

Julkaisuvapaa 16.9.1999 klo 12

Funktioteorian tulo Suomeen

Olli Lehto

Esitelmä Joensuun yliopistossa 16.9.1999

Mitä funktioteoria on?

Lienee aika yleisesti tunnettua, että funktioteoria on se matematiikan osa-alue, jolla Suomen matemaatikot ovat nousseet maailmanmaineeseen ja jolla edelleen on varsin keskeinen osa matemaattisessa tutkimuksessamme. Sitä vastoin ei-matemaatikkojen parissa tuskin tiedetään, mitä funktioteoria on. Tämä tietämättömyys johtuu varmasti paljolti siitä valitettavasta tosiasiasta, että matemaattisia teorioita on hankala selittää. Matematiikan perimmäisenä lähtökohtana ovat tosin erittäin konkreettiset laskemista ja mittaamista koskevat probleemat. Mutta matematiikan muututtua kokemuksiin perustuvasta sääntöjen kokoelmasta loogisiin päättelyihin perustuvaksi tieteenksi se on kehittänyt oman kansalliset rajat ylittävän kielensä, joka on loitontunut kauas arkikielistä. Tästä johtuu, että matematiikan nykyiset tutkimustulokset vain ani harvoissa tapauksissa ovat maallikoille ymmärrettäviä.

Seuraava esitykseni on historiaa eikä matematiikkaa, mutta yritän silti muutamalla sanalla valaista, mistä funktioteoriassa on kyse. "Funktioteoria" on käänös saksalaisesta *Funktiontheorie* sanasta, mutta englannin kielen voittokulun myötä meilläkin korvataan sana funktioteoria nykyään yhä yleisemmin sen synonyymillä "kompleksianalyysi", joka on suora käänös englanninkieleen vakiintuneesta termistä *Complex Analysis*. Tästä jälkimmäisestä nimestä voi päätellä, että funktioteoriassa tutkitaan kompleksiluvuista riippuvia kompleksilukuarvoisia funktioita.

Kompleksilukuihin päädyttiin aikanaan algebrallisten kysymysten pakottamina: pikaesimerkinä historiallisesta kehityksestä käy yhtälö $x^2 = -1$. Reaalilukujen piirissä tällä yhtälöllä ei ilmiselvästi ole ratkaisua, toinen potenssihan on aina suurempi tai yhtäsuuri kuin nolla. Sen vuoksi otettiin käyttöön "imaginääriyksikkö" i . Kompleksilukujen tarkka määrittely annetaan reaalilukuparien avulla, ja jokainen kompleksiluku voidaan esittää muodossa $a+ib$, missä a ja b ovat reaalisia.

Kun kompleksilukuja ruvettiin käyttämään myös funktioiden tutkimiseen, paljastui uusia, ennalta aavistamattomia näköaloja. Eksponenttifunktiolla osoittautui olevan läheinen yhteys trigonometriin funktioihin, mikä seikka pysyy täysin piilossa pysyteltäessä pelkästään reaalilukujen piirissä. Kompleksisella integroinnilla, jonka uranuurtaja oli ranskalainen Cauchy Pariisissa, huomattiin olevan lähes maaginen voima. Göttingenissä saksalainen Riemann osoitti, että funktioteoriassa tutkitut analyttiset funktiot ovat konformisia, s.o., että niiden välittämässä kuvauksessa kulmien suuruus säilyy muuttumattomana. Tämä tulos toi yhteyden geometriaan, mikä on olennaisesti rikastuttanut funktioteoriaa. Cauchyn ja Riemannin ohella kolmas suuri funktioteorian pioneeri oli Berliinissä vaikuttanut Weierstrass, joka osoitti analyttisten funktioiden ja potenssisarjojen välisen yhteyden. 1800-luvun jälkipuoliskolla funktioteoriasta alkoi tulla matematiikan todellinen muotiala.

Funktioteoria tulee Suomeen

Samaan aikaan, 1800-luvun jälkipuoliskolla, jolloin funktioteoria oli lopullisesti lyönyt itsensä läpi keskeisen tärkeänä matematiikan osana, matematiikan tutkimus Suomessa oli lähtenyt voimakkaaseen nousuun. Taustalla vaikuttivat yleiset syyt, jotka koskivat kaikkien tieteiden harjoittamista maassamme. Venäläinen valloittaja oli jo 1811 määrännyt yliopiston voimavaroihin olennaisen lisäyksen, ja meillä omaksuttiin nopeasti uusi humboldtilainen näkemys, joka nosti tutkimuksen yliopiston päätehtäväksi opetuksen rinnalle. Tämä kirjattiin näkyvästi Helsinkiin muuttaneen yliopiston statuuotteihin 1828, jotka alkavat sanoin: “Yliopiston tehtävänä on edistää vapaata tutkimusta ...” (Täsmälleen näillä samoilla sanoilla alkaa viime vuonna annettu Suomen kaikkia yliopistoja koskeva laki.)

Matematiikassa tutkimusta koskeva velvoite ei jäänyt kuolleeksi kirjaimeksi, sillä heti ensimmäinen Keisarillisen Aleksanterin-yliopiston matematiikan professori af Schultén harjoitti ahkerasti tutkimustoimintaa ja pyrki lisäämään pätevyyttään opintomatalla Pariisiin. Hänen seuraajansa Lorenz Lindelöf, joka kävi Pariisissa ahkerasti, oli jo tutkija, jonka työt herättivät huomiota matemaattisessa maailmassa. Hänen uransa matematiikan oppituolin haltijana jäi kuitenkin verraten lyhyeksi, sillä hän alkoi tuntea yhä enemmän vetoa julkisiin hallintotehtäviin. Hänet valittiin yliopiston rehtoriksi, ja hän oli pitkään säätyvaltiopäivillä, ensin pappis-, sitten porvarissäädyn ja aateloiduksi tultuaan aatelin ja ritariston edustajana, porvaris- ja aatelissäädissä puhemiehenäkin.

Lorenz Lindelöf ei vielä ollut funktioteoreetikko eikä hänellä ollut ainoatakaan tohtorioppilasta. Siitä huolimatta hänellä on ansionsa funktioteorian tuloon Suomeen, sillä ilmoitettuaan eroavansa professuuristaan hän aktiivisella toiminnallaan vaikutti seuraajansa, ruotsinmaalaisen Gustaf Magnus (Gösta) Mittag-Lefflerin valitsemiseen. Mittag-Leffler oli se historiallinen henkilö, joka toi funktioteorian Suomeen.

Jo nuorena Mittag-Leffler oli herättänyt huomiota matemaattisella lahjakkuudellaan, hänestä tuli täysverinen kosmopoliitti ja onnistuneen naimakaupan ansiosta varakas – rahat olivat peräisin hänen suomalaiselta aviopuolisoltaan Signe af Lindforsilta, joka oli suurliikemies Henrik Borgströmin tyttärentytär. Albert Edelfeltin suurikokoiseen muotokuvaan ikuistama Mittag-Leffler oli värikäs, mahtipontinen ja särmikäs henkilö, mikä käy ilmi aikalaiskuvauksista ja hänen uskomattoman laajasta huolellisesti arkistoidusta kirjeenvaihdostaan. Hän oli aktiivinen tiedepoliitikko Ruotsissa ja koko Euroopassa tai, niinkuin hänen monet vihamiehensä sanoivat, pahimman laatuinen juonittelija. Oli miten oli, matematiikassa hänellä on kiistattomat Suomea hyödyttäneet ansiot.

Nuori tohtori Mittag-Leffler oli 1870-luvulla päätenyt Berliiniin, jossa hänestä tuli suuren funktioteoreetikon Weierstrassin opetuslapsi ja erityinen suojatti. Mittag-Leffler kyllästyi kuitenkin Berliinissä vallinneeseen ilmapiiriin, jota hän piti sietämättömän yltyösalaisena Ranskaa vastaan käydystä raivokkaasta sodasta. Weierstrassin vastustuksesta huolimatta hän haki professorin virkaa, joka Helsingissä oli tullut avoimeksi Lindelöfin jälkeen. Lindelöfin voimakkaaseen suosituskirjelmään nojautuen tiedekunta totesikin silloin vielä alle 30-vuotiaan Mittag-Lefflerin kilpahakijoitaan pätevämmäksi. Yliopistossa oli kuitenkin käynnissä suomalaistamiskampanja, jonka vuoksi hänelle ei haluttu myöntää tarvittavaa erivapautta suomen kielen osaamisesta. Niukalla ääntenemmistöllä konsistori päätyi sitä kuitenkin suosittamaan (vaikka mm. rehtori Zachris Topelius oli vastaan), ja Mittag-Leffler nimitettiin virkaan. Varsinkin opiskelijat, joiden selvä enemmistö tuohon aikaan oli jo suomenkielisiä, osoittivat voimakkaasti mieltään nimitystä vastaan.

Weierstrassin miehenä Mittag-Leffler sisällytti opetusohjelmaansa funktioteorian, jota näin opetettiin ensimmäisen kerran Suomessa Mittag-Lefflerin Helsingin vuosina 1877-1881. Menestyksellinen toiminta Suomessa keskeytyi, kun Mittag-Leffler sai kutsun vastaperustetun

Tukholman korkeakoulun matematiikan professoriksi. Maatamme Mittag-Leffler kuitenkin edelleen hyödytti vetäessään suuriruhtinaskunta Suomen mukaan pohjoismaiseen matemaattiseen yhteistyöhön. Tämä tapahtui ryhdyttäessä toimittamaan hänen 1882 perustamaansa yhteispohjoismaista lehteä *Acta Mathematica*, joka hänen henkilösuhteittensa ansiosta kohosi heti erääksi matematiikan johtavaksi julkaisufoorumiksi (ja jolla edelleen on tämä asema). Samoin kutsuttiin Suomi mukaan, kun 1909 käynnistettiin skandinaaviset matemaatikkokongressit.

Mittag-Lefflerin seuraaja Helsingin yliopiston matematiikan professorina oli Edvard Rudolf Neovius. Hän oli Lorenz Lindelöfin pojan Ernstin serkku ja Rolf Nevanlinnan setä. Neovius ei ollut funktioteoreetikko, mutta hänen pääasiallinen tutkimuskohteensa, minimipintojen teoria, oli funktioteoriaa lähellä. Lisäksi hänellä oli läheisenä ystävänä saksalainen Hermann Amandus Schwarz, eräs tuon ajan johtava funktioteorian kehittäjä, johon Neovius oli tutustunut jo opiskeluaikanaan Zürichissä ja joka myöhemmin vieraili usein Suomessa. Neovius oli siis hyvin kiinni funktioteoriassa, jota jatkuvasti opetettiin Helsingissä.

Merkittävä funktioteoreettinen tutkimuskin säilyi Suomessa, sillä Mittag-Lefflerillä oli yhtenä tohtorioppilaana ollut Hjalmar Mellin, joka myöhemmin täydensi opintojaan Berliinissä Weierstrassin koulussa. Mellin oli aikajärjestyksessä ensimmäinen suomalainen funktioteoreetikko, joka tutkimustuloksillaan herätti huomiota Suomen ulkopuolella. Hänestä tuli sittemmin vasta perustetun Teknillisen korkeakoulun ensimmäinen matematiikan professori 1908 ja jo sitä ennen hänelle oli myönnetty professorin arvonimi. Mellinillä ei ollut funktioteoriaa tutkivia oppilaita, mutta Mittag-Lefflerin sytyttämä liekki ei päässyt sammumaan, ja vuosisadan vaihduttua se vähitellen kasvoi roihuavaksi tuleksi.

Funktioteorian koulukunta syntyy

Funktioteorian aseman suomalaismatemaatikkojen keskeisenä tutkimuskohteena vakiinnutti Ernst Lindelöf, Lorenz Lindelöfin poika, josta tuli Neoviuksen seuraaja matematiikan professorina 1903. Mittag-Leffler toi funktioteorian suuresta maailmasta Suomeen, Ernst Lindelöf loi maailmanmaineeseen nousseen suomalaisen funktioteorian koulukunnan.

Lindelöf ei heti tieteellisen uransa alussa ollut funktioteoreetikko. Neoviuksen ehdotusta noudattaen hän käsitteli väitöskirjassaan Lien ryhmiä, joiden teoria juuri silloin oli suuren mielenkiinnon kohteena. Vielä silloinkaan, kun nuori tohtori isänsä tavoin lähti hakemaan lisäoppia Pariisista, hän ei ensimmäisen, vuoden mittaisen käyntinsä aikana harrastanut funktioteoriaa vaan differentiaaliyhtälöitä. Ratkaiseva muutos tapahtui toisen Pariisin käynnin aikana 1898-99, jolloin Lindelöfistä tuli pysyvästi funktioteoreetikko. Hän liittyi siihen maineikkaaseen ranskalaistutkijoiden ryhmään, joka kehitti silloin suuressa muodissa ollutta kokonaisten funktioiden teoriaa. Ei ole tarkoin tiedossa, mikä sai Lindelöfin siirtymään funktioteoriaan. Vaikutusta on saattanut olla Mittag-Lefflerillä, joka oli iältään Lorenz Lindelöfin ja Ernstin puolivälissä ja johon Lindelöfit pitivät tiiviisti yhteyttä – Ernst Lindelöfin ensimmäinen opintomatka suuntautui Mittag-Lefflerin kutsusta Tukholmaan. Pariisissa eräät aktiivisimmat funktioteorian tutkijat olivat suunnilleen Ernstin ikäisiä, noin 30-vuotiaita, mikä kenties on helpottanut Lindelöfin liittymistä joukkoon.

Lindelöfistä tuli ensimmäinen ei-ranskalainen, joka toi merkittäviä lisiä kokonaisten funktioiden teoriaan, ja pian hänet tunnustettiin kansainväliseksi nimeksi alallaan. Suomen matematiikan kehityksen kannalta hänen ansionsta olivat kuitenkin vielä suuremmat opettajana. Lindelöf uhrasi siinä määrin aikaa uuden tutkijapolven kouluttamiseen, että hänen oma tutkimustoimintansa alkoi tyrehtyä. Mutta sen korvauksena oli ennennäkemättömän menestyksellinen nuoren matemaatikkopolven esiinmarssi. Lindelöfin huolellisesti harkitsevat

väitöskirjojen aiheet johdattivat aloittelevat tutkijat keskelle ajankohtaista matematiikkaa. Huippukohta sattui ensimmäisen maailmansodan vuosiin, jotka suomessa olivat matematiikan jatko-opintojen kulta-aikaa. Silloin väittelivät tohtoreiksi Lindelöfin oppilaista mm. Felix Iversen, Pekka Myrberg, Kalle Väisälä, Vilho Väisälä, Frithiof Nevanlinna ja, sodan jo päätyttyä Rolf Nevanlinna 1919. Tuolloin valmistuneiden matemaatikkojen varassa tuli Suomen matematiikka olemaan vuosikymmenet. Väitöskirjat käsittelivät harvoja poikkeuksia lukuunottamatta funktioteoriaa, joka näin juurtui lujasti suomalaiseen tutkimuskenttään.

1920-luvulle siirryttäessä Lindelöf ei enää omilla tutkimuksillaan vaikuttanut funktioteorian kehitykseen, mutta valvoi ja ohjasi edelleen nuorempien kollegoidensa töitä. Helsinki nousi yhdeksi funktioteoreettisen tutkimuksen keskuspaikaksi maailmassa, ja vuosikymmenen päätyessä maailmalla puhuttiin yleisesti Suomen funktioteorian koulukunnasta.

Kaikkein merkittävin saavutus oli Rolf Nevanlinnan vuosina 1922-25 luoma meromorffifunktioiden arvojenjakautumisoppi. Liikkeellelähtövaiheessa hän työskenteli yhdessä vanhemman veljensä Frithiofin kanssa. Näiden kahden lisäksi funktioteoreettisen maineen luoja ja ylläpitäjä oli P.J. Myrberg, jonka taukoamaton tutkimustyö kohdistui erityisesti automorffifunktioiden teoriaan. Ja vuosikymmenen lopussa funktioteorian kärkikaartiin nousi sensaatiomaisesti nuori Lars Ahlfors, josta pian tuli yksi funktioteorian johtavia tutkijoita maailmassa.

Matematiikassa ei jaeta Nobel-palkintoa. Sen vastineena on Fieldsin mitali, joita jaetaan joka neljäs vuosi pidetyissä kansainvälisissä matemaatikkokongresseissa. Ensimmäiset kaksi "matematiikan nobelistia" valittiin vuonna 1936. He olivat amerikkalainen Jesse Douglas ja Lars Ahlfors. Kansainvälisen palkintolautakunnan puolesta puhunut Constantin Carathéodory alkoi Ahlforsin esittelyn seuraavasti: "Ahlfors on kuuluisan suomalaisen koulukunnan loistavimpia edustajia, koulukunnan, joka Ernst Lindelöfin perustamana on kolmenkymmenen vuoden aikana tuonut tieteeseen niin paljon arvokkaita lisiä ja tuottanut niin paljon eteviä matemaatikkoja. Hän on Ernst Lindelöfin ja Rolf Nevanlinnan oppilas".

Vuoden 1936 kongressi merkitsi ainutlaatuista julkista tunnustusta Suomen funktioteorialle, jonka taso ja asema suomalaisessa matematiikan tutkimuksessa näytti järkkymättömän vahvalta. Tutkimus oli kuitenkin vain muutaman harvan henkilön varassa. Toisen maailmansodan seurauksena loistava rakennelma hajosi, mutta niin vahva perinne oli, että laajamittainen funktioteorian tutkimus saatettiin käynnistää uudelleen.