijöiden summana.

IIR-suotimille käytetään eniten kaskadi- ja rinnakkaismuotoja.

FIR-suotimet esitetään yleisimmin suorassa muodossa. Kaksi muuta FIR-suotimien esitysmuotoa ovat taajuusnäytteiden muoto ja 'nopea konvoluutio' -muoto.

10.4.4 Äärellisten sanapituuksien vaikutusten analysointi

Tavallisesti suotimen kertoimet joudutaan esittämään joko 8 tai 16 bittisinä lukuina ja suodinta vastaavan differenssiyhtälön laskutoimitukset tehdään jollain äärellisellä tarkkuudella. Näiden vaikutusten analysointi on välttämätöntä suotimen oikean toiminnan varmistamiseksi.

Suotimen suunniteltuun toimintaan vaikuttavat seuraavat tekijät:

- signaalien kvantisointi, erityisesti AD-muuntimessa syntyvä kohina,
- kertoimien kvantisointi, tämä vaikuttaa suotimien taajuusvasteeseen, ja saattaa tehdä IIR-suotimesta epästabiilin,
- pyöristysvirheet lukujen esityksissä voidaan tulkita kohinaksi; pyöristämiseen joudutaan turvautumaan koska käytettävissä oleva lukujen esitystarkkuus on äärellinen (8, 16, 32 bittiä),
- ylivuoto: käytettävissä oleva lukualue ei riitä.

10.4.5 Suotimen toteutus

Aikatasossa ajateltuna suotimen toteutuksessa tarvittavia toimenpiteitä ovat kertominen, yhteen- ja vähennyslaskut ja viiveet. Näitä varten tarvitaan seuraavia peruspalikoita:

- muistia (ROM) suotimen kertoimien tallentamiseen,
- muistia (RAM) tarvittavien signaalin termien tallentamiseen ($\{x[n], x[n-1], \ldots\}$, ja $\{y[n], y[n-1], \ldots\}$),
- kertoja (joko ohjelmallisesti tai raudalla toteutettu),
- summain tai aritmeettis-looginen yksikkö.

Jos suodatetaan jo muistissa olevia signaaleja, niin tällöin on kätevintä käyttää korkean tason ohjelmointikieliä suotimien toteutukseen (MATLAB™ lienee tarkoitukseen soveltuvin).

Reaaliaikaisessa prosessoinnissa joudutaan turvautumaan erityisesti tarkoitusta varten suunniteltujen prosessoreiden käyttöön, varsinkin jos signaalien taajuudet ovat korkeita.

11 FIR-suotimien suunnittelu

FIR-suotimien kuvaamiseen käytetään aikatasossa yhtälöä

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] \tag{11.1}$$

ja z-tasossa yhtälöä

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]z^{-k} \ . \tag{11.2}$$

Jono $h[n]$ on suotimen impulssivaste. Koska impulssivaste on äärellisen mittainen, on suodin aina stabiili.

FIR-suotimien vaihevaste voi olla täysin lineaarinen ja suotimien toteutus on helppoa; DSP-prosessoreissa on osia, jotka on suunniteltu FIR-suotimia varten.

11.1 Lineaarinen vaihevaste

Suotimen vaiheviive kertoo sen, kuinka eri taajuudet viivästyvät läpäistessään suotimen ja ryhmäviive kertoo sen, kuinka paljon koko signaali viivästyy suotimessa.

Vaiheviive $\tau_p = -\theta(\omega)/\omega$ ja ryhmäviive $\tau_g = -d\,\theta(\omega)/d\omega$.

Suotimen vaihevasteen sanotaan olevan lineaarinen, jos $\theta(\omega) = -\alpha\omega$ tai $\theta(\omega) = \phi - \alpha\omega$, missä ϕ ja α ovat vakioita.

Jotta vaiheviive olisi lineaarinen, on suotimen impulssivasteen oltava positiivisesti symmetrinen

$$\begin{aligned} h[n] &= h[N-n-1], \\ &\begin{cases} n = 0, 1, \ldots, (N-1)/2, & N \text{ pariton} \\ n = 0, 1, \ldots, (N/2)-1, & N \text{ parillinen} \end{cases} \\ \alpha &= (N-1)/2\ . \end{aligned} \tag{11.3}$$

Suotimen vaihevaste (α) riippuu siis vain suotimen pituudesta.

Vakio ryhmäviive edellyttää puolestaan negatiivistä symmetriaa

$$\begin{aligned} h[n] &= -h[N-n-1]\ , \\ \alpha &= (N-1)/2\ , \\ \phi &= \pi/2\ . \end{aligned} \tag{11.4}$$

11.2 FIR-suotimen suunnittelun vaiheet

Suotimen suunnitteluun kuuluu luvussa 10.4 kuvatut vaiheet: määrittely, kertoimien laskeminen, toteutusmalli, virheanalyysi ja toteutus.

11.2.1 FIR-suotimen määrittely

Vaihevasteen määrittelyksi riittää positiivisen tai negatiivisen symmetrian valitseminen.

Suotimen amplitudi-vaihe -vaste kuvataan usein raja-arvojen avulla, eli määrittelemällä rajataajuudet (f_p ja f_s), rippelit (δ_p ja δ_s, usein desibeleinä) sekä näytteenottotaajuus F_s.

Usein suunnittelussa joudutaan myös rajoittamaan suotimen kertoimien määrää.

11.2.2 FIR-suotimen kertoimien laskutapoja

Ikkunamenetelmä

Tämä menetelmä perustuu suotimen taajuusvasteen ja impulssivasteen Fourier-muunnos yhteyteen:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} H(\mathrm{e}^{j\omega}) \mathrm{e}^{j\omega n} \, d\omega \ . \tag{11.5}$$

Esim. ideaalisen alipäästösuotimen, jonka katkaisutaajuus on ω_c, impulssivaste ($T = 1$ normeerauksella taajuusskaalassa) on

$$h[n] = \frac{2 f_c \sin n\omega_c}{n\omega_c} \ . \tag{11.6}$$

Ideaaliset impulssivasteet ylipäästö-, kaistanpäästö ja kaistanestosuotimille saadaan myös esitettyä sinc-funktion avulla.

Koska $h[n] = h[-n]$, on suotimen taajuusvaste lineaarinen ($\alpha = 0$). Periaatteessa suotimen impulssivaste on ääretön, ja jotta siitä saataisiin FIR-suodin, joudutaan impulssivaste katkaisemaan jostain arvosta M asettamalla $h[n] = 0$ kun $n \geq M$. Katkaisu aiheuttaa rippeliä ja Gibbsin ilmiön.

Katkaiseminen voidaan tulkita impulssivasteen ja funktion $w[n] = 1$ (kun $0 \leq n < M$) tuloksi. Fourier-tasossa tämä tarkoittaa funktioden $H(\mathrm{e}^{j\omega})$ ja $W(\mathrm{e}^{j\omega})$ konvoluutiota ja koska $W(\mathrm{e}^{j\omega})$ on sinc-tyyppinen, johtaa katkaisu rippeliin ja Gibbsin ilmiöön suotimen taajuusvasteessa.

Käytännössä $w[n]$ korvataan sopivalla ikkunafunktiolla, jolla suodin saadaan vaimenemaan siististi ja katkaisun aiheuttamat ongelmat vältetään osittain.

Yksi eniten käytetyistä ikkunafunktioista on *Hamming-ikkuna*:

$$\begin{aligned} w[n] &= 0.54 + 0.46 \cos(2\pi/N), \\ &\quad \begin{cases} -(N-1)/2 \leq n \leq (N-1)/2, & N \text{ pariton} \\ -N/2 \leq n \leq N/2, & N \text{ parillinen} \end{cases} \\ &= 0 \quad \text{muulloin} \end{aligned} \tag{11.7}$$

Suotimen pituuden ja Hamming-ikkunan siirtymäkaistan leveyden välillä on yhteys $\Delta f = 3.3/N$. Suurin Hamming-ikkunalla saavutettava vaimennus estokaistalla on 53 dB ja päästökaistan rippelin maksimiarvo on ~ 0.0194 dB.

Optimaalinen menetelmä

Optimaalisen menetelmän mukaiseen suotimen kertoimien laskemiseen on hyviä suunnitteluohjelmia.

Ikkunamenetelmällä suunniteltujen suotimien rippeli on maksimissaan siirtymäkaistan reunoilla ja vaimenee edettäessä näistä reunoista poispäin.

Optimaalisen menetelmän tavoitteena on tehdä rippelin amplitudista vakio. Käytännössä päästökaistan rippeli vaihtelee välillä $(1 - \delta_p)$ — $(1 + \delta_p)$ ja estokaistan rippeli on välillä $0 - \delta_s$.

Ideaalisen suotimen ja todellisen suotimen välistä virhettä $E(\omega)$ kuvaa erotus

$$E(\omega) = W(\omega)[H_i(\omega) - H(\omega)] \ , \qquad (11.8)$$

missä $H_i(\omega)$ on ideaalisen suotimen taajuusvaste. Optimaalissa menetelmässä tavoitteena on minimoida virhe $(\min[\max|E(\omega)|])$ sekä päästö- että estokaistoilla.

Menetelmän ideana on iteratiivinen algoritmi, jossa suotimen kertoimia muutetaan rippeleiden ääriarvoihin liittyvien taajuuksien perusteella.

Kun ääriarvojen paikat tunnetaan, saadaan suotimen taajuusvaste ratkaistua helposti ja taajuusvasteesta saadaan sitten käänteisellä Fourier-muunnoksella impulssivaste.

Suotimeen tarvittavaa kertoimien määrää voidaan estimoida monilla käytäntöön perustuvilla laskukaavoilla.

Taajuusnäytteiden otto

Ottamalla suotimen taajuusvasteesta näytteitä tasavälein kF_s/N $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$, saadaan suotimen impulssivaste ratkaistua diskreetillä käänteisellä Fourier-muunnoksella

$$h[n] = \sum_{k=0}^{N-1} H[k] e^{j(2\pi/N)nk} \ , \qquad (11.9)$$

missä $H[k]$:t ovat ideaalisen taajuusvasteen näytteitä.

Muunnoksella saadun suotimen taajuusvaste vastaa ideaalista suodinta tarkasti näytepisteissä, mutta poikkeaa tästä näytepisteiden välillä. Mitä enemmän näytepisteitä otetaan, sitä paremmin suodin vastaa tavoiteltua ideaalista suodinta.

Suodattimen estokaistan vaimenemiselle voidaan esittää arvio $(25 + 20M)$ dB, missä M on siirtymäkaistalta otettujen näytteiden määrä ja siirtymäkaistan leveys on $\sim (M+1)F_s/N$, missä N on suotimen pituus.

Suotimen taajuusnäytteiden otto voidaan tehdä myös rekursiivisesti, mikäli joudutaan käyttämään paljon näytteitä – tällä tavalla suotimesta itsestäänkin voidaan tehdä rekursiivinen. Mikäli suotimen kertoimet ovat vielä kokonaislukuja, saadaan suotimesta todella nopeasti toimiva.

Yhteenvetona edellä esitetyistä menetelmistä voidaan todeta seuraavaa:

- Optimaalinen menetelmä on helppo ja tehokas tapa ratkaista FIR-suotimen kertoimet ja tuloksena saadaan suodin, jonka amplitudivaste on hyvä järkevällä kerroinmäärällä. Erityisen hyvin menetelmä soveltuu diskreettien signaalien derivaattaa approksimoivien suotimien suunnitteluun.

- Jos suotimen esto- ja päästökaistojen rippelit ovat yhtäsuuret, eikä käytössä ole optimaalisen menetelmän mukaista suunnitteluohjelmaa, niin ikkuna-menetelmä tarjoaa laskennallisesti yksinkertaisen vaihtoehdon suotimen suunnitteluun. Tällä menetelmällä suunnittelijan on kuitenkin vaikea kontrolloida tarkasti katkaisutaajuuksia ja rippeleitä.

- Taajuusnäytteiden otto -menetelmä on ainut menetelmä, jolla on mahdollista suunnitella sekä suoria että rekursiisivisiä suotimia, joten menetelmää on käytettävä mikäli rekursiivinen toteutus on laskennallisesti järkevä toteuttaa. Menetelmällä on myös mahdollista ratkaista sellaisen suotimen kertoimet, jonka amplitudi-vaihe -vaste on mielivaltainen. Menetelmällä ei kuitenkaan voida tarkkaan hallita rajataajuuksia ja rippeleitä.

Suunniteltu alipäästösuodin voidaan muuntaa ylipäästösuotimeksi määrittelmällä kertoimet $h_{\mathrm{hp}}[n] = (-1)^n h_{\mathrm{lp}}[n]$. Näiden suotimien taajuusvasteiden välillä on yhteys $H_{\mathrm{hp}}(f) = H_{\mathrm{lp}}(F_s/2 - f)$.

11.2.3 FIR-suotimen esitysmuodot

Suora muoto

Suotimen ulostulo saadaan konvoluutiolla

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} h[k]x[n-k] \ . \tag{11.10}$$

Tätä yhtälöä vastaava suotimen lohkokaavio koostuu viiveistä z^{-1} ja summaimista. Digitaalisessa toteutuksessa viive toteutetaan joko siirtorekisterillä tai muistipaikoilla.

Suotimen toteutus vaatii $N-1$ muistipaikkaa sisäänmenonäytteille, N muistipaikkaa suotimen kertoimille, N kertolaskua ja $N-1$ yhteenlaskua aina yhtä ulostuloarvoa kohden.

Lineaarinen vaihe -rakenne

Tässä rakenteessa hyödynnetään suotimen kertoimien symmetrisyyttä: $h[n] = \pm h[N-n-1]$.

Tämän perusteella suotimen siirtofunktio saadaan, sen kertoimien määrän N ollessa pariton, muotoon

$$\begin{aligned} H(z) &= \textstyle\sum_{n=0}^{(N-1)/2-1} h[n]\{z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\} + \\ &\quad h\left[\tfrac{N-1}{2}\right] z^{-(N-1)/2} \end{aligned} \tag{11.11}$$

ja N:nnän ollessa parillinen, muotoon

$$H(z) = \sum_{n=0}^{N/2-1} h[n]\{z^{-n} + z^{-(N-1-n)}\} \ . \tag{11.12}$$

Laskennallisesi nämä esitysmuodot ovat suoraan muotoon verrattuna tehokkaampia, koska laskutoimituksia tarvitaan noin puolet suoran esityksen laskutoimituksista. Saatu hyöty hukkuu kuitenkin osittain kertoimien monimutkaisempaan indeksointiin.

Muita esitysmuotoja

Nopean konvoluution -menetelmässä konvoluutio toteutetaan Fourier-tason kertolaskuna. Tämä vaatii diskreettien Fourier-muunnosten laskemisen $h[n]$:lle ja $x[n]$:lle.

Suodin voidaan esittää myös pelkästään sen taajuusvasteesta otettujen näytteiden avulla (vrt. taajuusnäytteiden menetelmä suotimen kertoimien laskemisessa).

Valinta eri esitystapojen välillä riippuu lukuisista seikoista, kuten suotimen realisoinnin helppoudesta, impulssifunktion tai siirtofunktion ratkaisemisen vaikeudesta ja ratkaisun herkkyydestä kertoimien pyöristykselle.

Suora rakenne on helppo ohjelmoida ja sen toteutus on tehokas monilla DSP-prosessoreilla.

Kaskadirakenne ei ole niin herkkä kertoimien virheille ja kvantisointikohinalle kuin suora rakenne, toisaalta sen kertoimien ratkaiseminen on monimutkaisempaa ja monet DSP-prosessorit eivät sovellu sen toteutukseen.

Nopean konvoluution menetelmällä on monia laskennallisia etuja muihin verrattuna, mutta se vaatii tehokkaan FFT-toteutuksen.

Taajuusnäytteiden menetelmän mukainen suotimen rakenne on sopivampi kapeakaistaisille suotimille kuin suora rakenne, koska vain pieni osa kertoimista poikkeaa nollasta. Toteuksen ohjelmointi on kuitenkin monimutkaisempaa.

Stabiilisuusongelmien välttämiseksi taajuusnäytteiden menetelmän antamat navat ja nollat kannattaa sijoittaa yksikköympyrän kehän sisäpuolelle, esim. etäisyydelle $r = 0.99$.

11.2.4 Äärellisen sanapituuden vaikutukset FIR-suotimissa

Käytännössä FIR-suotimet toteutetaan tarkoitusta varten suunnitelluilla DSP-prosessoreilla tai, jos halutaan todella nopea sovellus, erillisillä rakennuspalikoilla (muistit, kertojat, summaimet jne.). Molemmissa tapauksissa kustannus- ja tehokkuussyistä suotimen kertoimien esittämiseen, samoin kuin käsiteltävien signaalien esittämiseen ja laskutoimituksiin voidaan käyttää hyvin rajoitettua määrää bittejä. Tästä aiheutuvat virheet voidaan jakaa neljään luokkaan:

1. AD-muunnoksessa syntyvä kvantisointikohina,
2. suotimen kertoimien kvantisointivirheet,
3. laskutoimitusten tulosten pyöristysvirheet,
4. lukualueen ylitykset laskuissa.

Kertoimien kvantisoitivirheet

Suunnittelumenetelmien antamat suotimien kertoimet on tyypillisesti esitetty suurella tarkkuudella, esim. 32-bittisenä lukuna. Kun nämä luvut joudutaan esittämään suotimen toteutusvaiheessa esim. vain 16 bitin avulla, syntyy pyöristysvirhettä, joka vaikuttaa suotimen Fourier-tason ominaisuuksiin.

Joissakin tapauksissa voidaan suotimen suunnitteluvaiheessa laskea suotimen taajuusvaste eri kertoimien esitystarkkuuksilla ja sitten valita näistä lyhyin, joka vielä täyttää suotimelle asetetut vaatimukset.

Kvantisoidut kertoimet voidaan esittää muodossa

$$h_q[n] = h[n] + e[n], \quad n = 0, 1, \ldots, N_1 \ , \tag{11.13}$$

missä $e[n]$ kvantisoinnissa kertoimeen $h[n]$ syntynyt virhe. Taajuustasossa

$$H_q(\mathrm{e}^{j\omega}) = H(\mathrm{e}^{j\omega}) + E(\mathrm{e}^{j\omega}) \ , \tag{11.14}$$

missä $E(\mathrm{e}^{j\omega})$ on kvantisointivirheen Fourier-muunnos. Virheen voidaan siis tulkita edustavan ylimääräistä suodinta, joka on kytketty alkuperäisen, suunnitelun suotimen, rinnalle.

Virheen suuruutta approksimoidaan tyypillisesti kaavoilla

$$\begin{aligned} |E(\mathrm{e}^{j\omega})| &= N2^{-B} \\ |E(\mathrm{e}^{j\omega})| &= 2^{-B}\sqrt{N/3} \\ |E(\mathrm{e}^{j\omega})| &= 2^{-B}\sqrt{N\log_e N/3} \end{aligned} \ , \tag{11.15}$$

missä B on kertoimien esittämiseen käytettyjen bittien määrä ja N on suotimen pituus. Esitetyistä lausekkeista ensimmäinen antaa absoluuttisen ylärajan virheelle, ja on käytännössä ylipessimistinen. Kaksi muuta arvioita perustuvat virheen tilastollisiin ominaisuuksiin.

Kertoimien kvantisointi vaikuttaa eniten päästökaistan rippelin maksimiarvoon ja estokaistan suurimpaan saavutettavissa olevaan vaimennukseen. Suotimien suunnitteluvaiheessa kertoimien kvantisointivirheiden aiheuttamia vaikutuksia voidaan minimoida käyttämällä jotain optimointimenetelmää, jolla haetaan paras mahdollinen ratkaisu.

Pyöristysvirheet

Tyypillisesti prosessoinnissa käytetään 12 bittiä signaalin esittämiseen ja 16 bittiä kertoimien esittämiseen. Jokaisen kertolaskun jälkeen kertoimien tulo $h[k]x[n-k]$ sisältää enemmän bittejä kuin tulon tekijät (12 ja 16 bittisten lukujen tulossa on 28 bittiä). Näitä tuloja joudutaan pyöristämään 16 bittiin muistiin tallennusta varten ja vielä 12 bittiin DA-muunnosta varten. Näitä muunnosten virheitä kutsutaan pyöristysvirheiksi.

Pyöristysvirheiden vaikutus voidaan minimoida esittämällä kaikkien laskujen tulokset riittävällä tarkkuudella ja tekemällä pyöristys vasta signaaliin $y[n]$.

Ylivuotovirheet

Ylivuotovirhe syntyy, kun kahden luvun summa tai tulo ylittää käytettävissä olevan lukualueen. (Esim. 8 bitillä voidaan esittää luvut $0 - 255$, ja jos laskettaan yhteen $150 + 150$, syntyy ylivuototilanne.)

Ylivuotovirheiden välttämiseksi voidaan suotimen kertoimet ja/tai signaalit normeerata/skaalata. Signaalinin skaalaus parantaa lisäksi signaali-kohina-suhdetta.

12 IIR-suotimien suunnittelu

IIR-suodin voidaan aikatasossa esittää rekursiivisenä differenssiyhtälönä

$$y[n] = \sum_{k=0}^{\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=0}^{N} a_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{M} b_k y[n-k] \ , \tag{12.1}$$

missä $h[n]$ on periaatteessa ääretön kestoinen systeemin impulssivaste ja kertoimet a_k ja b_k määrittelevät suotimen. Suotimen siirtofunktio voidaan esittää z-muunnoksen avulla muodossa

$$H(z) = \frac{a_0 + a_1 z^{-1} + \ldots + a_N z^{-N}}{1 + b_1 z^{-1} + \ldots + b_M z^{-M}} \ . \tag{12.2}$$

IIR-suotimien suunnitelu voidaan nähdä suotimen kertoimien a_k ja b_k ratkaisuongelmana, jossa ratkaisua rajoittavat suotimelle asetetut vaatimukset.

IIR-suotimissa on takaisinkytkentää, ts. aiemmat ulostuloarvot vaikuttavat uusiin ulostuloarvoihin. Tämä takaisinkytkentä ja sen käytön joustavuus on IIR-suodinten suurin etu verrattuna FIR-suotimiin.

IIR-suotimien toteutuksessa tarvitaan vähemmän kertoimia kuin FIR-suotimen toteutuksessa, joten IIR-suodin soveltuu erityisen hyvin jyrkkien ja kapeakaistaisten suodinten toteukseen.

IIR-suotimien suunnittelu on vaikeampaa kuin FIR-suotimien, koska suotimen stabiilisuus ei ole taattu.

12.1 IIR-suotimen suunnittelun vaiheet

Suotimen suunnitteluun kuuluu luvussa 10.4 kuvatut vaiheet: määrittely, kertoimien laskeminen, toteutusmalli, virheanalyysi ja toteutus.

12.1.1 IIR-suotimen määrittely

Suotimen suunnitelua varten on a) selvitettävä signaalin luonne (signaalin lähteet, taajuus, I/O-liittymä jne.), b) määriteltävä suotimen haluttu taajuusvaste, c) ratkaistava suotimen toteutustapa (ohjelmallisesti vaiko DSP-prosessorilla) ja d) otettava huomioon muut mahdolliset rajoitteet, kuten hinta.

Taajuusriippuvat suotimet kuvataan usein tavoiteltavien raja-arvojen avulla, eli määritellään rippelit δ_p ja δ_s, sekä päästö- ja estokaistojen siirtymätaajuudet f_p ja f_s.

12.1.2 IIR-suotimen kertoimien laskutapoja

Tavallisesti IIR-suodin suunnitellaan kahdessa vaiheessa: ensin 'suunnitellaan' analoginen suodin esim. Laplace-tasossa ja muunnetaan se sitten digitaaliseksi IIR-suotimeksi.

Yksinkertaisen suotimien suunnitteluun voidaan käyttää myös napojen ja nollien sijoittamiseen z-tasoon perustuvaa menetelmää.

Napa-nolla-menetelmä

Nolla z-tasossa tuottaa taajuusvasteeseen nollan kyseiseen kohtaan ja napa puolestaan tarkoittaa piikkiä suotimen taajuusvasteessa. Mitä lähempänä navat ja nollat ovat yksikköympyrän kehää, sitä suurempi on niiden vaikutus.

Sijoittamalla sopivasti napoja ja nollia z-tasoon voidaan suunnitella yksinkertaisia ali- yli- ja kaistanpäästösuotimia. Tässä menettelyssä on tärkeää muistaa, että jos suotimen kertoimet halutaan pitää reaalisina, niin tällöin napojen ja nollien on joko oltava reaalisia tai niiden pitää esiintyä kompleksikonjugaattipareina.

12.2 Analogiasuotimien muuntaminen digitaalisiksi

Kirjallisuudesta löytyy hyvin paljon eri tarkoituksiin suunniteltuja analogisia suotimia, joten niitä on järkevää hyödyntää digitaalisten suotimien suunnittelussa.

Suotimien muuntamiseen analogisista digitaalisiksi on kehitetty muutamia menetelmiä, kuten impulssi-riipumaton menetelmä ja bilineaarien menetelmä.

12.2.1 Impulssiriippumaton menetelmä

Menetelmässä lähdetään liikkeelle Laplace-tasossa suunnitellusta suotimesta $H(s)$. Ensin ratkaistaan suotimen impulssivaste $h(t)$, josta sitten otetaan näytteitä, jolloin saadaan $h[n] = h(nT)$. Suotimen digitaalinen siirtofunktio $H(z)$ saadaan sitten $h[n]$:stä z-muunnoksella.

Laplace-tason ja z-tason välille voidaan johtaa yhteys

$$\frac{C}{s-p} \rightarrow \frac{C}{1-\mathrm{e}^{pT}z^{-1}} \,. \tag{12.3}$$

Jos $H(s)$ sisältää korkeamman asteen termejä, niin tällöin $H(s)$ hajotettava osamurtokehitelmän avulla ensimmäisen asteen termeiksi, jotta yhtälöä (12.3) voidaan soveltaa.

Impulssiriippumatonta menetelmää käytettäessä näytetaajuuden on oltava riittävän suuri, jotta vältytään aliasing-ilmiöltä. Impulssiriippumatonta menetelmää voidaan käyttää alipäästösuodinten muuntamisiin digitaalisiksi, mutta menetelmä ei sovellu kaistanpäästö- tai ylipäästösuotimien muuntamiseen ilman anti-aliasing-suodinta.

12.2.2 Bilineaarinen z-muunnos

Bilineaarisessa muunnoksessa Laplace-taso kuvataan z-tasoksi sijoituksella

$$s = \frac{z-1}{z+1} \,. \tag{12.4}$$

Analogisen ω' ja digitaalisen taajuuden ω välille saadaan yhtälöstä (12.4) sijoituksilla $z = \mathrm{e}^{j\omega T}$ ja $s = j\omega'$ yhteys

$$\omega' = \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) \,. \tag{12.5}$$

Yhtälö on pienillä taajuuksilla lineaarinen, mutta suurilla taajuuksilla digitaalisen suotimen taajuusvaste vääristyy, esim. kaistanpäästösuodin kapenee. Ongelmaa voidaan korjata Laplace-tasossa korvaamalla s muuttujalla s/ω', missä rajataajuus ω' on ratkaistu yhtälöstä (12.5) käyttäen digitaalisena taajuutena ω suotimelle tavoitteeksi asetettua rajataajuutta.

Edellä kuvattu menettely toimii ainoastaan analogisten alipäästösuotimien muuntamisessa digitaalisiksi. Mikäli halutaan suunnitella digitaalisia ylipäästö- tai kaistanpäästö- tai kaistanestosuotimia, voidaan käyttää jotain seuraavista menetelmistä:

1. Digitaalisen suotimen määrittelyjen perusteella valitaan sopiva analoginen alipäästösuodin. Sopivalla analogisella muunnoksella alipäästösuodin muutetaan haluttuun muotoon. Analogisesta suotimesta voidaan tehdä digitaalinen bilineaarisella muunnoksella.

2. Sopivan analogisen suotimen valinnan jälkeen suotimen navat ja nollat kuvataan Laplace-tasossa haluttua suodinta vastaaviin paikkoihin. Nämä haluttua suodinta vastaavat navat ja nollat kuvataan z-tasoon bilineaarisella muunnoksella, jonka jälkeen suotimen siirtofunktio $H(z)$ voidaan ratkaista napojen ja nollien avulla.

3. Analogisesta suotimesta johdettu digitaalinen alipäästösuodin muunnetaan halutunlaiseksi sopivalla muunnoksella (esim. kerroin $(-1)^n$ tekee suotimesta ylipäästösuotimen).

Tarvittavat analogiset muunnokset on helpointa tehdä Laplace-tasossa, jossa muunnoksissa voidaan käyttää sijoituksia

$$
\begin{aligned}
s &= \frac{s}{\omega_p'} && \text{alipäästösuodin} \\
s &= \frac{\omega_p'}{s} && \text{alipäästösuotimesta ylipäästösuotimeksi} \\
s &= \frac{s^2+\omega_0^2}{Ws} && \text{alipäästösuotimesta kaistanpäästösuotimeksi} \\
s &= \frac{Ws}{s^2+\omega_0^2} && \text{alipäästösuotimesta kaistanestosuotimeksi ,}
\end{aligned}
\tag{12.6}
$$

missä ω_p' on alipäästösuotimen rajataajuus, $\omega_0 = \omega_1'\omega_2'$ ja $W = \omega_2' - \omega_1'$. Taajuudet ω_1' ja ω_2' ovat kaistanesto- ja kaistanpäästösuotimien rajataajuudet.

Muunnoksia tehtäessä alipäästösuotimen navat ja nollat sijoitetaan muunnosyhtälöissä vasemmalle puolelle, jolloin yhtälöstä voidaan ratkaista muunnetun suotimen navat ja nollat ratkaisemalla oikean puolen s.

Esim. kaistanpäästösuotimen navoille ja nollille saadaan yhtälö

$$
s_{b,k} = \frac{W}{2}\left[s_{l,k} \pm \left(s_{l,k}^2 - \frac{4\omega_0^2}{W^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] , \tag{12.7}
$$

missä $s_{l,k}$:t ovat alipäästösuotimen navat ja nollat ja $s_{b,k}$:t ovat kaistanpäästösuotimen navat ja nollat.

Korkeamman asteen suotimien purkaminen ensimmäisen tai toisen asteen tekijöistä koostuviin osiin voidaan tehdä joko Laplace-tasossa $H(s)$:lle tai z-tasossa $H(z)$:lle.

Napa- ja nolla-kompleksikonjugaattiparit voidaan yhdistää siirtofunktiossa toisen asteen termiksi:

$$
\begin{aligned}
H_i(z) &= \frac{(z-z_{z,k})(z-z_{z,k}^*)}{(z-z_{p,k})(z-z_{p,k}^*)} \\
&= \frac{1+a_{1i}z^{-1}+a_{2i}z^{-2}}{1+b_{1i}z^{-1}+b_{2i}z^{-2}}
\end{aligned} ,
\tag{12.8}
$$

missä alaindeksi z viittaa nollakohtaan ja alaindeksi p napaan. Koko siirtofunktio saadaan esitettyä tekijöiden $H_i(z)$ tulona.

12.3 IIR-suotimien esitysmuodot

Yhtälöiden (12.1) ja (12.2) mukaisille IIR-suotimille voidaan käyttää suoraa tai kanonista esitysmuotoa suotimen ensimmäisen tai toisen asteen lohkoille ja kaskadi tai rinnakkaista esitysmuotoa näistä lohkoista kasatulle kokonaiselle suotimelle.

Suorassa muodossa kaikilla termeillä on omat viivelohkonsa, kanonisessa muodossa käytetään yhteistä viivelohkoa sekä osoittajan että nimittäjän termeille.

Kanoninen muoto on suositumpi, koska siinä pyöristysvirheiden vaikutus on vähäisempi ja muistielementtejä viiveitä varten tarvitaan vähemmän. Kanonisen muodon heikkoutena on herkkyys sisäiselle ylivuodolle, jonka välttämiseksi signaalit on skaalattava sopivasti.

Kaskadi-esityksessä suodin esitetään $N/2$:na toisen asteen tekijän tulona:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{N/2} \left[\frac{a_{0k} + a_{1k}z^{-1} + a_{2k}z^{-2}}{1 + b_{1k}z^{-1} + b_{2k}z^{-2}} \right] = \prod_{k=1}^{N/2} \frac{N_k(z)}{D_k(z)} \,. \tag{12.9}$$

Jos N on pariton, niin yksi tulon tekijöistä on ensimmäistä astetta.

Tulomuotoisen esityksen takia yhteen kaskadiin tulevat osoittajan ja nimittäjän tekijät voidaan valita vapaasti, vaihtoehtoja on $[(N/2)!]^2$.

Parit $\{N_i(z),\ D_k(z)\}$ kannattaa valita s.e. $N_i(z)$:t nollat ovat mahdollisimman lähellä $D_k(z)$:n napoja, jotta vältetään suuri amplitudivaste ko. napoihin liittyvällä taajuudella. Lisäksi se toisen asteen tekijä, jonka navat ovat lähimpänä yksikköympyrää, kannattaa sijoittaa viimeiseksi kaskadissa.

12.4 Äärellisen sanapituuden vaikutusten analysointi

Tärkeimmät virhelähteet IIR-suotimissa ovat

- AD-muunnoksen kvantisointikohina,
- kertoimien a_k ja b_k kvantisointivirheet,
- ylivuotovirheet,
- tulosten pyöristysvirheet.

Virheiden vaikutus riippuu kolmesta tekijästä: 1) käytetystä sananpituudesta ja suotimen toteutukseen käytetystä aritmetiikasta, 2) kvantisointitavasta ja 3) suotimen rakenteesta.

12.4.1 AD-muunnoksen kvantisointikohina

Kvantisointikohinan varianssi $\sigma_A^2 = q^2/12 = 2^{-2B}/3$, missä q on eri kvantisointitasojen erotus ja B on AD-muunnoksessa käytettyjen bittien määrä.

Kvantisointikohina suotimen ulostulossa saadaan laskettua kaavasta

$$\sigma_{oA}^2 = \sigma_A^2 \sum_{k=0}^{\infty} h^2[k] \ . \tag{12.10}$$

Jos AD-muunnoksessa käytetään vähintään 12 bittiä, ei kvantisointikohina enää vaikuta suodattimen toimintaan. (Poikkeuksena tosihifi, jossa on käytettävä vähintään 16 bittiä.)

12.4.2 Kertoimien esitystarkkuuden vaikutukset

Suotimen kertoimien pyöristäminen siirtää suotimen napoja ja nollia z-tasossa ja vaikuttaa tätä kautta suotimen stabiilisuuteen taajuusvasteeseen.

Suotimen stabiilisuuden tarkastelu voidaan tehdä tutkimalla toisen asteen lohkojen stabiilisuutta. Toisen asteen lohkon navat ovat pisteissä

$$\begin{aligned} p_1 &= \tfrac{1}{2}\left[-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4b_2}\right] \\ p_2 &= \tfrac{1}{2}\left[-b_1 - \sqrt{b_1^2 - 4b_2}\right] \end{aligned} \ . \tag{12.11}$$

Toisen asteen napoja on kolmea eri tyyppiä: kompleksikonjugaattipari, kaksi reaalista erisuurta napaa ja toisen asteen reaalinen napa. Näistä yleisin on kompleksikonjugaattipari, joka saadaan kun $b_1^2 < 4b_2$.

Jotta suodin olisi stabiili, on sen kertoimien b_1 ja b_2 pysyttävä ehtojen $0 \leq b_2 < 1$ ja $|b_1| \leq 1 + b_2$ rajaaman kolmion sisällä, kun kertoimet merkitään (b_1, b_2) koordinaatistoon. Ehdoista ensimmäinen saadaan siitä vaatimuksesta, että suotimen napojen on pysyttyvä yksikköympyrän sisällä.

Vaikka suodin olisi stabiili tietyllä kertoimien esitystarkkuudella, voi sen taajuusvaste vielä poiketa liikaa toivotusta, joten kertoimien pyöristyksen vaikutus taajuusvasteeseen on tarkasteltava vielä erikseen.

12.4.3 Ylivuotovirheet yhteenlaskuissa

Ylivuotovirheet voivat vaikuttaa eri tavoilla, esim. suurten positiivisten lukujen yhteenlasku voi antaa tulokseksi suuren negatiivisen luvun, riippuen aritmetiikan toteutuksesta. Takaisinkytkennän ansiosta ylivuotovirheet voivat kasautua IIR-suotimissa.

Ylivuotojen välttämiseksi signaaleja joudutaan skaalaamaan, koska skaalaus kuitenkin heikentää signali-kohinasuhdetta, joudutaan skaalaustekijän valintaan kiinnittämään erityistä huomioita.

Skaalauksessa sisäänmenosignaali jaetaan skaalaustekijällä ja suotimen vahvistuksen säilyttämiseksi kertoimet a_k kerrotaan skaalaustekijällä. Kanoniselle perusrakenteelle skaalaustekijän valintaan on kolme tapaa.

1. Skaalaustekijä lasketaan kanonisen muodon ensimmäisen summainen jälkeisen impulssivasteen itseisarvojen summana:

$$s_1 = \sum_{k=0}^{\infty} |f[k]| \ . \tag{12.12}$$

2. Skaalaustekijänä käytetään $f[n]$:n kakkosnormia:

$$s_1 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} f^2[k] \right]^{\frac{1}{2}} \ . \tag{12.13}$$

3. Skaalaustekijänä käytetään impulssivasteen $f[n]$ Fourier-muunnoksen maksimiarvoa

$$s_1 = \max |F(\mathrm{e}^{j\omega})| \ . \tag{12.14}$$

Suoran rakenteen skaalaaminen ei yleensä ole tarpeen. Jos skaalaus tehdään, niin silloin kertoimet a_k jaetaan ja ulostulo kerrotaan skaalaustekijällä.

Kaskadirealisaatiossa skaalauksessa sisäänmenosignaali jaetaan tekijällä s_1, seuraavan lohkon sisäänmeno kerrotaan tekijällä s_1/s_2, sitä seuraava tekijällä s_2/s_3, jne. Viimeisen lohkon sisäänmeno kerrotaan tekijällä s_{N-1}/s_N ja ulostulo kerrotaan tekijällä s_N.

Rinnakkaisrealisaatiossa jokainen lohko skaalataan erikseen jakamalla lohkojen sisäämenot tekijällä s_i ja kertomalla vastaavan lohkon a_{ik} kertoimet s_i:llä.

12.4.4 Pyöristysvirheet kertolaskuissa

Suotimen toteutuksessa signaalia kerrotaan suotimen tekijöillä a_k ja b_k. Kertolaskujen tulokset joudutaan sitten pyöristämään käytettävissä olevaan esitystarkkuuteen, tässä syntyvää virhettä kutsutaan pyöristysvirheeksi. Virhe huonontaa suotimen signaali-kohina-suhdetta.

Teho, jolla pyristyksen aiheuttama kohina vaikuttaa, saadaan kohinan varianssista $\sigma_r^2 = q^2/12$. Suotimen toisen asteen suorassa muodossa olevan lohkon ulostulossa esiintyvä kohinan teho saadaan kaavasta

$$\sigma_o^2 = \sigma_{oA}^2 + \sigma_{or}^2 = \frac{q^2}{12}\left[||H(z)||^2 + 5||F(z)||^2\right] \ , \quad (12.15)$$

missä $F(z) = 1/(1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2})$.

Kanonisessa muodossa vastaava kohina on

$$\sigma_o^2 = \frac{q^2}{12}\left\{3[||s_1 H(z)||^2 + 1] + ||H(z)||^2\right\} \ . \quad (12.16)$$

Kaskadimuotoisen suotimen kokonaiskohina saadaan laskemalla yhteen eri lohkoissa syntyvä kohina.

Rinnakkaismuotoisessa toteutuksessa kohinat summataan ulostulossa yhteen; L:stä rinnakkaisesta lohkosta koostuvan suotimen pyöristysvirheiden kokonaisvaikutus ulostulossa on

$$\sigma_o = \frac{q^2}{12}\left[2L + 1 + 3\sum_{i=1}^{L} s_i^2 ||H(z)||^2\right] \ . \quad (12.17)$$

Virheanalyysi ja virheiden vaikutusten minimointi tehdään suotimien suunnitteluohjelmistoilla. Pyöristysvirheiden välttämiseksi suotimen kertoimet optimoidaan s.e. virheiden vaikutus suotimen tietyillä taajuusalueilla minimoituu[a].

[a] virheen spektrin muokkaus, ESS = Error Spectral Shaping