

De algebraiska funktionerna

af

en oberoende variabel.

Akademisk afhandling

af

HJALMAR MELLIN

Filosofie Kandidat.

*Framställes, med tillstånd af filosofiska fakulteten, till offentlig granskning
i hist. fil. lärosalen den 19 november 1881, kl. 10 f. m.*

Helsingfors,

J. C. Frenckell & Son, 1881.

De algebraiska funktionerna

En afhandling af

Dr. phil. A. M. M. M.

ALFRED M. M.

LAHJOITTANUT
AARNE MUSTONEN

Förord.

Teorin för de algebraiska funktionerna kan anses ha erhållit sin afslutning genom Puiseux's bekanta afhandling *Recherches sur les fonctions algébriques*. Alla de satser, som kunna räknas till sagde teori, finnas i hufvudsak i denna afhandling, om de ock icke alltid äro uttalade med den klarhet och bevisade med den stränghet, hvarpå man i våra dagar kan göra anspråk.

Uppgiften i föreliggande afhandling är att med den Weierstrassiska funktionsteorin såsom utgångspunkt gifva en sträng framställning af det karakteristiska för de algebraiska funktionerna och att tillika genom den användning, hvar till den Weierstrassiska funktionsteorin derunder kommer, bidra till att göra densamma mera känd hos oss.

Inledningen utgör en framställning af grundbegreppen i den Weierstrassiska funktionsteorin. I denna framställning komma till tals endast analytiska funktioner af en oberoende variabel. Densamma är affattad i närmaste öfverensstämmelse med en del utaf den framställning af teorin för de analytiska funktionerna, hvilken Professor Mittag-Leffler gaf under sina föreläsningar läsåret 1878—79 vid härvarande universitet. Författaren hoppas, att hans afhandling särskildt skall lända dem till gagn, hvilka äro förtrogne med dessa föreläsningar.

Är

$$|x-a|=R,$$

så kan i allmänhet något bestämdt icke sägas om potensseriens konvergens. Det gifves exempel på potensserier, hvilka konvergera då $|x-a|=R$, och på potensserier, som icke konvergera då $|x-a|=R$.

I stället för benämningen *konvergensområde* användes äfven benämningen *konvergenscirkel*. Anledningen till denna benämning är den, att de punkter, som med användning af Gauss' metod att kombinera talen med punkterna i ett plan motsvara talvärden inom *konvergensområdet*, ligga inom en cirkel, som har punkten a till medelpunkt och R till radie. Quantiteten R kallas åter *radie i konvergenscirkeln* eller kortare *konvergensradie* för potensserien $P(x|a)$.

Är a_1 en punkt inom konvergenscirkeln för $P(x|a)$, så ådagaläggas genom en enkel betraktelse, att $P(x|a)$ kan ombildas i en ny potensserie $P_1(x|a_1)$, som både konvergerar och är lika med $P(x|a)$ åtminstone för alla värden på x , för hvilka

$$|x-a_1| < R - |a_1-a|,$$

d. v. s. åtminstone för alla punkter inom en cirkel, som har a_1 till medelpunkt och invändigt tangerar konvergenscirkeln för $P(x|a)$. Det är emellertid icke blott tänkbart utan ofta också verkligt fallet, att konvergensradien för den härledda serien är större än

$$R - |a_1-a|,$$

och att således dess konvergensområde till en del faller utom konvergensområdet för den ursprungliga serien. I detta fall framställer sig till besvarande frågan: består likheten

$$P(x|a) = P_1(x|a_1)$$

äfven för punkter inom den del af det *gemensamma* konvergensområdet för $P(x|a)$ och $P_1(x|a_1)$, som icke sammanfaller med området

$$|x-a| < R - |a_1-a|,$$

utan öfverskjuter det samma? Denna fråga besvaras jakande. Man behöfver nemligen om tvenne potensserier, som ha ett gemensamt kon-

vergensområde, blott veta, att det inom detta område finnes en punkt, sådan att i hvarje omgifning af densamma finnas oändligt många värden, för hvilka serierna öfverensstämma, för att kunna bevisa, att de öfverensstämma för hvarje punkt inom det gemensamma konvergensområdet.

Det har redan anförts, att konvergensradien för $P_1(x|a_1)$ är minst

$$R - |a_1 - a|.$$

Det kan å andra sidan aldrig inträffa, att den vore större än

$$R + |a_1 - a|.$$

Konvergensområdet för en potensserie, $P(x|a)$, karakteriseras städse genom följande viktiga egenskap. Det finnes alltid på gränsen af konvergensområdet åtminstone en punkt, x_0 , som utmärker sig derigenom, att det icke finnes någon efter hela och positiva potenser af $x - x_0$ fortskridande potensserie, hvilken skulle konvergera inom en viss omgifning af x_0 och öfverensstämma med $P(x|a)$ inom det för båda gemensamma konvergensområdet. Det kan för vissa potensserier inträffa, att alla punkter på omkretsen af konvergenscirkeln ha den anförda egenskapen. I detta fall kan ingen af de potensserier, i hvilka den gifna potensserien kan ombildas, ha ett konvergensområde, som sträcker sig utöfver konvergensområdet för den gifna.

Låt oss inom konvergensområdet för $P(x|a)$ taga en punkt a_1 och ombilda $P(x|a)$ uti $P_1(x|a_1)$. Låt oss sedan inom konvergensområdet för $P_1(x|a_1)$ taga punkten a_2 och ombilda $P_1(x|a_1)$ uti $P_2(x|a_2)$. Låt oss fortgå på detta sätt, i det vi, sedan vi erhållit en potensserie $P_v(x|a_v)$ inom konvergensområdet för densamma taga punkten a_{v+1} och ombilda $P_v(x|a_v)$ uti $P_{v+1}(x|a_{v+1})$. Vi få sålunda en följd af punkter

$$a, a_1, a_2, \dots, a_n,$$

och en följd af häremot svarande potensserier

$$P(x|a), P_1(x|a_1), \dots, P_n(x|a_n),$$

der hvarje efterföljande erhållits genom ombildning af den närmast föregående. Det inträffar nu ofta, att punkterna $a_1 \dots a_n$ kunna väljas så,

att punkten a_n faller utom konvergensområdet för $P(x|a)$, och att således konvergensområdet för $P_n(x|a_n)$ ligger till en del eller helt och hållet utanföre konvergensområdet för $P(x|a)$. I detta fall ha vi ur $P(x|a)$ lyckats härleda en potensserie, som har en fullt bestämd betydelse inom ett område af x , för hvilket $P(x|a)$ icke är definierad. — Huru nu också punkterna $a_1 \dots a_n$ må vara valda, så säges hvar och en af potensserierna $P_1 \dots P_n$ vara en *analytisk ombildning* af $P(x|a)$. Om konvergensområdet för $P_1(x|a_1)$ delvis går utöfver konvergensområdet för $P(x|a)$, så kallas $P_1(x|a_1)$ och de analytiska ombildningarne af densamma *analytiska fortsättningar* utaf $P(x|a)$.

Vi antaga att $P_n(x|a_n)$ är en analytisk fortsättning utaf $P(x|a)$, och att P_n erhållits ur P genom förmedling af potensserierna $P_1 \dots P_{n-1}$. Är det då också alltid möjligt att genom förmedling af en följd af analytiska ombildningar utaf $P_n(x|a_n)$ omvänt härleda $P(x|a)$ utur $P_n(x|a_n)$? Det är icke svårt att bevisa, att detta verkligen alltid är möjligt. Man ådagalägger satsens riktighet först för det fall, att punkterna $a_1 \dots a_n$ alla ligga inom konvergensområdet för $P(x|a)$. Derefter följer sedan lätt satsens riktighet för det allmänna fallet.

Resultatet af de föregående betraktelserna är följande. Om en potensserie är gifven, så är det i och med det samma också fullt bestämdt, hvilka de potensserier äro som genom ombildning kunna härledas ur den gifna, och ur en, hvilken som helst, af dessa potensserier kan den gifna och alla de öfriga erhållas. Sammanfattningen af alla dessa potensserier bildar ett i sig afslutadt helt, i hvilket man ifrån hvarje *element* kan komma till alla öfriga.

Med en *analytisk* eller *monogen funktion* förstår nu *Weierstrass* sammanfattningen af alla de värden, som potensserien $P(x|a)$ och dess analytiska fortsättningar kunna erhålla genom att åt x tilldela värden, som falla inom de respektiva konvergensområdena, samt af de *gränsvärden* som bära *adjungeras*. — Vi skola snart förklara, hvad som förstås med ett gränsvärde som bör *adjungeras* till den analytiska funktionen. — Potensserien $P(x|a)$ och samtliga fortsättningar af densamma sägas vara *element* af den analytiska funktionen.

Af hvad som i det föregående framstälts följer, att en *analytisk funk-*

tion är fullt bestämd och skiljes ifrån alla andra genom angifvandet utaf ett af dess element.

Om $P(x|a)$ är ett element af en analytisk funktion, så ligger det ingenting otänkbart deruti, att man kan uppställa en följd af punkter

$$a, a_1, \dots a_n,$$

hvarrest

$$a_n = a,$$

och en följd af häremot svarande potensserier

$$P(x|a), P_1(x|a_1), \dots P_n(x|a_n),$$

der hvarje efterföljande är en analytisk ombildning af den närmast föregående, och der P_n *icke* är lika med P . Det är, med andra ord sagdt, tänkbart, att mot samma värde $x = a$ svara flere olika element af en analytisk funktion. Detta är i sjelfva verket fallet just med de analytiska funktioner, som i det följande skola studeras.

En analytisk funktion säges vara *entydig*, om det för hvarje värde af x , för hvilket det öfverhufvud finnes ett element af funktionen, blott finnes ett enda sådant. Svarar mot ett värde af x flere olika element, så säges funktionen vara *flertydig* (*oändligt flertydig*).

Låt L vara en linie, som löper från punkten a till punkten a' , och antag att

$$a_1, \dots a_n$$

äro punkter på linien L samt

$$P(x|a), P_1(x|a_1), \dots P_n(x|a_n), P_{n+1}(x|a')$$

potensserier, af hvilka hvarje efterföljande är en analytisk ombildning af den närmast föregående. Om nu punkterna $a_1 \dots a_n$ äro så valda, att hela det stycke af linien L , som faller emellan tvenne på hvarandra följande punkter ligger inom konvergensområdet för $P_v(x|a_v)$, som svarar mot den föregående punkten, så erhålles städse i punkten a' samma potensserie, huru ock punkterna $a_1 \dots a_n$ för öfrigt till antal och läge må väljas på linien L . Då det framdeles är tal om att analytiskt fortsätta ett funktionselement längs en viss linie, så förstås dermed alltid att fortsättandet sker på det nu angifna sättet. Linien L säges vara en *entydig gren* af den analytiska funktion, hvaraf $P(x|a)$ är ett element.

Om man utgår ifrån potensserien P och fortsätter den samma längs en viss linie L , så kan det hända, att konvergensradierna för de analytiska fortsättningarna af P obegränsadt aftaga mot noll, ju mera man närmar sig en viss punkt, x_0 , på linien L . Genom fortsättning längs linien L är det då omöjligt att erhålla en emot punkten x_0 svarande analytisk fortsättning af P , hvarmed dock icke är sagdt, att man ej längs någon annan linie kan erhålla en emot x_0 svarande fortsättning af P . Punkten x_0 säges vara ett *gränsställe*. Om det inträffar, att då x närmar sig x_0 , värdena, y , af de analytiska fortsättningarna utaf P obegränsadt närma sig värdet y_0 , så säges y_0 vara ett *gränsvärde*. Gränsvärdet y_0 *adjungeras* till den analytiska funktionen endast i det fall, att det finnes en efter hela och positiva potenser af $x - x_0$ och $y - y_0$ fortskridande potensserie, $G(x - x_0, y - y_0)$, sådan att

$$G(x - x_0, y - y_0) = 0$$

för de ifrågavarande värdena x, y .

Är $x_0 = \infty$ så bör med $x - x_0$ förstås $\frac{1}{x}$, och likaså bör med $y - y_0$ förstås $\frac{1}{y}$ om $y_0 = \infty$.

Låt

$$P(x|a), P_1(x|a), \dots, P_n(x|a)$$

vara ett *system af potensserier* och a_1 en punkt inom det *gemensamma konvergensområdet* för potensserierna, samt ombilda dessa uti de respektiva potensserierna

$$\bar{P}(x|a_1), \bar{P}_1(x|a_1), \dots, \bar{P}_n(x|a_1).$$

Låt åter a_2 vara en punkt inom det gemensamma konvergensområdet för dessa potensserier och förfar med systemet $\bar{P}, \bar{P}_1, \dots, \bar{P}_n$ på samma sätt som med systemet $P, P_1, \dots, P_n$, o. s. v. — Sammanfattningen af alla de *system af potensserier*, som på detta sätt kunna erhållas ur systemet

$$P, P_1, \dots, P_n,$$

bildar ett i sig afslutadt helt, i hvilket man ur hvarje system af potensserier kan erhålla hvarje annat.

Med det system af analytiska funktioner, som definieras genom systemet af potensserierna

$$P(x|a), P_1(x|a), \dots P_n(x|a),$$

förstås sammanfattningen af alla de värdekombinationer

$$y, y_1, \dots y_n,$$

som kunna erhållas ur systemet

$$y = P(x|a), y_1 = P_1(x|a), \dots y_n = P_n(x|a),$$

äfvensom ur de system, som på det nyss angifna sättet kunna härledas ur systemet

$$P, P_1, \dots P_n.$$

Till systemet af de analytiska funktionerna *adjungeras* ännu vissa *gränsvärden*.

Låt oss fortsätta systemet

$$P, P_1, \dots P_n$$

längs en linie, som löper ifrån punkten a till punkten x_0 . Om det då inträffar, att vi för hvarje punkt emellan a och x_0 erhålla ett system af potensserier, men att det icke är möjligt att längs linien L erhålla ett emot punkten x_0 svarande system af potensserier, så säges punkten x_0 vara ett *gränsställe* för vårt system af analytiska funktioner. Om värdena

$$y, y_1, \dots y_n$$

af de analytiska fortsättningarne utaf

$$P, P_1, \dots P_n$$

obegränsadt närma sig de respektiva värdena

$$b, b_1, \dots b_n,$$

då x närmar sig x_0 , så säges

$$b, b_1, \dots b_n$$

vara ett *gränsvärde* till systemet af de analytiska funktionerna. Detta gränsvärde bör *adjungeras* till systemet, om det finnes en efter hela och positiva potenser af

$$x - x_0, y - b, \dots y - b_n$$

fortskridande potensserie, G , sådan att

$$G(x - x_0, y - b, \dots, y_n - b_n) = 0.$$

Om något af värdena $x_0, b, \dots, b_n$ t. ex. x_0 är $= \infty$, så bör med $x - x_0$ förstås $\frac{1}{x}$.

Följande sats kommer mycket ofta till användning i funktions-teorin. Låt

$$G(y, y_1, \dots, y_n)$$

vara en för alla värden af $y, y_1, \dots, y_n$ konvergerande potensserie och

$$P(x|a), P_1(x|a), \dots, P_n(x|a)$$

ett system af potensserier, sådant att

$$G(P(x|a), P_1(x|a), \dots, P_n(x|a)) = 0,$$

då x faller inom det gemensamma konvergensområdet för $P, P_1, \dots, P_n$. Då består denna likhet också för *hvert och ett* af de system af potensserier, som på det nyligen angifna sättet kan härledas ur systemet

$$P, P_1, \dots, P_n$$

eller, med andra ord sagdt, den består för det system af analytiska funktioner, som definieras genom systemet af potensserierna

$$P, P_1, \dots, P_n.$$

Den består också för systemets gränsvärden.

Låt oss taga i betraktande området för ett system af tvänne obegränsadt variabla storheter

$$x, y,$$

hvilket område utgör sammanfattningen af alla möjliga värdekombinationer x, y . Med ett värde eller en punkt inom detta område förstås ett bestämdt värdepar x, y . Med en analytisk bild inom samma område förstås sammanfattningen af alla värdepar x, y , som kunna bildas af en gifven analytisk funktions argumentvärden ¹⁾ och motsvariga funktions-

¹⁾ Argument af en analytisk funktion $=$ ett värde af x ; som faller inom konvergens-cirkeln för ett element af den analytiska funktionen.

värden samt sammanhöriga gränsställen och gränsvärden som böra adjungeras.

Motivet till uppställandet af den i det föregående anförda definitionen på ett gränsvärde, som bör adjungeras till en analytisk funktion, är bland annat att man önskar upprätthålla satsen, att den analytiska bild, som erhålles ur den analytiska funktionen, är identiskt lika med den analytiska bild, som erhålles ur den omvända funktionen.

I.

1. Vi ha i det föregående gifvit den allmänna definitionen på en analytisk funktion, och vi känna derigenom de egenskaper, som äro gemensamma för alla analytiska funktioner. Det finnes emellertid också egenskaper, som äro karakteristiska för en *speciel analytisk funktion* eller för en *speciel klass af analytiska funktioner*, så att denna funktion eller klass af funktioner genom angifvande af dessa egenskaper skiljes ifrån alla andra analytiska funktioner.

Frågar man t. ex., om det finnes ett funktionselement

$$P(x | a) = \varphi(x),$$

som har egenskapen att

$$\varphi(u) \cdot \varphi(v) = \left[\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) \right]^2,$$

då u och v , och således också $\frac{u+v}{2}$, äro argument, belägne inom konvergensområdet för $\varphi(x)$, så lyder som bekant svaret, att denna egenskap tillkommer hvarje beständigt konvergerande potensserie af formen

$$A \cdot e^{c(x-a)},$$

der A och c äro arbiträra konstanter, och endast en potensserie af denna form.

Svaret på den allmännare frågan, huruvida det finnes ett funktionselement, $\varphi(x)$, som har egenskapen att

$$G\left(\varphi(u), \varphi(v), \varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)\right) = 0,$$

der G är en hel och rationel funktion af $\varphi(u)$, $\varphi(v)$, $\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right)$, lyder, att

man icke blott vet att det finnes utan också kan angifva *alla* de analytiska funktioner, hvilkas element ha den anförda egenskapen.¹⁾

Genom en *differentialeqvation* definieras jemväl i allmänhet en bestämd grupp af analytiska funktioner. Sålunda definieras genom differentialeqvationen

$$\varphi'(x) = c \cdot \varphi(x)$$

alldeles samma grupp af funktioner som genom likheten

$$\varphi(u) \cdot \varphi(v) = \left[\varphi\left(\frac{u+v}{2}\right) \right]^2.$$

Låt

$$F(x, y) = F_0(x) + F_1(x) \cdot y + \dots + F_n(x) \cdot y^n$$

vara en hel rationel funktion af de båda variablerna x, y . Man kan då fråga: *finnes det ett funktionselement,*

$$P(x|a),$$

sådan att, om man sätter

$$y = P(x|a),$$

likheten

$$F(x, y) = 0$$

äger rum för alla värden på x inom konvergensområdet för $P(x|a)$? Om ett sådant element finnes, så består likheten

$$F(x, y) = 0$$

också för alla analytiska fortsättningar utaf P , om sådana existera, ty emedan den består för systemet af potensserierna

$$F_0, F_1, \dots, F_n, P,$$

så består den ock för det system af analytiska funktioner, som definieras genom systemet af potensserierna

$$F_0, F_1, \dots, F_n, P.$$

¹⁾ Egenskapen tillkommer alltid och endast roten till en algebraisk likhet, hvars koef-

ficienter äro antingen *rationela funktioner* eller *rationela funktioner af exponentialen e^{ω}*
 $\omega = \text{konst.}$, eller *dubbelperiodiska funktioner af rationel karakter.*

Antaget nu, att det verkligen alltid finnes en analytisk funktion, som satisfierar en gifven algebraisk likhet emellan x och y , så uppstår den omvända frågan: *ha vi uti egenskapen att satisfiera en algebraisk likhet träffat på en egenskap, som är karakteristisk för en bestämd klass af analytiska funktioner, d. v. s. finnes det andra egenskaper, som äro gemensamma för alla analytiska funktioner, som satisfiera en algebraisk likhet, och hvilka egenskaper äro af den natur, att man om en analytisk funktion endast behöfver veta, att den har dessa egenskaper, för att omvänt kunna bevisa, att den måste satisfiera en algebraisk likhet?* Vår uppgift uti denna afhandling är att lemna ett jakande svar på båda dessa frågor. Lyckas oss detta, så ha vi träffat på en sluten klass af analytiska funktioner, och det är då berättigadt att beteckna denna klass af funktioner med det särskilda namnet *algebraiska funktioner*.

2. Vi måste naturligtvis först bemöda oss om att erhålla ett svar på den första frågan: om

$$(1) \quad F(x, y) = F_0(x) + F_1(x)y + \dots + F_n(x)y^n = 0$$

är en algebraisk likhet, finnes det då ett funktionselement $P(x|a)$, sådant att likheten

$$F(x, P(x|a)) = 0$$

eger rum för alla värden på x inom konvergensområdet för $P(x|a)$? Om ett sådant element finnes, så består likheten (1), såsom redan visats, också för alla analytiska fortsättningar utaf P . Vi uttrycka detta kortare genom att säga, att *likheten (1) satisfieras af den analytiska funktion hvaraf $P(x|a)$ är ett element*.

Funktionen $F(x, y)$ säges vara *divisibel* med en annan hel och rationel funktion $F_1(x, y)$, om det finnes en tredje hel och rationel funktion $F_2(x, y)$, sådan att

$$F(x, y) = F_1(x, y) \cdot F_2(x, y)$$

för alla värden på x och y . Ut i den ena af funktionerna F_1 och F_2 får härvid den ena af variablerna x och y eller båda två saknas. Funktionen $F(x, y)$ säges vara *irreduktibel*, om den icke är divisibel med nå-

gon annan hel och rationel funktion af x och y än med en funktion af formen $c \cdot F(x, y)$, der c är en konstant, samt med en konstant. Likheten

$$F(x, y) = 0$$

säges vara *irreduktibel*, om detsamma är fallet med dess venstra membrum.

Om $F(x, y)$ låter sönderdelas sig i en produkt af hela rationela funktioner

$$F(x, y) = F_1(x, y) F_2(x, y) \dots F_m(x, y),$$

så måste hvarje värdepar x, y , hvilket satisfierar någon af likheterna

$$F_1(x, y) = 0, F_2(x, y) = 0, \dots F_m(x, y) = 0$$

också satisfiera likheten

$$F(x, y) = 0,$$

och omvändt. Om således en analytisk funktion satisfierar någon af dessa likheter, så satisfierar den också likheten

$$F(x, y) = 0.$$

Att också omvändt hvarje analytisk funktion, som satisfierar den sista likheten, måste satisfiera någon af de förra, inses på följande sätt. Låt $P(x|a)$ vara ett element af funktionen. Det nödvändiga och tillräckliga vilkoret för att $P(x|a)$ skall satisfiera likheten

$$F(x, P(x|a)) = 0,$$

är, att om man utvecklar $F(x, P(x|a))$ efter potenser af $x-a$, koefficienterna för samtliga potenser af $x-a$ äro noll. Skulle nu $P(x|a)$ icke satisfiera någon af likheterna

$$F_1(x, P(x|a)) = 0, F_2(x, P(x|a)) = 0, \dots F_m(x, P(x|a)) = 0,$$

så skulle uti ingen af dessas utvecklingar efter potenser af $x-a$ samtliga koefficienter kunna vara noll. Då skulle icke heller produkten af dessa utvecklingar, hvilken dock måste vara lika med utvecklingen för $F(x, P(x|a))$, kunna vara identiskt noll, ty koefficienten för den term i produkten, som erhålles genom att hopmultiplicera termerna af lägsta grad i faktorerna, vore åtminstone icke noll. — $P(x|a)$ måste således satisfiera någon af likheterna

$$F_1 = 0, F_2 = 0, \dots F_m = 0.$$

Af det sagda framgår, att vi, när helst sådant är nödigt, kunna anse att våra algebraiska likheter äro irreduktibla.

Vi ha förutsatt, att F är af graden n i afseende å y och antaga nu att F är irreduktibel. Om vi åt x tilldela ett bestämdt värde, så antaga också koefficienterna $F_0, \dots, F_n$ bestämda värden, och det finnes då i allmänhet n olika värden på y , för hvilka likheten (1) eger rum. Det gifves, såsom snart skall visas, blott ett ändligt antal värden på x , för hvilka det icke finnes n utan ett mindre antal olika värden af y som satisfiera likheten (1). För att nu erhålla ett svar på den uppkastade frågan, komma vi att undersöka, huru dessa emot ett x svarande värden af y förändras, då vi åt x tilldela olika värden, sedan vi dock dessförinnan bestämt de värden af x , mot hvilka det icke svarar n utan ett mindre antal olika värden på y . — Är $F(x, y)$ icke irreduktibel så kan till och med mot hvarje värde på x svara ett mindre antal olika värden på y än gradtalet för y utvisar. Detta är t. ex. fallet med likheten

$$[F(x, y)]^2 = 0.$$

Man kunde fråga, om det icke är en godtycklig inskränkning att antaga, att koefficienterna $F_0, \dots, F_n$ uti likheten (1), hvilken vi förutsatt oss att studera, äro *hela rationela* funktioner, och hvarföre vi icke likaså gerna antagit, att de äro blott *rationela* funktioner. Detta antagande innebär dock i sjelfva verket ingen väsendtlig inskränkning. Ty låt

$$F_0(x) + F_1(x)y + \dots + F_n(x)y^n = 0$$

vara en likhet, hvars koefficienter äro rationela funktioner, och låt $\bar{F}(x)$ vara minsta gemensamma dividenden till nämnarena uti $F_0(x), \dots, F_n(x)$. Det är då uppenbart, att likheterna

$$F_0(x) + F_1(x)y + \dots + F_n(x)y^n = 0,$$

$$\bar{F}(x) F_0(x) + \bar{F}(x) F_1(x)y + \dots + \bar{F}(x) F_n(x)y^n = 0,$$

om man undantager de värden på x för hvilka $\bar{F}(x) = 0$, satisfieras af alldeles samma värdepar x, y , och att om det finnes en analytisk funktion, som satisfierar den ena af dessa likheter, samma funktion också satisfierar den andra likheten. Man kan derföre inskränka sig till att

undersöka den senare likheten, hvars koefficienter äro hela rationela funktioner. Genom en enkel division med $\bar{F}(x)$ kan man för öfrigt alltid återgå till den förra likheten. Genom att studera likheterna af det senare slaget undersöka vi således i sjelfva verket också likheterna af det förra slaget.

Svaret på frågan, hvarföre vi icke tillåta koefficienterna $F_0, \dots, F_n$ uti likheten (1) att vara andra analytiska funktioner än hela rationela funktioner, t. ex. funktioner af rationel karakter, kan deremot gifvas först senare, då vi visa, att de algebraiska likheter, hvilkas koefficienter äro rationela funktioner af x , satisfieras af en sluten klass analytiska funktioner med utpräglade karakteristiska egenskaper, som endast tillkomma denna klass. Dermed är då det berättigade uti vårt antagande ådagalagdt. De följande undersökningarne skola emellertid föras på ett sådant sätt, att också vissa egenskaper hos algebraiska likheter, hvilkas koefficienter äro andra analytiska funktioner, komma att antydas.

3. Det gäller nu att söka finna alla de värden på x , mot hvilka det icke svarar n utan ett mindre antal olika värden på y , hvilka satisfiera likheten

$$(1) \quad F(x, y) = F_0(x) + F_1(x)y + \dots + F_n(x)y^n = 0,$$

hvars koefficienter äro hela rationela funktioner af x , och hvilken antages vara *irreduktibel*. Vi skola finna, att dessa värden på x kunna bestämmas så till vida, att man kan bilda en hel och rationel funktion af x med bestämda talkoefficienter, den må heta $H(x)$, sådan att likheten

$$H(x) = 0$$

har till rötter alla de ifrågavarande värdena på x och endast dessa värden. Dermed är då också bevisadt, att det finnes blott ett ändligt antal värden af x , som icke motsvaras af n utan af ett mindre antal olika värden på y .

Hvarje hel rationel funktion

$$(2) \quad \Phi(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$$

kan alltid och blott på ett sätt bringas under produktformen

$$(3) \quad \Phi(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2) \dots (z - z_n).$$

$$\Phi(z) \equiv 0$$
$$\Phi(z) \equiv 0$$

Om man med hvarandra multiplicerar

så erhålles

$$z^n - f_1 z^{n-1} + f_2 z^{n-2} \dots \dots \dots (-1)^n f_n,$$

$$f_1 = z_1 + z_2 + \dots + z_n,$$

$$f_2 = z_1 z_2 + z_1 z_3 + \dots + z_{n-1} z_n,$$

$$f_3 = z_1 z_2 z_3 + z_1 z_2 z_4 + \dots + z_{n-2} z_{n-1} z_n,$$

.....

$$f_n = z_1 z_2 \cdots z_n.$$

$$f_1, f_2, \dots, f_n,$$
$$z_1, z_2, \dots, z_n$$

¹⁾ Samma definition uppställs på hvarje symmetrisk funktion.

värde, då två omedelbart på hvarandra följande af desamma byta plats uti funktionen. Af denna definition följer, att funktionen icke heller ändrar värde, om variablerna på ett godtyckligt sätt permuteras

Att funktionerna

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

äro *symmetriska*, är lätt att finna, ty äro

$$f'_1, f'_2, \dots, f'_n$$

de respektiva värden, som

$$f_1, f_2, \dots, f_n$$

antaga, sedan man uti desamma på ett visst godtyckligt sätt permuterat $z_1, z_2, \dots, z_n$, så är dock

$$(z - z_1) \dots (z - z_n) = z^n - f_1 z^{n-1} + \dots - (-1)^n f_n = z^n - f'_1 z^{n-1} + \dots - (-1)^n f'_n$$

för alla värden på z och således

$$f_1 = f'_1, f_2 = f'_2, \dots, f_n = f'_n.$$

Anledningen till benämningen *elementära symmetriska funktioner* är den, att man har följande viktiga sats ¹⁾. *Hvarje symmetrisk, hel rationel funktion af n variabler kan alltid och blott på ett enda sätt uttryckas såsom en hel rationel funktion af de elementära symmetriska funktionerna utaf samma variabler*; koefficienterna uti denna funktion äro heltaliga lineära funktioner utaf koefficienterna uti den gifna symmetriska funktionen. Detta är en af de satser, som vi måste låna ur algebran.

Om vi differentiera funktionen

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n \\ &= a_n (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n) \end{aligned}$$

så fås

$$\begin{aligned} \Phi'(z) &= a_n (z - z_2) (z - z_3) \dots (z - z_n) \\ &\quad + a_n (z - z_1) (z - z_3) \dots (z - z_n) \\ &\quad + \dots \\ &\quad + a_n (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_{n-1}), \end{aligned}$$

¹⁾ Se t. ex. *Lehrbuch der Analysis* von Lipschitz, Erster Band, § 58.

hvaraf ses att

$$\begin{aligned}
 (4) \quad a_n^{n-2} \Phi'(z_1) \Phi'(z_2) \cdots \Phi'(z_n) &= a_n^{2n-2} (z_1 - z_2) (z_1 - z_3) \cdots (z_1 - z_n) \\
 &\quad \times (z_2 - z_1) (z_2 - z_3) \cdots (z_2 - z_n) \\
 &\quad \times \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \\
 &\quad \times (z_n - z_1) (z_n - z_2) \cdots (z_n - z_{n-1}) \\
 &= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-2} \prod_{\mu < \nu} (x_\mu - x_\nu)^2 = D.
 \end{aligned}$$

Häraf framgår omedelbart, att D och följaktligen också $\prod (x_\mu - x_\nu)^2$ är en symmetrisk, hel och rationel funktion af storheterna $z_1, z_2, \dots, z_n$. $\prod (x_\mu - x_\nu)^2$ kan således sättas lika med en hel rationel funktion utaf

$$f_1, f_2, \dots, f_n,$$

och derföre också lika med en hel rationel funktion af

$$\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots, \frac{a_0}{a_n},$$

alldenstund

$$f_v = (-1)^v \frac{a_{n-v}}{a_n}, \quad v = 1, 2, \dots, n.$$

Beteckna vi denna funktion med $G\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots, \frac{a_0}{a_n}\right)$, så är följaktligen

$$D = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_n^{2n-2} G\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}, \frac{a_{n-2}}{a_n}, \dots, \frac{a_0}{a_n}\right).$$

Den andra för oss erforderliga algebraiska satsen lyder¹⁾, att D , som kallas *diskriminant* till funktionen $\Phi(z)$ och till likheten $\Phi(z) = 0$, är en *hel* rationel funktion i afseende å samtliga koefficienter uti $\Phi(z)$:

$$D = H_1(a_0, a_1, \dots, a_n),$$

hvilket icke omedelbart framgår ur den sista likheten.

¹⁾ Noggrannare uttryckt är diskriminanten en hel heltalig homogen funktion af $a_0, \dots, a_n$ samt af dimensionen $2n-2$.

Af uttrycket (4) för diskriminanten framgår utan vidare, att densamma försvinner alltid och endast, då två eller flere af rötterna till likheten

$$\Phi(z) = 0$$

äro lika med hvarandra. Ut i likheten

$$H_1(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$$

ha vi således det nödvändiga och tillräckliga villkoret för att likheten

$$\Phi(z) = 0$$

skall ha lika rötter. Man kan följaktligen, äfven om $\Phi(z)$ icke är gifven under produktformen, afgöra om $\Phi(z)$ har något nollställe af högre ordning än ett.¹⁾

Vi återgå nu till vår irreduktibla likhet (1). Om vi åt x tilldela ett bestämdt värde, så afgör uttrycket

$$H_1(F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)),$$

om likheten (1) för detta värde på x har lika rötter, eller om samtliga n rötter äro olika. De värden x , för hvilka

$$H_1(F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)) = 0,$$

motsvaras icke af n utan af ett mindre antal olika värden på y . De värden åter af x , för hvilka denna likhet icke består, motsvaras af n sig emellan olika värden på y . Allt detta gäller dock endast sålänge

¹⁾ Af det, som blifvit framställt angående diskriminanten, framgår emellertid icke, huru densamma bör bildas af koefficienterna $a_0, \dots, a_n$. Ett närmare ingående härpå ligger utom planen för detta arbete. Det må endast anföras, att diskriminanten kan beräknas genom likheten

$$a_n D = \begin{vmatrix} a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot & \cdot \\ & a_1 & 2a_2 & 3a_3 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ & a_0 & a_1 & a_2 & \cdot \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

fråga är om sådana värden x , för hvilka $F_n(x)$ icke försvinner. Ty förutsättningen

$$|a_n| > 0$$

låg till grund för den föregående diskussionen af diskriminanten, och endast så länge

$$|F(x)| > 0$$

veta vi således med säkerhet, att diskriminantens försvinnande är det *nödvändiga* och *tillräckliga* villkoret för existensen af lika rötter. Det erfordras en skild diskussion för att afgöra, huru diskriminanten i detta afseende förhåller sig för de värden x , som satisfiera likheten

$$F_n(x) = 0.$$

Om likheterna

$$F_n = 0, H_1 = 0$$

bestå för ett och samma värde x , så är redan den första af dessa likheter i och för sig ett tillräckligt villkor för att vår likhet (1) för detta värde x skall ha mindre än n olika rötter. Diskriminantens försvinnande är således i hvarje fall ett *tillräckligt* villkor. Deremot är det icke ett *nödvändigt* villkor, då fråga är om sådana värden x för hvilka

$$F_n(x) = 0.$$

Ty äfven om diskriminanten icke försvinner för ett sådant värde x , så har likheten (1) dock icke n utan högst $n - 1$ olika rötter. Af det sagda framgår, att likheterna

$$F_n = 0, H_1 = 0$$

till samman, eller likheten

$$F_n \cdot H_1 = H(x) = 0$$

ensam i hvarje fall är nog för att angifva alla de värden x , för hvilka likheten (1) har mindre än n olika rötter. Emedan likheten

$$H(x) = 0$$

kan ega rum blott för ett ändligt antal punkter x , så existerar det blott ett ändligt antal punkter x , mot hvilka det icke svarar n utan ett mindre antal olika värden på y . Denna sista slutledning är emellertid riktig endast om det är säkert, att diskriminanten H_1 icke försvinner *identiskt*. Om diskriminanten försvinner för ett värde, x_1 , så finnes det (formel (4)) ett värde y_1 , för hvilket

$$F(x_1, y) \text{ och } \left(\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right)_{x=x_1}$$

båda försvinna, och då äro båda divisibla med en och samma hela rationela funktion af y . Vore nu diskriminanten identiskt noll, så skulle en närmare undersökning, hvilken här måste förbigås, gifva vid handen, att $F(x, y)$ och $\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}$ måste ha en gemensam divisor. Men då vore $F(x, y)$ tvärt emot antatagandet icke irreduktibel. Diskriminanten kan således icke försvinna identiskt, om $F(x, y)$ är irreduktibel.

Resultatet af de föregående betraktelserna är nu följande. Om

$$F(x, y) = 0$$

är en irreduktibel likhet af graden n i afseende å y , så svara emot hvarje värde x i allmänhet n skilda värden på y , hvilka satisfiera denna likhet. Det finnes blott ett ändligt antal värden x , som motsvaras af ett mindre antal än n olika värden på y . Alla och endast dessa värden x äro rötter till likheten

$$(5) \quad F_n(x) \cdot H_1(F_0(x), F_1(x), \dots, F_n(x)) = 0,$$

der H_1 är diskriminanten till $F(x, y)$. Emedan diskriminanten är af dimensionen $2n-2$ i afseende å $F_0, \dots, F_n$, så är antalet af de i fråga varande värdena x på sin höjd

$$m(2n-1),$$

om m betyder gradtalet af F i afseende å x .

Skulle en eller flere af koefficienterna $F_0, \dots, F_n$ uti likheten (1) vara funktioner af rationel karakter, så vore diskriminanten en rationel funktion eller en funktion af rationel karakter, och i senare fallet är det möjligt att likheten (5) eger rum för oändligt många värden x , af

hvilka dock inom hvarje ändligt område endast kan finnas ett ändligt antal, såvida icke diskriminanten identiskt försvinner.

4. Sedan nu de värden på x , mot hvilka det svarar ett mindre antal än n olika värden på y , som satisfiera likheten

$$F(x, y) = 0,$$

blifvit så till vida bestämda, att vi uppställt en likhet

$$H(x) = 0,$$

hvilken har till rötter alla och endast de i fråga varande värdena x , öfvergå vi till en undersökning af det beroende, som förefinnes emellan rötterna till likheten

$$F(x, y) = 0$$

och den variabla x .

Vår afsigt är att bevisa följande sats. *Låt*

$$F(x, y) = 0$$

vara en irreduktibel algebraisk likhet af graden n i afseende å y , a ett godtyckligt värde på x och

$$b_1, b_2, \dots, b_v \quad v \leq n$$

samtliga olika rötter till likheten

$$F(a, y) = 0,$$

och antag, att dessa rötter äro af de respektiva ordningarne

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_v,$$

$$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_v = n.$$

Det svarar då emot hvarje positiv quantitet, δ , huru liten den ock må vara, en annan positiv pquantitet, ρ , sådan att hvarje värde på x , som uppfyller villkoret

$$|x - a| < \rho$$

och icke sammanfaller med a , motsvaras af n skilda värden på y , hvilka satisfiera likheten

$$F(x, y) = 0$$

och kunna delas uti v grupper

$$(\mu_1), (\mu_2), \dots (\mu_v),$$

bland hvilka gruppen (μ_s) består af μ_s skilda rötter, som alla uppfylla villkoret

$$|y - b_s| < \delta, \quad s = 1, 2, \dots v. \quad ^1)$$

Om vi kläda denna sats i geometrisk form, så får den följande lydelse. Om man uti y -planet omkring hvar och en af punkterna

$$b_1, b_2, \dots b_v$$

såsom medelpunkter uppritar en cirkel med en godtyckligt liten radie, δ , så kan man derefter uti x -planet omkring punkten a såsom medelpunkt upprita en cirkel med en så liten radie, ρ , att hvarje punkt, x , inom den sista cirkeln — punkten $x = a$ undantagen — motsvaras af

$$\begin{array}{llllll} \mu_1 & \text{skilda punkter inom cirkeln} & (b_1), \\ \mu_2 & \text{'' '' '' '' ''} & (b_2), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_v & \text{'' '' '' '' ''} & (b_v), \end{array}$$

för hvilka likheten

$$F(x, y) = 0$$

eger rum.

Vi förutsätta för ett ögonblick, att satsen är bevisad, och att δ är taget så litet att alla cirklarne i y -planet falla utom hvarandra. Låt oss antaga att $\mu_1 = 1$, och låt oss med y_1 förstå en variabel storhet, som uppfyller det dubbla villkoret att satisfiera olikheten

$$|y_1 - b_1| < \delta$$

¹⁾ För att denna sats skall vara fullt exakt bör i vissa fall en eller flere af $b_1, b_2, \dots b_v$, a anses vara $= \infty$. Vi återkomma härtill senare.

och likheten

$$F(x, y) = 0$$

för de värden på x , som uppfylla villkoret

$$|x - a| < \rho.$$

Sålunda definierad är y , inom området

$$|x - a| < \rho$$

en entydig och kontinuerlig funktion af x . Detta anföras vi blott i förbigående. Vi återkomma härtill senare.

Förr än vi skrida till beviset för den uttalade satsen, är det nödigt att fastställa följande angående den ordningsföljd

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

uti hvilken vi taga rötterna till en algebraisk likhet

$$a_0 + a_1 y + \dots + a_n y^n = 0, |a_n| > 0.$$

Till först må framhållas, att uti raden

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

hvarje rot bör upptagas så många gånger, som dess ordningstal angifver. Hvad ordningsföljden beträffar, så bestämmes den först och främst derigenom, att de rötter, hvilkas absoluta belopp äro mindre, föregå dem, hvilkas absoluta belopp äro större. Ordningsföljden emellan de rötter, hvilka ha samma absoluta belopp, r , bestämmes åter derigenom, att de bringas under formen

$$r \cdot e^{2s\pi i}, \quad 0 \leq s < 1$$

och sedan ordnas så, att de rötter, som motsvaras af ett mindre s , föregå dem, som motsvaras af ett större. Fastställandet af denna ordningsföljd erbjuder en viss fördel, då koefficienterna $a_0, a_1, \dots, a_n$ äro

föränderliga storheter, ty så snart $a_0, a_1, \dots, a_n$ få bestämda värden, så har också hvar och en af

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

sin fullt bestämda betydelse.

Den i början af denna § uttalade satsen är lätt ådagalagd, sedan följande sats blifvit bevisad ¹⁾.

Låt

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) \cdot y + \dots + \varphi_n(x) \cdot y^n = 0$$

vara en algebraisk likhet, hvars koefficienter äro potensserier, som fortskrida efter hela och positiva potenser af $x - a$ och konvergera för en viss omgifning af punkten a . ²⁾ Låt vidare

$$a_0, a_1, \dots, a_n$$

vara de respektiva ändliga värden, som koefficienterna antaga för $x = a$. Man kan då bevisa följande satser.

Om

$$a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_{m-1} = 0, |a_m| > 0, m \leq n,$$

så finnes det en positiv quantitet, ε , sådan att till hvarje positiv quantitet, δ , som är mindre än ε , hör en positiv quantitet, ρ , af den beskaffenhet, att hvarje värde på x , som uppfyller villkoret

$$0 < |x - a| < \rho,$$

motsvaras af n rötter

$$y_1, y_2, \dots, y_n,$$

ibland hvilka de m första,

$$y_1, y_2, \dots, y_m,$$

uppfylla villkoret

$$|y| < \delta < \varepsilon$$

¹⁾ Vi anse oss böra nämna, att vi uti denna § haft till ledning *Weierstrass'* föreläsningar uti funktionsteori.

²⁾ De följande satserna gälla äfven om man antager att koefficienterna äro blott kontinuerliga funktioner.

och de $n-m$ öfriga

$$y_{m+1}, y_{m+2}, \dots y_n$$

vilkoret

$$|y| > \varepsilon.$$

Om åter

$$a_{n-p+1} = 0, a_{n-p+2} = 0, \dots a_n = 0, |a_{n-p}| > 0, n-p \geq 0,$$

så finnes det en positiv kvantitet, ε_1 , sådan att till hvarje positiv kvantitet, δ_1 , som är större än ε_1 , hör en positiv kvantitet, ρ , af den beskaffenhet, att hvarje värde på x , som uppfyller vilkoret

$$0 < |x-a| < \rho,$$

motsvaras af n rötter

$$y_1, y_2, \dots y_n,$$

ibland hvilka de p sista

$$y_{n-p+1}, y_{n-p+2}, \dots y_n$$

uppfylla vilkoret

$$|y| > \delta_1 > \varepsilon_1$$

och de $n-p$ första vilkoret

$$|y| < \varepsilon_1.$$

Dessa satser bestå samtidigt, om de båda förutsättningarna angående koefficienterna samtidigt äro uppfyllda, i hvilket fall således rötterna

$$y_1, y_2, \dots y_m$$

uppfylla vilkoret

$$|y| < \delta < \varepsilon < \varepsilon_1,$$

rötterna

$$y_{n-p+1}, y_{n-p+2}, \dots y_n$$

vilkoret

$$|y| > \delta_1 > \varepsilon_1 > \varepsilon$$

samt rötterna

$$y_{m+1}, y_{m+2}, \dots y_{n-p}$$

vilkoret

$$\varepsilon < |y| < \varepsilon_1,$$

så snart

$$0 < |x - a| < \rho.$$

Vanligen uttalas dessa satser sålunda, att man säger, att m rötter blifva *oändligt små*, då x närmar sig ett värde för hvilket de m första koefficienterna försvinna, samt att p rötter blifva *oändligt stora*, då x närmar sig ett värde för hvilket de p sista koefficienterna försvinna.

Vi bevisa dessa satser sålunda, att vi först ådagalägga det första påståendet för det fall att

$$|a_n| > 0$$

och sedan det andra för det fall att

$$|a_0| > 0.$$

Slutligen visas, att båda satserna bestå, äfven om man i första satsen låter vilkoret

$$|a_n| > 0$$

och i den andra vilkoret

$$|a_0| > 0$$

falla.

Till en början bevisas första satsen endast för det fall att

$$a_0 = 0 \quad |a_1| > 0, \quad |a_n| > 0.$$

Vi inskränka först och främst området för variabeln x till en så liten omgifning af punkten a , att för detta område hvar och en af öfre gränserna till de respektiva storheterna

$$|\varphi_0(x)|, |\varphi_1(x)|, \dots, |\varphi_n(x)|$$

är ett ändligt tal, och att $\varphi_n(x)$ icke försvinner i någon punkt inom eller på gränsen af området.

Ur likheten

$$y_1 \cdot y_2 \cdots y_n = (-1)^n \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_n(x)}$$

följer relationen

$$(1) \quad |y_1|^n \leq \left| \frac{\varphi_0(x)}{\varphi_n(x)} \right|,$$

hvaraf ses, att $|y_1|$ derigenom kan fås att förblifva mindre än ett godtyckligt angifvet positivt tal, att man inskränker x till en tillräckligt liten omgifning af punkten a .

Om man ifrån

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) \cdot y + \cdots + \varphi_n(x) \cdot y^n$$

subtraherar

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x) \cdot y_1 + \cdots + \varphi_n(x) \cdot y_1^n = 0$$

och dividerar resultatet med $y - y_1$, samt sätter

$$(2) \quad \begin{aligned} & \varphi_1(x) + \varphi_2(x)(y + y_1) + \varphi_3(x)(y^2 + yy_1 + y_1^2) + \cdots \\ & + \varphi_n(x)(y^{n-1} + y^{n-2}y_1 + \cdots + y_1^{n-1}) = \psi_1(x) + \psi_2(x)y + \cdots + \psi_n(x)y^{n-1} = 0, \end{aligned}$$

så har denna likhet rötterna ¹⁾

$$y_2, y_3, \cdots y_n.$$

Uti densamma är ψ_n lika med summan af φ , och en storhet, hvilken blir oändligt liten samtidigt med y_1 och derföre också samtidigt med $x - a$. I stöd af relationen (1) och de gjorda förutsättningarna angående koefficienterna φ är vidare, för det nyss angifna området af x , hvar och en af öfre gränserna till de respektiva storheterna

$$|\psi_1(x)|, |\psi_2(x)|, \cdots |\psi_n(x)|$$

ett ändligt tal. Slutligen ses, att ψ_1 icke försvinner för $x = a$, och att ψ_n icke försvinner i någon punkt inom eller på gränsen af området för x .

¹⁾ Ty $\varphi_0 + \varphi_1 y + \cdots + \varphi_n y^n = \varphi_n (y - y_1)(y - y_2) \cdots (y - y_n)$.

Emedan ψ_n icke blir noll inom eller på gränsen af området för x , och emedan hvar och en af öfre gränserna till de respektiva storheterna

$$|\psi_1(x)|, |\psi_2(x)|, \dots, |\psi_{n-1}(x)|$$

är ändlig, så är också öfre gränsen, g , för $|y_n|$ ett ändligt tal.²⁾

Man har följaktligen för hvarje värde, som tillhör området för x ,

$$|y_n| g^{n-2} \geq \left| \frac{\psi_1(x)}{\psi_n(x)} \right| \text{ eller } |y_n| \geq \left| \frac{\psi_1(x)}{\psi_n(x)} \right| \cdot \frac{1}{g^{n-2}}.$$

Är nu ϵ ett positivt tal emellan $\left| \frac{a_1}{a_n} \right| \frac{1}{g^{n-2}}$ och noll, så kan man tydligen ytterligare inskränka området för x till en så liten omgifning af punkten a , att relationen

$$\left| \frac{\psi_1(x)}{\psi_n(x)} \right| \cdot \frac{1}{g^{n-2}} > \epsilon$$

eger rum för hela detta område. Är då δ ett positivt tal, som är mindre än ϵ , så kan man fastställa ett så litet positivt tal, ρ , att alla värden på x , som uppfylla villkoret

$$|x - a| < \rho,$$

tillhöra det sistnämnda området för x , och att för alla dessa värden på x relationen

$$|y_n| < \delta$$

²⁾ Ty är A ett positivt tal, som icke är mindre än någon af de resp. öfre gränserna till

$$|\psi_1|, |\psi_2|, \dots, |\psi_{n-1}|,$$

samt β ett positivt tal, som är mindre än undre gränsen, α , till ψ_n , så är

$$|\psi_1 + \psi_2 y + \dots + \psi_n y^{n-1}| \geq |y|^{n-1} \left| |\psi_n| - |\psi_{n-1}| \frac{1}{y} + \dots + \psi_1 \frac{1}{y^{n-1}} \right| > |y|^{n-1} (\alpha - \beta) > 0$$

för alla y , som till sitt absoluta belopp äro så stora, att

$$\beta > A \left(\left| \frac{1}{y} \right| + \dots + \left| \frac{1}{y} \right|^{n-1} \right) \geq |\psi_1| \left| \frac{1}{y} \right| + \dots + |\psi_n| \left| \frac{1}{y} \right|^{n-1},$$

hvaraf följer att öfre gränsen för $|y_n|$ är ändlig.

eger rum. Då är också

$$|y_n| \geq |y_{n-1}| \geq \dots \geq |y_2| > \varepsilon,$$

och härmed är satsen i det speciella fallet

$$a_0 = 0, |a_1| > 0, |a_n| > 0$$

bevisad.

Nu skall densamma bevisas allmänt i det fall att $|a_n| > 0$. Detta sker sålunda, att vi antaga satsen vara bevisad för hvarje likhet, hvars m första koefficienter försvinna för $x = a$, och på denna grund ådaga-lägga dess giltighet för hvarje likhet, hvars $m + 1$ första koefficienter blifva noll i punkten a .

Låt alltså

$$\varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \dots + \varphi_n(x)y^n = 0$$

vara en likhet, för hvilken

$$a_0 = 0, a_1 = 0, \dots, a_m = 0, |a_{m+1}| > 0, |a_n| > 0, m + 1 \leq n.$$

Likasom nyss erhålla vi äfven nu relationen (1), hvaraf framgår, att y , blir oändligt liten samtidigt med $x - a$. Vidare erhålles likheten (2), hvars rötter äro $y_2, y_3, \dots, y_n$, och der bildningslagen för koefficienterna är den i det föregående anförda. På grund af denna bildningslag är

$$\psi_1(a) = 0, \psi_2(a) = 0, \dots, \psi_m(a) = 0, |\psi_{m+1}(a)| > 0, |\psi_n(a)| > 0.$$

Vi kunna således i stöd af det gjorda antagandet framställa ett positivt tal, ε , sådant att om δ är ett positivt tal, som är mindre än ε , deremot svarar ett sådant positivt tal ρ , att

$$|y_2| \leq |y_3| \leq \dots \leq |y_{m+1}| < \delta < \varepsilon < |y_{m+2}| \leq \dots \leq |y_n|$$

för hvarje värde på x , som uppfyller villkoret

$$|x - a| < \rho.$$

Uppenbarligen är i och med detsamma också

$$|y_1| < \delta.$$

Vi kunna följaktligen anse satsen vara allmänt bevisad i det fall att $|a_n| > 0$.

Vi bevisa nu den andra af de uti det föregående uttalade satserna i det fall att $|a_0| > 0$. Vi välja ett så litet positivt tal r , att

$$|\varphi_0(x)| > 0$$

för alla värden på x , som uppfylla villkoret

$$|x - a| < r,$$

och att a är det enda ibland dessa värden på x , för hvilket $\varphi_n(x)$ försvinner. Det är då uppenbart, att de båda likheterna

$$\begin{aligned}\varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \dots + \varphi_n(x)y^n &= 0, \\ \varphi_n(x) + \varphi_{n-1}(x)z + \dots + \varphi_0(x)z^n &= 0\end{aligned}$$

för alla värden på x , som uppfylla villkoret

$$0 < |x - a| < r,$$

ha n rötter, om hvarje rot räknas så många gånger som dess ordningstal angifver. Tillika är ingen af rötterna till dessa likheter noll. Om

den senare likheten har roten $z = z_v$, så har den förra roten $y = \frac{1}{z_v}$; ty

sätt uti den förra $y = \frac{1}{z_v}$, så fås $\frac{1}{z_v} (\varphi_n + \varphi_{n-1}z_v + \dots + \varphi_0z_v^n)$, hvilket

är lika med noll, emedan z_v antogs vara en rot till den senare likheten.

Dessutom kan man bevisa, att $\frac{1}{z_v} = y'_v$, betraktad såsom rot till den

förra likheten, har samma ordningstal som z_v , betraktad såsom rot till

den senare. Ty om man uti venstra membrum af den senare likheten

sätter $z = \frac{1}{y}$, så fås $\frac{1}{y^n} (\varphi_0 + \varphi_1y + \dots + \varphi_ny^n)$. Bringar man åter samma

venstra membrum först under produktformen och sätter sedan deruti

$z = \frac{1}{y}$, $z_v = \frac{1}{y'_v}$, så fås

$$\frac{(-1)^n \varphi_0 (y - y'_1) (y - y'_2) \dots (y - y'_n)}{y^n \cdot y'_1 \cdot y'_2 \dots y'_n},$$

hvarest $y - y_v$ förekommer lika många gånger som faktor som $z - z_v$ uti produktformen för venstra membrum af den senare likheten. Emedan de båda så erhållna uttrycken äro lika med hvarandra för alla värden på y , så är det sista uttrycket, på faktorn $\frac{1}{y^n}$ när, just produktformen för venstra membrum af den förra likheten, och då är tydligen vårt påstående bevisadt.

Emedan de p första koefficienterna till den senare likheten försvinna för $x = a$, men deremot icke den sista, så finnes det ett positivt tal, $\frac{1}{\epsilon_1}$, sådant att hvarje positivt tal, $\frac{1}{\delta_1}$, som är mindre än $\frac{1}{\epsilon_1}$, motsvaras af ett sådant positivt tal, ρ , att relationerna

$$|z_1| \leq \dots \leq |z_p| < \frac{1}{\delta_1} < \frac{1}{\epsilon_1} < |z_{p+1}| \leq \dots \leq |z_n|$$

ega rum för alla värden på x , som uppfylla villkoret $0 < |x - a| < \rho$. Äro nu $y_1, y_2, \dots, y_n$ rötterna till den förra likheten, tagne i den fastställda ordningsföljden, så är tydligen $z_v = \frac{1}{y_{n-v+1}}$ och derföre

$$|y_n| \geq \dots \geq |y_{n-p+1}| > \delta_1 > \epsilon_1 > |y_{n-p}| \geq \dots \geq |y_1|$$

så snart $0 < |x - a| < \rho$.

Vi antaga nu att

$$a_0 = 0, \dots, a_{m-1} = 0, |a_m| > 0, |a_{n-p}| > 0, a_{n-p+1} = 0, \dots, a_n = 0, m \leq n - p < n,$$

och skola bevisa, att äfven i detta fall de m första af rötterna

$$y_1, y_2, \dots, y_n$$

blifva oändligt små samtidigt med $x - a$. För att undersöka likheten

$$(6) \quad \varphi_0(x) + \varphi_1(x)y + \dots + \varphi_n(x)y^n = 0,$$

bilda vi likheten

$$(7) \quad \varphi_0(x)(1 + \alpha z)^n + \varphi_1(x)z(1 + \alpha z)^{n-1} + \dots + \varphi_n(x)z^n = 0.$$

Ordnas venstra membrum efter potenser af z , så fås

$$(8) \quad \psi_0(x) + \psi_1(x)z + \dots + \psi_n(x)z^n = 0,$$

hvarrest

$$\psi_n = \varphi_n + \varphi_{n-1}\alpha + \dots + \varphi_0\alpha^n,$$

och i allmänhet ψ_v är en homogen lineär funktion af $\varphi_0, \dots, \varphi_v$. Vi bestämma nu α så, att

$$|\psi_n(\alpha)| = |a_{n-p}\alpha^p + \dots + a_m\alpha^{n-m}| > 0,$$

och välja ett så litet positivt tal, r , att

$$|\varphi_n(x)| > 0, \quad |\psi_n(x)| > 0$$

för alla värden på x , som uppfylla villkoret

$$0 < |x - \alpha| < r.$$

Emedan, så snart detta villkor är uppfyllt, koefficienten i sista termen hvarken af likheten (6) eller af likheten (8) försvinner, så har hvardera likheten n rötter, såvida hvarje rot räknas så många gånger, som dess ordningstal angifver. Man ser af (7), att likheten (8) icke kan ha roten $z = -\frac{1}{\alpha}$ för något värde på x , som uppfyller det anförda villkoret.

Om likheten (8) för ett sådant värde på x har roten $z = z_v$, så har den ursprungliga likheten (6) roten $y = \frac{z_v}{1 + \alpha z_v}$. Ty sätt uti venstra membrum af (6)

$$y = \frac{z_v}{1 + \alpha z_v},$$

så fås

$$\frac{1}{(1 + \alpha z')^n} (\varphi_0(x) (1 + \alpha z')^n + \varphi_1(x) z' (1 + \alpha z')^{n-1} + \dots + \varphi_n(x) z'^n),$$

hvilket på grund af (7) är lika med noll.

För oss gäller det nu dessutom att bevisa, att om z_v , betraktad såsom rot till likheten (8), har ett visst ordningstal, så har den genom likheten

$$y_v' = \frac{z_v}{1 + \alpha z_v}$$

definierade quantiteten y_v' , betraktad såsom rot till (6), också samma ordningstal.

Om man uti venstra membrum af (8) eller hellre af (7) utför substitutionen

$$z = \frac{y}{1 - \alpha y},$$

så fås

$$(9) \quad \frac{1}{(1 - \alpha y)^n} (\varphi_0 + \varphi_1 y + \dots + \varphi_n y^n).$$

Bringar man åter venstra membrum af (8) först under produktformen, och sätter man sedan deruti

$$z = \frac{y}{1 - \alpha y}, \quad z_v = \frac{y_v'}{1 - \alpha y_v'}, \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

så fås

$$(10) \quad \frac{\psi_n(y - y_1') \dots (y - y_n')}{(1 - \alpha y)^n (1 - \alpha y_1') \dots (1 - \alpha y_n')},$$

hvarrest $y - y_v'$ förekommer lika många gånger såsom faktor, som $z - z_v$, uti produktformen för venstra membrum af (8). Då nu (9) och (10) måste vara lika med hvarandra för alla värden på y , så är (10), på faktorn $\frac{1}{(1 - \alpha y)^n}$ när, produktformen för venstra membrum af (6), och härmed är vårt påstående bevisadt.

På grund af bildningslagen för koefficienterna uti likheten (8) är

$$\psi_0(a) = 0, \dots, \psi_{m-1}(a) = 0, |\psi_m(a)| > 0, |\psi_m(a)| > 0.$$

I stöd af ett redan bevisadt fall blifva således de m första af rötterna $z_1, z_2, \dots, z_n$ oändligt små samtidigt med $x - a$, hvaremot de $n - m$ sista till sina absoluta belopp icke kunna sjunka under en viss från

noll skiljaktig positiv qvantitet. På grund af likheten $y'_v = \frac{z_v}{1 + az_v}$ blifva då också de m första af rötterna $y'_1, y'_2, \dots, y'_n$ till likheten (6) oändligt små samtidigt med $x - a$, men icke de $n - m$ sista. Det är därför tydligt, att det finnes ett sådant positivt tal, ε , att hvarje positivt tal, δ , som är mindre än ε , motsvaras af ett positivt tal, $\rho (\leq r)$, af den beskaffenhet, att rötterna $y_1, y_2, \dots, y_n$ till likheten (6), tagne i den en gång fastställda ordningsföljden, uppfylla villkoren

$$|y_1| \leq \dots \leq |y_m| < \delta < \varepsilon < |y_{m+1}| \leq \dots \leq |y_n|$$

för hvarje värde på x , som uppfyller villkoret

$$0 < |x - a| < \rho.$$

Det återstår att bevisa, att under de gjorda förutsättningarna angående koefficienterna till likheten (6) de p sista af rötterna $y_1, y_2, \dots, y_n$ blifva oändligt stora samtidigt dermed, att $x - a$ blir oändligt liten. Emedan de föregående fallen blifvit tillräckligt omständligt behandlade, är det uti förevarande fall nog, om vi blott antyda beviset. Man fastställer det positiva talet r så litet, att $|\varphi_0(x)| > 0$, $|\varphi_n(x)| > 0$ för hvarje värde på x , som uppfyller villkoret $0 < |x - a| < r$. Derefter betraktas likheten

$$\varphi_n + \varphi_{n-1}z + \dots + \varphi_0 z^n = 0,$$

hvars rötter $z_1, z_2, \dots, z_n$ stå i den relation till rötterna $y_1, y_2, \dots, y_n$ af den gifna likheten, att $z_v = \frac{1}{y_{n-v+1}}$, $v = 1, 2, \dots, n$, och hvars p första koefficienter försvinna för $x = a$, hvaraf kan slutas, att $z_1, z_2, \dots, z_p$ blifva oändligt små, och därför $y_{n-p+1}, \dots, y_n$ oändligt stora samtidigt dermed, att $x - a$ blir oändligt liten.

Härmed anse vi de båda uppställda satserna vara bevisade. — För oss är det af vigt att observera, att desamma gälla äfven om $a = \infty$, hvilket icke betyder annat än, att alla koefficienterna fortskrida efter hela och positiva potenser af $\frac{1}{x}$ och konvergera för tillräckligt små värden på $\frac{1}{x}$, d. v. s. för tillräckligt stora värden på x .

Vi återgå nu till vår irreduktibla algebraiska likhet $F(x, y) = 0$. Om de p sista koefficienterna försvinna för det ändliga värdet $x = a$, så veta vi på grund af det föregående, att det finnes ett sådant positivt tal, $\frac{1}{\varepsilon}$, att hvarje positivt tal, $\frac{1}{\delta}$, som är större än $\frac{1}{\varepsilon}$, motsvaras af ett sådant positivt tal, ρ , att för hvarje värde på x , som uppfyller villkoret $0 < |x - a| < \rho$, alltid p rötter till vår likhet uppfylla villkoret $|y| > \frac{1}{\delta} > \frac{1}{\varepsilon}$, och de $n - p$ återstående villkoret $|y| < \frac{1}{\varepsilon}$. Tydligen kan ρ tillika väljas så, att alla rötterna äro olika. — För att åt denna sats gifva en lydelse, som i formelt afseende öfverensstämmer med lydelsen af den sats som strax kommer till tals, säger man, att i förevarande fall ∞ för $x = a$ är en rot med ordningstalet p och förstår med $y = \infty$ bråket $\frac{1}{y}$. Då uppfylla p rötter villkoret

$$|y - \infty| = \left| \frac{1}{y} \right| < \delta < \varepsilon,$$

och de $n - p$ återstående villkoret

$$|y - \infty| = \left| \frac{1}{y} \right| > \varepsilon,$$

så snart $0 < |x - a| < \rho$.

Låt, för $x = a$, $y = b$ vara en ändlig rot med ordningstalet μ . Låt oss utveckla venstra membrum af vår likhet efter potenser af $y - b$, och låt

$$\psi_0(x) + \psi_1(y - b) + \dots + \psi_n(x)(y - b)^n = 0$$

vara den så erhållna likheten. Emedan, för $x = a$, $y = b$ antogs vara en rot med ordningstalet μ , så inses lätt, att $\psi_0(a) = 0, \dots, \psi_{\mu-1}(a) = 0, |\psi_\mu(a)| > 0$. Det finnes således ett sådant positivt tal, ε , att hvarje positivt tal, δ , som är mindre än ε , motsvaras af ett positivt tal, ρ , af den beskaffenhet, att hvarje värde på x , som uppfyller villkoret

$$0 < |x - a| < \rho,$$

motsvaras af μ rötter ($y = b$), som uppfylla villkoret

$$|y - b| < \delta < \varepsilon,$$

och af $n - \mu$ rötter, som uppfylla villkoret

$$|y - b| > \varepsilon.$$

Talet ρ kan naturligtvis väljas så litet, att alla rötter äro olika för $0 < |x - a| < \rho$.

Låt oss inskränka området för x utom en cirkel med radien ρ , och låt oss undersöka, huru rötterna till vår likhet förhålla sig, då ρ tages allt större och större. Låt m vara gradtalet af likheten i afseende å x , och låt oss skriva densamma

$$\frac{F_0}{x^m} + \frac{F_1}{x^{m-1}}y + \dots + \frac{F_n}{x^m}y^n = 0.$$

Emedan koefficienterna $\frac{F_0}{x^m}, \dots, \frac{F_n}{x^m}$ kunna anses fortskrida efter hela och

positiva potenser af $\frac{1}{x}$, så finna vi, att rötterna i omgifningen af punkten $x = \infty$ förhålla sig alldeles såsom i omgifningen af en punkt i det ändliga. Är F_n af graden m i afseende å x , så blir icke någon af rötterna oändlig för $x = \infty$, hvilket deremot är händelsen, om F_n icke är af graden m .

Af allt det föregående framgår, att vi kunna anse den sats vara bevisad, hvilken uttalades i början af denna §.

5. Om vår algebraiska likhet för värdet $x = a$ har den enkla ändliga roten $y = b$, så kunna vi på grund af det föregående i y -planet omkring punkten b såsom medelpunkt upprita en cirkel med en så liten radie, δ , och i x -planet omkring punkten a såsom medelpunkt en cirkel med en så liten radie, ρ , att för hvarje värde på x , som uppfyller villkoret $|x - a| < \rho$, vår likhet satisfieras blott af ett enda värde på y , som uppfyller villkoret $|y - b| < \delta$. Den härigenom inom området $|x - a| < \rho$ såsom en entydig funktion definierade storheten y är tillika en kontinuerlig funktion inom samma område. Vi gå nu att

bevisa, att funktionssambandet emellan y och x här alltid är sådant, att detsamma kan återgifvas genom en potensserie, som fortskrider efter hela och positiva potenser af $x - a$ och konvergerar för en viss omgifning af punkten a . Vi skola härvid icke glömma det fall, då $a = \infty$ och således $x - a = \frac{1}{x}$.

Vi låna ifrån Weierstrass' föreläsningar i funktionsteori följande allmänna sats och beviset för densamma

Låt

$$c_0 + c_1 y + \dots + c_n y^n = 0$$

vara en algebraisk likhet, hvars koefficienter äro godtyckliga föränderliga storheter, som blott uppfylla följande villkor

1:o. Koefficienten c_1 kan till sitt absoluta belopp icke blifva mindre än ett visst positivt tal $C_1 > 0$.

2:o. Koefficienterna $c_2, \dots, c_n$ kunna till sina absoluta belopp icke blifva större än de resp. positiva konstanterna

$$C_2, \dots, C_n,$$

hvilka få vara godtyckligt valda.

Det finnes då ett positivt tal, ρ , sådant att för alla värden på c_0 , som uppfylla villkoret $|c_0| < \rho$, och alla värden på $c_1, c_2, \dots, c_n$, som uppfylla de nyss angifna villkoren, en rot till förestående likhet kan framställas under formen af $\frac{c_0}{c_1}, \frac{c_2}{c_1}, \dots, \frac{c_n}{c_1}$.

Sätta vi $a_v = -\frac{c_v}{c_1}$, $v = 0, 2, \dots, n$, så kan vår likhet skrivas

$$y = a_0 + a_1 y^2 + a_2 y^3 + \dots + a_n y^n.$$

Koefficienterna $a_2, a_3, \dots, a_n$ kunna till sina absoluta belopp icke blifva större än de resp. konstanterna

$$\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}, \dots, \frac{C_n}{C_1}.$$

Vi sätta

$$a_0 + a_2 y^2 + \dots + a_n y^n = \varphi(y)$$

och bilda en oändlig serie af storheter

$$y_0, y_1, \dots, y_{v+1}, \dots$$

enligt en sådan lag, att

$$y_0 = 0, y_1 = \varphi(y_0), \dots, y_{v+1} = \varphi(y_v), \dots$$

Sättes

$$\begin{aligned} \psi_v = & a_2(y_v + y_{v-1}) + a_2(y_v^2 + y_v y_{v-1} + y_{v-1}^2) + \dots \\ & + a_n(y_v^{n-1} + y_v^{n-2} y_{v-1} + \dots + y_{v-1}^{n-1}), \end{aligned}$$

så är

$$y_{v+1} - y_v = \varphi(y_v) - \varphi(y_{v-1}) = (y_v - y_{v-1})\psi_v.$$

Genom upprepad användning af denna likhet erhållas likheterna

$$y_1 = a_0, y_2 - y_1 = a_0 \psi_1, y_3 - y_2 = a_0 \psi_1 \psi_2, \dots, y_{v+1} - y_v = a_0 \psi_1 \psi_2 \dots \psi_v,$$

och, genom addition af dessa, likheten

$$y_{v+1} = a_0(1 + \psi_1 + \psi_1 \psi_2 + \dots + \psi_1 \psi_2 \dots \psi_v).$$

Ur bildningslagen för storheterna y_v framgår, att desamma äro hela rationela funktioner af koefficienterna $a_0, a_2, \dots, a_n$. Beaktas detta och betraktar man uttrycket för ψ_v , så finner man, att också samtliga storheterna ψ_v äro hela rationela funktioner af koefficienterna $a_0, a_2, \dots, a_n$.

Vi skola bevisa, att det finnes ett positivt tal, δ , sådant att den oändliga serien

$$y' = a_0(1 + \psi_1 + \psi_1 \psi_2 + \psi_1 \psi_2 \psi_3 + \dots)$$

för alla värden på a_0 , som till sina absoluta belopp äro mindre än δ , och för alla värden på $a_2, a_3, \dots, a_n$, som till sina absoluta belopp äro

mindre än de resp. konstanterna $\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}, \dots, \frac{C_n}{C_1}$, är icke blott konvergent utan tillika en rot till likheten

$$y = \varphi(y).$$

I och med detsamma är tydligen också vår först uppställda sats bevisad.

Vi förstå med $\bar{\varphi}(y)$ den funktion som erhålles, om samtliga koefficienter i $\varphi(y)$ ersättas med sina resp. absoluta belopp, och med

$$\bar{y}_0, \bar{y}_1, \dots; \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots \quad (\bar{y}_0 = 0)$$

storheter, som med tillhjälp af $\bar{\varphi}(y)$ äro bildade fullkomligt på samma sätt, som storheterna

$$y_0, y_1, \dots; \psi_1, \psi_2, \dots$$

med tillhjälp af $\varphi(y)$. De öfverstreckade storheterna äro tydligen de resp. uttryck som erhållas, om man uti de icke öfverstreckade storheterna, betraktade såsom hela rationela funktioner af $a_0, a_1, \dots, a_n$, ersätter hvarje term med sitt absoluta belopp.

Följaktligen är

$$|y_v| \leq \bar{y}_v, |\psi_v| \leq \bar{\psi}_v, \quad v = 1, 2, \dots, \infty.$$

Ur likheten

$$\bar{y}_{v+1} - \bar{y}_v = (\bar{y}_v - \bar{y}_{v-1})\bar{\psi}_v$$

framgår att

$$\bar{y}_{v-1} \leq \bar{y}_v,$$

ty man behöfver endast antaga, att denna relation eger rum för $v = m$, så följer genast, att den ock består för $v = m + 1$.

Om man således uti

$$\bar{\psi}_v = |a_2|(\bar{y}_v + \bar{y}_{v-1}) + \dots + |a_n|(\bar{y}_v^{n-1} + \bar{y}_v^{n-2}\bar{y}_{v-1} + \dots + \bar{y}_{v-1}^{n-1})$$

i stället för $\bar{y}_{v-1}$ skrifver $\bar{y}_v$, så fås en storhet, som är större eller åtminstone icke mindre än $\bar{\psi}_v$. Man har följaktligen

$$|\bar{\psi}_v| \leq \bar{\psi}_v \leq 2|a_2|\bar{y}_v + 3|a_3|\bar{y}_v^2 + \dots + n|a_n|\bar{y}_v^{n-1} = \bar{\varphi}(\bar{y}_v).$$

Låt nu ε vara ett godtyckligt positivt egentligt bråk, och framställ ett positivt tal, δ , sådant att

$$\bar{\varphi}'(\delta(1 + \varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$$

för alla värden på $a_2, a_3, \dots, a_n$, som till sina absoluta belopp äro mindre än de resp. konstanterna

$$\frac{C_2}{C_1}, \frac{C_3}{C_1}, \dots, \frac{C_n}{C_1}.$$

Det kan då bevisas, att serien

$$a_0(1 + \psi_1 + \psi_1\psi_2 + \dots)$$

för alla värden på a_0 , hvilkas absoluta belopp äro mindre än δ , och för alla värden på $a_2, a_3, \dots, a_n$, som uppfylla de nyss angifna villkoren, är icke blott konvergent utan också en rot till likheten $y = \varphi(y)$.

Vi bevisa först, att alla storheterna $\bar{y}_v$ äro mindre än $\delta(1 + \varepsilon)$, och att alla storheterna $\bar{\psi}_v$ äro mindre $\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}$. Tydligen är

$$\bar{y}_0 < \delta(1 + \varepsilon), \bar{y}_1 = |a_0| < \delta(1 + \varepsilon),$$

och

$$\bar{\psi}_1 \leq \bar{\varphi}'(\bar{y}_1) < \bar{\varphi}'(\delta(1 + \varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Vi antaga, att vårt påstående är bevisadt för

$$\bar{y}_1, \bar{y}_2, \dots, \bar{y}_v \text{ och } \bar{\psi}_1, \bar{\psi}_2, \dots, \bar{\psi}_v,$$

och skola finna, att det då och gäller för

$$\bar{y}_{v+1} \text{ och } \bar{\psi}_{v+1}$$

och således är allmängiltigt. Man har i sjelfva verket

$$\begin{aligned} \bar{y}_{v+1} &= |a_0|(1 + \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 + \dots + \bar{\psi}_1\bar{\psi}_2 \dots \bar{\psi}_v) \\ &< \delta \left(1 + \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} + \left(\frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \right)^2 + \dots \right) = \delta(1 + \varepsilon), \end{aligned}$$

och

$$\bar{\psi}_{v+1} \leq \bar{\varphi}'(\bar{y}_{v+1}) < \bar{\varphi}'(\delta(1 + \varepsilon)) < \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon}.$$

Uti serien $y' = a_0(1 + \psi_1 + \psi_1\psi_2 + \dots)$ äro således absoluta beloppen för termerna mindre än de motsvariga termerna i den geometriska serien $\delta(1 + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon} + (\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon})^2 + \dots)$. Serien y' är således konvergent. Densamma är också en rot till likheten $y = \varphi(y)$, ty emedan $y_{v+1} = \varphi(y_v)$, så är

$$\varphi(y_v) - y_v = (y_v - y_{v-1})\psi_v,$$

och således

$$\begin{aligned} |\varphi(y') - y'| &= |\varphi(y') - \varphi(y_v) - (y' - y_v) + (y_v - y_{v-1})\psi_v| \\ &\leq |\varphi(y') - \varphi(y_v)| + |y' - y_v| + |y_v - y_{v-1}||\psi_v|. \end{aligned}$$

Differenserna $\varphi(y') - \varphi(y_v)$, $y' - y_v$, $y_v - y_{v-1}$ aftaga till sina absoluta belopp med växande v under hvarje positivt tal, och samtidigt närmar sig ψ_v en bestämd ändlig gräns. Emedan således $|\varphi(y') - y'|$ är mindre än hvarje positivt tal, så är densamma noll. Härmed anse vi också den i början af denna § uttalade satsen vara bevisad ¹⁾.

Af bildningslagen för storheterna ψ_v framgår, att termen $\psi_1\psi_2\dots\psi_v$ uti serien y' icke innehåller a_0 upphöjdt till lägre potens än v .

Låt oss nu antaga, att koefficienterna $c_0, c_1, \dots, c_n$ uti vår likhet äro potensserier, som fortskrida efter hela och positiva potenser af $x - a$. Låt oss vidare antaga, att $c_0 = 0$ men deremot $|c_1| > 0$ för $x = a$. Vi kunna då fastställa ett positivt tal, ρ , så litet, att hvar och en af de resp. öfre gränserna till $\left|\frac{c_2}{c_1}\right|, \dots, \left|\frac{c_n}{c_1}\right|$ är ändlig, och att $\left|\frac{c_0}{c_1}\right|$ är mindre än den i det föregående med δ betecknade positiva kvantiteten för alla värden på x , som uppfylla villkoret $|x - a| < \rho$. För alla dessa värden på x äro termerna i serien y' , hvilka kunna utveck-

¹⁾ Det inses lätt, att samma bevismetod låter använda sig för att härleda en motsvarig sats i den händelse, att venstra membrum består af ett oändligt antal termer. Då måste blott den oändliga serien $C_2y^2 + C_3y^3 + \dots$, der koefficienterna äro de resp. öfre gränserna till $|c_2|, |c_3|, \dots$, vara konvergent för en viss omgifning af $y = 0$. I den händelse att $c_0, c_1, \dots$ äro potensserier kunna samma slutsatser dragas som strax ådagaläggas för det fall att termernas antal i venstra membrum är ändligt.

las efter hela och positiva potenser af $x - a$, till sina resp. absoluta belopp mindre än de motsvariga positiva termerna i en viss nyligen anförd geometrisk serie. Emedan serien y' följaktligen är *likformigt konvergent* för området $|x - a| < \rho$, så kan den för detta område af x sammandragas till en konvergerande potensserie, som fortskrider efter hela och positiva potenser af $x - a$, och hvilken, insatt för y uti vår likhet, satisfierar densamma. — Koefficienterna uti denna potensserie äro entydigt bestämda storheter, af hvilka hvar och en är rationelt sammansatt af ett ändligt antal koefficienter uti $c_0, c_1, \dots, c_n$. Ty emedan detta är fallet med utvecklingen af hvarje term uti y' , och emedan termen $\psi_1 \psi_2 \dots \psi_v$ icke innehåller $x - a$ upphöjdt till lägre potens än v , och då man således blott ifrån ett ändligt antal termer uti y' kan erhålla en viss potens af $x - a$, så följer häraf omedelbart riktigheten af vårt påstående.

6. Vi kunna nu anse följande sats vara bevisad. *Om en algebraisk likhet emellan x och y för $x = a$ har den ändliga, enkla roten $y = b$, så finnes det alltid en konvergerande potensserie, som fortskrider efter hela positiva potenser af $x - a$, och hvars konstanta term är b , samt hvilken, insatt för y uti likheten, satisfierar densamma.*¹⁾ Ty för att inse detta, behöfver man i den nyss betraktade likheten blott tänka sig $y - b$ skrifvet i stället för y .²⁾ Det är naturligt, att potensserien satisfierar likheten för alla x , som tillhöra dess konvergensområde, hvilket kan sträcka sig utom området $|x - a| < \rho$.³⁾

Föregående sats gäller äfven om $a = \infty$, såvida med $x = \infty$ förstås $\frac{1}{x}$.

Ty låt m vara gradtalet af likheten i afseende å x , och utveckla venstra membrum efter potenser af $y - b$, samt dividera likheten med x^m , hvarigenom samtliga koefficienter för $y - b$ komma att fortskrida efter hela och positiva potenser af $\frac{1}{x}$. Att nu $y = b$ är en enkel rot till vår

¹⁾ C. f. första stycket i föregående §. Satsen gäller naturligtvis äfven om likheten för $x = a$ tillika har, ändliga eller oändliga, rötter med högre ordningstal än 1.

²⁾ Se pag. 36.

³⁾ C. f. Inledningen pag. 8.

likhet för $x = \infty$, vill säga, att $y - b$ förekommer en gång såsom faktor uti produktformen för den hela och rationela funktion af y , som fås, om man i venstra membrum af den sist bildade likheten sätter $\frac{1}{x} = 0$, eller, hvilket är detsamma, att första termen uti denna likhet är noll, men deremot koefficienten för $y - b$ till sitt absoluta belopp större än noll för $\frac{1}{x} = 0$. På grund af den sats som i § 5 bevisats, kan man således bilda en potensserie, som fortskrider efter hela och positiva potenser af $\frac{1}{x}$ och konvergerar för tillräckligt små värden på $\frac{1}{x}$, d. v. s. tillräckligt stora på x , och hvilken satisfierar den sista och derföre också den ursprungliga likheten för alla värden på x , för hvilka den konvergerar.

Att den nu bildade potensserien är den enda, hvars konstanta term är lika med den enkla roten b , och hvilken för en viss omgifning af punkten a satisfierar vår likhet, följer deraf, att om tvänne eller flere sådana skulle finnas, desamma, alldenstund b antogs vara en enkel rot, skulle måsta öfverensstämma för en viss omgifning af punkten a ¹⁾ och således, tvärt emot antagandet, vara identiska.

Om vi antaga, att vår algebraiska likhet är irreduktibel, så kan likhetens diskriminant icke försvinna identiskt. Hvarje ändligt värde $x = a$, för hvilket hvarken diskriminanten eller koefficienten $F_n(x)$ för högsta potensen af y försvinner, motsvaras af n ändliga rötter $b_1, b_2, \dots, b_n$, som alla äro olika. Till hvarje sådan punkt hör således n potensserier $P_1(x|a), P_2(x|a), \dots, P_n(x|a)$, hvilka för $x = a$ antaga de resp. värdena $b_1, b_2, \dots, b_n$, och af hvilka hvar och en inom sitt konvergensområde satisfierar likheten. Om likheten i en punkt, för hvilken diskriminanten eller $F_n(x)$ försvinner, utom möjliga lika rötter också har den ändliga enkla roten b , så svarar också mot

¹⁾ På grund af första satsen i § 4. Man fastställer ρ och δ så små, att hvarje x , som satisfierar $|x - a| < \rho$, motsvaras af ett enda y , som uppfyller villkoren $|y - b| < \delta$, $F(x, y) = 0$. Funnes det nu två potensserier med de anförda egenskaperna, så skulle man, om nödigt vore, ytterligare kunna förminska ρ så, att båda serierna för $|x - a| < \rho$ också skulle uppfylla båda dessa villkor, etc.

en sådan punkt en potensserie, hvars konstanta term är b , och hvilken inom sitt konvergensområde satisfierar likheten. Har åter b ett högre ordningstal än ett, så kunna vi icke säga, om det finnes eller icke finnes en potensserie $P(x|a)$, hvars konstanta term är b , och hvilken satisfierar likheten. Stundom finnes en sådan och stundom icke.¹⁾

Nu framställa sig till besvarande ett par intressanta frågor. Huru långt sträcker sig konvergensområdet till en potensserie, $P(x|a)$, som satisfierar vår likhet? Består det något samband emellan de potensserier, som motsvara en viss punkt $x = a$, och dem, som motsvara en annan punkt $x = a'$? Äro de, som motsvara den ena punkten, analytiska fortsättningar af dem, som motsvara den andra?

Konvergensradien till en potensserie $P(x|a)$, hvilken satisfierar vår algebraiska likhet, hvilken antages vara irreduktibel, är åtminstone lika med det minsta ibland de talvärden, som uttrycka de resp. afstånden ifrån punkten a till de punkter, i hvilka vare sig diskriminanten eller koefficienten $F_n(x)$ försvinner.²⁾

Låt oss antaga, att konvergensradien, r , vore mindre än sagde värde. Låt x_0 vara en punkt, hvilken som helst, på gränsen af konvergensområdet till $P(x|a)$. Låt $P_1(x|x_0)$, $P_2(x|x_0)$, $\dots$ $P_n(x|x_0)$ vara de n skilda potensserier, som motsvara punkten x_0 . Låt oss inom det gemensamma konvergensområdet för $P(x|a)$, $P_1(x|x_0)$, $\dots$ $P_n(x|x_0)$ fixera en punkt x' , som dock icke må sammanfalla med a , om också a skulle ligga inom detta område, och låt oss ombilda dessa potensserier uti de resp. potensserierna $\bar{P}(x|x')$, $\bar{P}_1(x|x')$, $\dots$ $\bar{P}_n(x|x')$. Emedan de konstanta termerna $\bar{P}_1(x'|x')$, $\dots$ $\bar{P}_n(x'|x')$ tydligen äro sig emellan olika³⁾, så måste $\bar{P}(x'|x')$ vara lika med något af värdena $\bar{P}_1(x'|x')$, $\dots$ $\bar{P}_n(x'|x')$, ty annars skulle samtliga koefficienter uti vår likhet försvinna för $x = x'$, och venstra membrum vara divisibelt med $x - x'$. Emedan det

¹⁾ De i detta stycke uttalade resultaten gälla tydligen också om $a = \infty$, såvida likhetens samtliga koefficienter tänkas dividerade med x^m .

²⁾ Punkten a kan sjelf vara en sådan.

³⁾ Ty vore t. ex. $\bar{P}_1(x'|x') = \bar{P}_2(x'|x')$, så vore $\bar{P}_1(x|x')$ och $\bar{P}_2(x|x')$ identiskt lika, emedan $\bar{P}_1(x'|x')$ är en enkel rot, och derföre också $P_1(x|x_0)$ och $P_2(x|x_0)$.

icke kan finnas mer än en potensserie, $\bar{P}(x|x')$ hvilken satisfierar vår likhet, och hvars konstanta term, $\bar{P}(x'|x')$, är en enkel rot, så måste $\bar{P}(x|x')$ vara identiskt lika med den af potensserierna $\bar{P}_1(x|x'), \dots, \bar{P}_n(x|x')$, hvars konstanta term också är $\bar{P}(x'|x')$. Härmed ha vi bevisat, att $P(x|a)$ måste öfverensstämma med någon af $P_1(x|x_0), \dots, P_n(x|x_0)$ inom det gemensamma konvergensområdet för båda. Emedan det således för hvarje punkt på periferin af cirkeln (r) finnes en potensserie, som öfverensstämmer med $P(x|a)$ inom det för båda gemensamma konvergensområdet, så är (r) icke den sanna konvergenscirkeln för $P(x|a)$, utan dess konvergensradie har minst det värde som nyss angafs.

Om $a = \infty$, så konvergerar $P(x|a) = P\left(\frac{1}{x}\right)$ åtminstone för alla värden på x , som falla utom en cirkel, hvilken är uppritad omkring origo såsom medelpunkt och med en radie, som är lika med det största absoluta belopp, hvilket tillkommer något af de värden, för hvilka vare sig diskriminanten eller $F_n(x)$ försvinner.

Är $\frac{1}{r}$ konvergensradien till $P\left(\frac{1}{x}\right)$, betraktad såsom potensserie af $\frac{1}{x}$, och antager man, att r är större än sagde absoluta belopp, så svara emot hvarje punkt, x_0 , på periferin af cirkeln (r) n skilda potensserier $P_\nu(x|x_0)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, som satisfiera vår likhet. Emedan

$$x - x_0 = -x_0 \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}}{\frac{1}{x}}$$

så ses, att hvarje term uti $P_\nu(x|x_0)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, kan utvecklas efter hela och positiva potenser af $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$. På grund af den likformiga konvergens kan derför också $P_\nu(x|x_0)$ sjelf utvecklas uti en potensserie $\bar{P}_\nu\left(\frac{1}{x} \middle| \frac{1}{x_0}\right)$, som fortskrider efter hela och positiva poten-

ser af $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$, och som för en viss omgifning af $x = x_0$ satisfierar vår likhet. Betraktar man nu $\frac{1}{x}$ såsom oberoende variabel uti serierna

$$P\left(\frac{1}{x}\right), \bar{P}_v\left(\frac{1}{x} \mid \frac{1}{x_0}\right), \quad v = 1, 2, \dots, n,$$

så är $\frac{1}{x_0}$ en punkt på periferin af en cirkel $\left(\frac{1}{r}\right)$, som med origo såsom medelpunkt är uppritad uti $\frac{1}{x}$ -planet. Man bevisar nu likasom nyss¹⁾, att $P\left(\frac{1}{x}\right)$ måste öfverensstämma med någon af serierna $\bar{P}_v$ inom det gemensamma konvergensområdet för båda. Emedan detta eger rum, huru också $\frac{1}{x_0}$ må väljas på cirkeln $\left(\frac{1}{r}\right)$, så är $\frac{1}{r}$ icke den sanna konvergensradien till $P\left(\frac{1}{x}\right)$; r har, med andra ord sagdt, *högst* det värde som nyss angafs.

Svaret på den andra af de uppställda frågorna innehålles i följande sats.

*Området för argumentet till en analytisk funktion, som satisfierar en algebraisk likhet, utgöres af hela x -planet, och funktionen har blott ett ändligt antal gränsställen, hvilka äro inbegripna ibland de värden, för hvilka vare sig diskriminanten eller koefficienten $F_n(x)$ försvinner.*²⁾

Vi kunna på grund af § 2 anse, att likheten är irreduktibel. Är $P(x|a)$ ett element af funktionen, så är det icke svårt att finna, att detsamma kan fortsättas längs hvarje linie, som icke går genom någon af de nämnda punkterna. Rigtigheten af detta påstående följer utan svårighet deraf, att det för hvarje punkt på periferin af konvergenscir-

¹⁾ Det bidrager till öfverensstämmelsen med det föregående, om också koefficienterna uti likheten utvecklas efter potenser af $\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}$, sedan de dividerats med x^m .

²⁾ Vi utesluta tills vidare punkten $x = \infty$ ifrån våra betraktelser.

keln till $P(x|a)$, om man undantager de punkter i hvilka vare sig diskriminanten eller $F_n(x)$ försvinner, finnes en potensserie, som öfverensstämmer med $P(x|a)$ inom det för båda gemensamma konvergensområdet, och hvilken följaktligen är en analytisk fortsättning af $P(x|a)$. Detta kunna vi anse oss ha bevisat, då det var fråga om konvergensområdet till en potensserie, som satisfierar en algebraisk likhet. Om de analytiska fortsättningarna gäller sedan oupphörligen detsamma som om $P(x|a)$. — Då vi nu visat, att gränsställena till funktionen äro inbegripna ibland de värden, för hvilka vare sig diskriminanten eller $F_n(x)$ blir noll, så är dermed naturligtvis icke sagdt, att omvänt hvarje sådant värde är ett gränsställe till funktionen. Det inträffar verkligen stundom, att en nollpunkt till diskriminanten icke är ett gränsställe till funktionen.

Om nu $P_1(x|a')$, $P_2(x|a')$, $\dots$ $P_n(x|a')$ äro de n skilda potensserier, som vi kunna bilda för en punkt a' , hvori hvarken diskriminanten eller $F_n(x)$ försvinner, och om a är en annan punkt, hvar som helst i x -planet, samt $P(x|a)$ en potensserie, som också satisfierar vår likhet, så måste åtminstone en af de förra serierna vara en analytisk fortsättning af $P(x|a)$. Ty emedan det för punkten a' finnes en fortsättning af $P(x|a)$, hvilken också satisfierar likheten, så måste den konstanta termen i denna fortsättning vara lika med den konstanta termen i en af serierna P_1 , P_2 , $\dots$ P_n , och då måste sjelfva serierna vara identiskt lika, emedan denna konstanta term är en enkel rot till likheten för $x = a'$.

Det är tänkbart, att de konstanta termerna äro lika uti två eller flere af de olika potensserier, som möjligen motsvara en punkt, hvori likheten icke har n skilda ändliga rötter. Att antalet af dessa olika potensserier icke heller här kan vara större än n , inses, om man utaf hvar och en af dem för samma punkt inom deras gemensamma konvergensområde härleder en ombildning. Är denna punkt så vald, att likheten i densamma har n enkla rötter, så kan ibland dessa ombildningar finnas högst n sig emellan olika. Detta gäller då tydligen också om de ursprungliga serierna.

Vi kunna således här anteckna följande sats. *En analytisk funktion,*

hvilken satisfierar en irreduktibel algebraisk likhet af graden n i afseende å y , är på sin höjd en n -tydig funktion.¹⁾

Nu uppstår frågan, äro alla de potensserier, som satisfiera en irreduktibel algebraisk likhet, element af en och samma analytiska funktion, eller kunna de tillhöra flere skilda analytiska funktioner? Emedan hvarje sådan potensserie är en analytisk fortsättning af någon utaf de n skilda potensserier, som motsvara en punkt, hvori hvarken diskriminanten eller $F_n(x)$ försvinner²⁾, så sammanfaller föregående fråga med den frågan, huruvida alla de n serier, som motsvara en sådan punkt, genom fortsättning kunna härledas ur en ibland dem.

I närmast följande § skola några frågans besvarande förberedande betraktelser anställas, och en erforderlig sats (den Laurenska) härledas.

7. Låt $P(x|a)$ vara ett element af en analytisk funktion, och låt oss betrakta denna inom ett visst område, S , af x , hvilket utgör ett enda kontinuum, och inom hvilket punkten a antages ligga. Oaktadt funktionen kanske är mångtydig, så kan det inträffa, att det icke är möjligt att för någon punkt inom S erhålla mer än en fortsättning af $P(x|a)$, såvida man vid fortsättandet icke öfverskrider gränsen af området S . Är x ett värde inom S , för hvilket man på detta sätt kan erhålla en fortsättning af $P(x|a)$, och $\psi(x)$ det motsvariga värdet af denna fortsättning, så är $\psi(x)$ en entydig funktion inom det område, för hvilket den är definierad.

Låt $\varphi(t)$ vara en entydig och kontinuerlig funktion af den reela variabeln t från och med $t = \alpha$ till och med $t = \alpha'$. Sätt

$$\alpha = \varphi(\alpha), \alpha_1 = \varphi(t_1), \dots, \alpha_n = \varphi(t_n), \alpha' = \varphi(\alpha'),$$

$$\alpha < t_1 < \dots < t_n < \alpha' \text{ } ^3),$$

¹⁾ Satsen gäller naturligtvis *a fortiori*, om likheten icke är irreduktibel, § 2.

²⁾ Ty emedan en af dessa n serier bevisats vara en fortsättning af den betraktade serien, så eger också det omvända rum.

³⁾ Man hade också kunnat antaga $\alpha > t_1 > \dots > t_n > \alpha'$, utan att de följande betraktelserna undergå någon väsentlig förändring.

och antag, att det finnes en skara af potensserier

$$P(x|a), P_1(x|a_1), \dots, P_n(x|a_n), \bar{P}(x|a'),$$

der hvarje efterföljande erhållits genom omedelbar ombildning af den närmast föregående. Om det nu inträffar, att i allmänhet alla de värden x , som erhållas ur

$$x = \varphi(t) \quad , \quad t_v \leq t \leq t_{v+1}, t_0 = a, t_{n+1} = a',$$

falla inom konvergensområdet för

$$P_v(x|a_v) \quad , \quad P_0 = P, a_0 = a,$$

så säges $\bar{P}(x|a')$ vara erhållen ur $P(x|a)$ genom fortsättning (ombildning) längs linien $x = \varphi(t)$, och $P(x|a)$ säges vara ombildad uti $\bar{P}(x|a')$ längs linien $x = \varphi(t)$. Det har redan i inledningen anförts, att man alltid genom ombildning af $P(x|a)$ längs linien $x = \varphi(t)$ erhåller samma element uti punkten $a' = \varphi(a')$, huru också punkterna $a_v = \varphi(t_v)$ till antal och läge för öfrigt må väljas på linien, om blott de angifna villkoren äro uppfyllda.

Emedan $\varphi(t)$ möjligen antager samma värde x , för olika värden på t , så vore det icke alltid riktigt, om man sade, att hvarje punkt på linien $x = \varphi(t)$ motsvaras af en enda fullt bestämd ombildning af $P(x|a)$. Deremot kunna vi säga, att hvarje värde på t emellan a och a' , eller hvarje genom likheten $x = \varphi(t)$, $a \leq t \leq a'$, definieradt värdepar x, t motsvaras af en enda fullt bestämd ombildning af $P(x|a)$. Denna sats innehålls naturligtvis också uti den återopade satsen från inledningen.

Sätter man $x = r.e^{ti}$, så genomlöper x en cirkel med radien r , då t växer från 0 till 2π . Sätter man

$$x = \sum_{v=1}^{n-1} \varepsilon_v (a_v + (t-v)(a_{v+1} - a_v)).$$

der $\varepsilon_v = 1$ för $0 \leq t-v < 1$ men noll för alla andra värden på t , så genomlöper x , under det t växer från $t=1$ till $t=n$, en bruten linie, som förenar punkterna $a_1, a_2, \dots, a_n$.¹⁾

¹⁾ Här kan n vara $= \infty$.

Emedan tydligen hvarje analytisk fortsättning af $P(x|a)$ kan erhållas ur $P(x|a)$ genom ombildning längs en bruten linie, så är det egentligen icke nödvändigt att vid diskussionen af en analytisk funktion taga i betraktande andra linier än brutna. Det kan dock vara skäl att också taga i betraktande linier, som kunna framställas genom den allmännare formeln $x = \varphi(t)$, der φ är en kontinuerlig funktion af den reela variabeln t .

Vi anknyta den följande framställningen till några bekanta satser.

Låt

$$P(x|a) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_n(x-a)^n + \dots$$

vara en potensserie, hvars konvergensradie är R . Bildar man nu potensserierna

$$P'(x|a) = c_1 + 2c_2(x-a) + \dots + (n+1)c_{n+1}(x-a)^n + \dots,$$

$$G(x|a) = c + c_0(x-a) + \dots + \frac{1}{n}c_{n-1}(x-a)^n + \dots, \quad c = \text{konst.}$$

så ha båda serierna också R till konvergensradie. Den förra är differentialkoefficient till $P(x|a)$, hvilken sjelf i sin tur är differentialkoefficient till $G(x|a)$. Är x_0 en punkt inom området $|x-a| < R$, och ombildar man serierna $P'(x|a)$, $P(x|a)$, $G(x|a)$ uti de resp. serierna $P'_1(x|x_0)$, $P_1(x|x_0)$, $G_1(x|x_0)$, så är åter $P'_1(x|x_0)$ differentialkoefficient till $P_1(x|x_0)$, hvilken i sin tur är differentialkoefficient till $G_1(x|x_0)$. De tre serierna ha således samma konvergensområde.

En omedelbar följd af dessa satser är följande allmänna sats. Man kan analytiskt fortsätta $P'_1(x|a)$ och $G(x|a)$ längs hvarje linie, utefter hvilken $P(x|a)$ kan fortsättas. Uti hvar och ett af de system af potensserier, som på det i inledningen sid. 6 angifna sättet kunna härledas ur systemet $P'_1(x|a)$, $P(x|a)$, $G(x|a)$, är den potensserie, som motsvarar $P'_1(x|a)$, differentialkoefficient till den, som motsvarar $P(x|a)$, och den potensserie, som motsvarar $P(x|a)$, differentialkoefficient till den, som motsvarar $G(x|a)$.

Om man således på tvänne skilda vägar i en viss punkt erhåller samma fortsättning af $P(x|a)$, så erhåller man i denna punkt på båda vägarne också samma fortsättning af $P'_1(x|a)$. Deremot kan detta icke alltid sägas om $G(x|a)$, utan fortsättningarna af $G(x|a)$ kunna skilja sig genom sina konstanta termer, men också endast genom dessa.

För potensserien $G(x|a)$ införa vi nu tecknet

$$\int P(x|a)dx.$$

Denna potensserie är fullt bestämd, så snart $P(x|a)$ och konstanten c äro angifna. Då vi använda detta tecken, så tänka vi oss en viss godtycklig fixering af konstanten c , hvilken sedan bibehålles under alla derpå följande betraktelser.

Man inser nu lätt rigtigheten af följande för oss viktiga sats.

(I) Om $P(x|a)$, $P_1(x|a)$, $P_2(x|a)$, $\dots$ $P_n(x|a)$ äro potensserier, som fortskrida efter hela och positiva potenser af $x - a$, och om

$$P(x|a) = A_1 \cdot P_1(x|a) + A_2 \cdot P_2(x|a) + \dots + A_n \cdot P_n(x|a),$$

$A = \text{konst.},$

så är

$$\int P(x|a)dx = A_1 \int P_1(x|a)dx + A_2 \int P_2(x|a)dx + \dots + A_n \int P_n(x|a)dx + C,$$

såvida de resp. konstanterna $c, c_1, c_2, \dots, c_n$ uti de i denna likhet ingående serierna och konstanten C äro så fixerade att

$$c = A_1 \cdot c_1 + A_2 \cdot c_2 + \dots + A_n \cdot c_n + C,$$

och samma likhet består också för hvar och ett af de system af potensserier, som på det i inledningen (sid. 6) angifna sättet kunna härledas ur systemet

$$\int P(x|a), \int P_1(x|a), \dots, \int P_n(x|a)dx.$$

Vi ombilda $P(x|x_0)$ längs linien $x = \varphi(t)$, $x_0 = \varphi(t_0)$, och förstå med $f(x|x',t)$ den ombildning af $P(x|x_0)$, som erhålles i punkten $x' = \varphi(t')$, samt med $F(x|x',t)$ den motsvarande ombildningen af $\int P(x|x_0)dx$. Vi bilda nu differensen $F(x'|x',t') - F(x_0|x_0,t_0)$ och uppställa den definierande likheten

$$\int_{x_0}^{x'} f(x|x_0,t_0)dx = F(x'|x',t') - F(x_0|x_0,t_0).$$

Denna storhet, hvilken utgör skillnaden emellan de konstanta termerna

i $F(x|x',t')$ och $F(x|x_0,t_0)$, säges vara en *integral*, som längs linien $x = \varphi(t)$ är tagen emellan gränserna $x_0 = \varphi(t_0)$ och $x' = \varphi(t')$.

(II) *Integralen*

$$\int_{x_0}^{x'} f(x|x_0,t_0)dx$$

är oberoende af valet utaf den konstanta termen i

$$\int f(x|x_0,t_0)dx = F(x|x_0,t_0).$$

Ty om $F(x|x_0,t_0)$ och $\bar{F}(x|x_0,t_0)$ äro tvänne potensserier, af hvilka $f(x|x_0,t_0)$ är differentialkoefficient, så är

$$F(x|x_0,t_0) = \bar{F}(x|x_0,t_0) + C, \quad C = \text{konst.},$$

och således på grund af en ofta använd sats

$$F(x|x',t') = \bar{F}(x|x',t') + C.$$

Sätter man i den förra likheten $x = x_0$ och i den senare $x = x'$ och subtraherar den förra af de så erhållna likheterna ifrån den senare, så fås en likhet, hvaraf satsens sanning framgår.

(III) *Om*

$$f(x|x_0,t_0) = A_1 f_1(x|x_0,t_0) + \dots + A_n f_n(x|x_0,t_0),$$

så är

$$\int_{x_0}^{x'} f(x|x_0,t_0)dx = A_1 \int_{x_0}^{x'} f_1(x|x_0,t_0)dx + \dots + A_n \int_{x_0}^{x'} f_n(x|x_0,t_0)dx.$$

Satsens sanning följer ur likheterna

$$F(x|x_0,t_0) = A_1 F_1(x|x_0,t_0) + \dots + A_n F_n(x|x_0,t_0) + C,$$

$$F(x|x',t') = A_1 F_1(x|x',t') + \dots + A_n F_n(x|x',t') + C.$$

(IV) Ur den uppställda definitionen på en *integral* följer, att integralen $\int_{x_0}^{x'} f(x|x_0,t_0)dx$, tagen längs linien $x = \varphi(t)$, $t_0 \leq t \leq t'$, är lika med det motsatta värdet af integralen $\int_{x'}^{x_0} f(x|x',t')dx$, tagen längs linien $x = \varphi(t)$, $t' \geq t \geq t_0$,

$$\int_{x_0}^{x'} f(x|x_0,t_0)dx = -\int_{x'}^{x_0} f(x|x',t')dx.$$

(V) Om

$$x_0 = \varphi(t_0), x_1 = \varphi(t_1), \dots, x_n = \varphi(t_n), x' = \varphi(t'), \\ t_0 < t_1 < \dots < t_n < t', ^1)$$

så är

$$\int_{x_0}^{x'} f(x | x_0, t_0) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x | x_0, t_0) dx + \dots + \int_{x_n}^{x'} f(x | x_0, t_0) dx.$$

Ty man har

$$F(x' | x', t') - F(x_0 | x_0, t_0) = F(x_1 | x_1, t_1) - F(x_0 | x_0, t_0) \\ + F(x_2 | x_2, t_2) - F(x_1 | x_1, t_1) + \dots + F(x' | x', t') - F(x_n | x_n, t_n).$$

Vi antaga, att linien $x = \varphi(t)$, $t_0 \leq t \leq t'$, är *sluten*, d. v. s. att $x_0 = \varphi(t_0) = x' = \varphi(t')$. Vidare antaga vi att $f(x | x_0, t_0) = f(x | x', t')$. En omedelbar följd af detta antagande är, att om man å nyo genomlöper linien $x = \varphi(t)$, man i hvarje punkt x , t på densamma erhåller samma element som första gången.

Om vi fasthålla vid de gjorda antagandena, och om $t_0 < t_1 < t'$, så är integralen

$$\int f(x | x_1, t_1) dx,$$

tagen längs den slutna linie, som till sitt lopp bestämmes derigenom, att t uti likheten $x = \varphi(t)$ kontinuerligt och växande först genomlöper värdena $t_1 \leq t \leq t'$, och sedan värdena $t_0 \leq t \leq t_1$, lika med integralen $\int f(x | x_0, t_0) dx$, tagen längs linien $x = \varphi(t)$, $t_0 \leq t \leq t'$. Den i fråga varande integralen är, med andra ord sagdt, oberoende af läget utaf punkten x_1 , t_1 på linien $x = \varphi(t)$. Denna sats inses i stöd af satserna (II) och (V).

Låt oss nu betrakta en funktion $\psi(x)$, som på det i början af denna § angifna sättet är entydigt definierad inom ett visst kontinuerligt område. Funktionen $\psi(x)$ kan i omgifningen af hvarje punkt inom det område, för hvilket den är definierad, uttryckas genom en vanlig potensserie. Äro $x_0 = \varphi(t_0)$ och $x' = \varphi(t')$ tvänne punkter, mellan hvilka linien $x = \varphi(t)$ löper, hvars alla punkter falla inom det i fråga varande

¹⁾ Eller $t_0 > t_1 > \dots > t_n > t'$.

området, samt $f(x|x_0, t_0)$ den potensserie, genom hvilken $\psi(x)$ i omgifningen af x_0 uttryckes, så är

$$\int_{x_0}^{x'} f(x|x_0, t_0) dx$$

en entydigt gifven storhet, så snart linien $x = \varphi(t)$ är gifven. Vi kunna uppenbarligare, utan att någon tvetydighet uppstår, enklare beteckna denna integral genom

$$\int_{x_0}^{x'} \psi(x) dx.$$

Denna integral är naturligtvis i allmänhet beroende af den linie, som förenar punkterna x_0 och x' . Är integralen

$$\int \psi(x) dx$$

tagen längs en sluten linie inom det i fråga varande området, så är densamma fullt bestämd, så snart linien är angifven, utan att man behöfver angifva den punkt på linien från hvilken integralen räknas, ty på grund af en nyss uppställd sats är integralen oberoende af denna punkts läge.

Det är af vikt att framhålla, att de definitioner och satser från integralteorin, hvilka i det föregående framstälts, också, såsom man mycket lätt finner, hafva sin tillämpning och giltighet, då fråga är om en linie, hvars läge emellan punkterna $x_0 = \varphi(t_0)$ och $x_1 = \varphi(t_1)$ bestämmes genom likheten $x = \varphi(t)$, samt emellan punkterna $x_1 = \varphi(t_1)$ och $x_2 = \varphi(t_2')$ genom $x = \varphi_1(t)$, o. s. v.

Vi förutsätta i det följande såsom bekant, att potensserien

$$c + \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda+1} \cdot \frac{(x-x_0)^{\lambda+1}}{(x_0-a)^{\lambda+1}} = \int \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^{\lambda}}{(x_0-a)^{\lambda+1}} \right) dx$$

är ett element af en oändligt mångtydig funktion, hvilken, om konstanten c är så vald att $x_0 - a = e^c$, betecknas med $\log(x-a)$, samt att detta och alla andra element af $\log(x-a)$ satisfiera likheten

$$x - a = e^{\log(x-a)}.$$

I det ändliga har $\log(x-a)$ det enda gränsstället $x = a$. Ombildar man ett element af $\log(x-a)$ längs cirkeln $x - a = r \cdot e^{ti}$, $t_0 \leq t \leq t_0$

$+2\pi$, så erhåller man i punkten $x_0 = a + r.e^{(t_0 + 2\pi)i}$ ett nytt element, hvilket endast derigenom skiljer sig ifrån det förra, att den konstanta termen är $c + 2\pi i$, om c är den konstanta termen i det förra elementet. Man har följaktligen

$$\int_{(r)} \frac{dx}{x-a} = 2\pi i,$$

om integralen tages i positiv riktning¹⁾ längs en cirkel (r) , hvars medelpunkt är $x = a$. Allt detta förutsättes såsom bekant.²⁾

Låt nu $P(x|x_0) = \psi(x)$ vara en potensserie, hvars konvergensradie är R . Om då r är en positiv quantitet, som är mindre än R , så är

$$\psi^{(n)}(x_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\psi(x)}{(x-x_0)^{n+1}} dx, \quad \psi^{(0)}(x_0) = \psi(x_0), \quad |0|=1,$$

hvarst integralen är tagen i positiv riktning längs cirkeln (r) , hvars medelpunkt är x_0 . Ty man har

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \psi^{(1)}(x_0)(x-x_0) + \dots + \frac{\psi^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \dots$$

och således

$$\frac{\psi(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{\psi(x_0)}{(x-x_0)^{n+1}} + \frac{\psi^{(1)}(x_0)}{(x-x_0)^n} + \dots + \frac{\psi^{(n)}(x_0)}{n!(x-x_0)} + G(x|x_0),$$

der G är en vanlig potensserie. Här af följer, sats I,

$$\begin{aligned} \int_{(r)} \frac{\psi(x)}{(x-x_0)^{n+1}} dx &= \psi(x_0) \int_{(r)} \frac{dx}{(x-x_0)^{n+1}} + \psi^{(1)}(x_0) \int_{(r)} \frac{dx}{(x-x_0)^n} + \dots \\ &+ \frac{\psi^{(n)}(x_0)}{n!} \int_{(r)} \frac{dx}{x-x_0} + \int_{(r)} G(x|x_0) dx + C, \\ 0 &< |a-x_0| = r < R, \end{aligned}$$

¹⁾ Integralen säges vara tagen i positiv riktning längs cirkeln $x-a=r.e^{it}$, om t genomlöper värdena $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi$, och i negativ riktning, om t genomlöper värdena $t_0 \geq t \geq t_0 - 2\pi$.

²⁾ En framställning här af finnes i afhandlingen *Diskussion af den analytiska funktion, af hvilken binomialserien utgör ett element, etc.* af A. Ramsay.

om funktionerna under integraltecknet tänkas utvecklade efter potenser af $x - a$. Alla andra funktioner i högra membrum utom $\int \frac{dx}{x - x_0}$ äro tydligen entydiga funktioner inom området $|x - x_0| < R$. Följaktligen är (III)

$$\int_{(r)} \frac{\psi(x)}{(x - x_0)^{n+1}} dx = \frac{\psi^{(n)}(x_0)}{n!} \int_{(r)} \frac{dx}{x - x_0},$$

emedan alla andra integraler $f_{(r)}$ äro noll. Härmed är satsen bevisad. För $n = 0$ fås

$$\psi(x_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\psi(x)}{x - x_0} dx,$$

hvilken likhet för oss är af vigt.

Låt $\int_{x_0}^{x'} f(x | x_0, t_0) dx$ vara en integral, som är tagen längs linien $x = \varphi(t)$,

$t_0 \leq t \leq t'$. Sätt

$$t_0 < t_1 < \dots < t_n < t', x_v = \varphi(t_v), v = 1, 2, \dots, n,$$

och antag, att öfre gränsen, L , till de värden, som summan

$$S = |x_1 - x_0| + |x_2 - x_1| + \dots + |x' - x_n|$$

kan erhålla, är ändlig. Är då g öfre gränsen för de värden, som $|f(x | x, t)|$ antager då t genomlöper alla värden från t_0 till t' , så är

$$\left| \int_{x_0}^{x'} f(x | x_0, t_0) dx \right| \leq g \cdot L.$$

Är $t_0 < t'_0 < t'$, och äro S_1 och S_2 summor, som i afseende å de resp. intervallerna $t_0 \leq t \leq t'_0$ och $t'_0 \leq t \leq t'$ äro definierade på samma sätt som S i afseende å intervallen $t_0 \leq t \leq t'$, så är öfre gränsen till S lika med summan af de resp. öfre gränserna till S_1 och S_2 . På grund häraf och sats (IV) är det nog, om vi bevisa vårt påstående för det fall, att alla punkter af linien $x = \varphi(t)$ falla inom konvergensområdet för $f(x | x_0, t_0) = P(x | x_0)$.

Låt R vara konvergensradien till P , och välj ett positivt tal, R_1 , sådant att $R_1 < R$ och att ingen punkt af $x = \varphi(t)$ faller utom den cirkel, som har x_0 till medelpunkt och R_1 till radie. Sätt vidare $0 < \rho < R - R_1$, och framställ ett så litet positivt tal, δ , att $|x_{v+1} - x_v| < \rho$, så snart $|t_{v+1} - t_v| < \delta$, $v = 1, 2, \dots, n$, ($x_{n+1} = x'$, $t_{n+1} = t'$), hvilket är möjligt, emedan $\varphi(t)$ antages vara kontinuerlig från och med t_0 till och med t' . Man har då, om man sätter $\int P(x|x_0)dx = G(x|x_0)$,

$$G(x_{v+1}|x_0) - G(x_v|x_0) = P(x_v|x_0)(x_{v+1} - x_v) + \varphi(x_v, x_{v+1} - x_v)(x_{v+1} - x_v)^2 \\ v = 1, 2, \dots, n,$$

$$\text{hvarest } \varphi(x_v, x_{v+1} - x_v) = \frac{P'(x_v|x_0)}{2} + \frac{P^{(2)}(x_v|x_0)}{3}(x_{v+1} - x_v) + \dots \text{ Adderas}$$

dessa likheter, så fås

$$G(x'|x_0) - G(x_0|x_0) = \sum_{v=0}^n P(x_v|x_0)(x_{v+1} - x_v) + \sum_{v=0}^n \varphi(x_v, x_{v+1} - x_v)(x_{v+1} - x_v)^2.$$

De värden, som $\varphi(x_v, x_{v+1} - x_v)$ kan antaga då $|t_{v+1} - t_v| < \delta$, äro inbegripna ibland de värden, som $\varphi(\xi, \eta)$ kan erhålla, då ξ och η antaga alla värden som uppfylla villkoren $|\xi| \leq R_1, |\eta| \leq \rho$. Vi bevisa nu, att $\varphi(\xi, \eta)$ i omgifningen af hvarje punkt ξ', η' inom och på gränsen af detta område kan utvecklas efter hela och positiva potenser af $\xi - \xi' = h$ och $\eta - \eta' = k$. Dermed är då bevisadt, att $|\varphi|$ inom och på gränsen af sagde område är en kontinuerlig funktion, och att således öfre gränsen ψ till $|\varphi|$ är ändlig. — Vi kunna tydligen inskränka h och k till en så liten omgifning af noll, att $|\eta'| + |h| + |k| < R - R_1$. Emedan då såväl $|\xi' - x_0| + |\eta' + h + k| < R$ som $|\xi' + h - x_0| + |\eta' + k| < R$, så kan $G(\xi' + \eta' + h + k|x_0)$ utvecklas efter potenser af $\eta' + h + k$ och $\eta' + k$

$$G(\xi' + \eta' + h + k|x_0) = G(\xi'|x_0) + P(\xi'|x_0)(\eta' + h + k) + \dots = A \\ = G(\xi' + h|x_0) + P(\xi' + h|x_0)(\eta' + k) + (\eta' + k)^2 \varphi(\xi' + h, \eta' + k) = B$$

Emedan $|\eta'| + |h| + |k| < R - R_1$, så kan A utvecklas efter potenser af h och k . Förr än dock detta göres, utvecklas A efter potenser $\eta' + k$

samt de tvänne första termerna i B efter potenser af h . Man finner då, att dessa tvänne utvecklingar häfva sig mot de tvänne första termerna i A . Emedan således den serie, som återstår i A , börjar med andra potensen af $\eta' + k$, så kan faktorn $(\eta' + k)^2$ bortlemnas ifrån hvardera memrum af likheten $A = B$, och sedan följer lätt riktigheten af vårt påstående.

Då det nu är bevisadt, att öfre gränsen ψ till $|\varphi|$ är ändlig, så är den senare summan i högra memrum af likheten (1) mindre än $\varepsilon \cdot \psi \cdot L$, om ε betyder det största värde, som tillkommer någon af storheterna $|x_{v+1} - x_v|$. Emedan ε kan göras mindre än hvarje godtyckligt litet positivt tal derigenom, att man tager öfre gränsen till storheterna $t_{v+1} - t_v$ tillräckligt liten, så finner man, att den första summan i likheten (1) har till gränsvärde den differens, som står i venstra memrum.

På grund häraf och emedan sagde summa till sitt absoluta belopp är $\leq g \cdot L$, är också

$$|G(x' | x_0) - G(x_0 | x_0)| \leq g \cdot L.$$

Låt nu R' och R vara tvänne positiva tal, af hvilka $R' < R$. Låt x_0 vara en punkt inom området $R' < |x - a| < R$ och $P(x | x_0)$ ett funktionselement, hvilket kan fortsättas längs hvarje linie inom detta område. Låt oss slutligen antaga, att man för hvarje punkt inom området erhåller blott en enda fortsättning af $P(x | x_0)$, såvida man vid fortsättandet icke öfverskrider gränsen af området. Det finnes då en efter hela potenser af $x - a$ fortskridande potensserie, hvilken absolut konvergerar inom området $R' < |x - a| < R$ och hvilken öfverensstämmer med $P(x | x_0)$ och de ifrågasvarande fortsättningarne af densamma inom de resp. områden, som dessa ha gemensamma med området $R' < |x - a| < R$.

Vi påminna först om följande bekanta sats, som under beviset kommer till användning. Om punkterna x_0 och x' falla inom konvergensområdet till en potensserie, hvaraf $P(x | x_0)$ är en omedelbar ombildning, så erhåller man i x' samma ombildning af $P(x | x_0)$ längs alla linier, som falla inom konvergensområdet för den första serien.

Under beviset beteckna vi den oberoende variabla med ξ och förstå med $\psi(\xi)$ en funktion, som genom $P(\xi | x_0)$ på det i början af denna § anförda sättet är entydigt definierad inom området $R' < |\xi - a| < R$.

Uppenbarligen är $\psi(\xi)(\xi - a)^n$, der n är ett positivt eller negativt helt tal, också en på samma sätt som ψ entydigt definierad funktion inom $R < |\xi - a| < R$. Är $R' < r' < R$, så är följaktligen integralen

$$\int \psi(\xi)(\xi - a)^n d\xi,$$

tagen längs cirkeln $x - a = r' \cdot e^{ti}$, $t_0 \leq t \leq t_0 + 2\pi$, en entydigt gifven storhet, som är oberoende af t_0 . Vi bevisa nu, att den också är oberoende af, huru r' väljes emellan R' och R . Låt $r' < r < R$, då skall integralen längs cirkeln (r') vara lika med integralen längs cirkeln (r). — Vi använda i det följande bokstafven G såsom ett gemensamt tecken för alla de element, hvartill funktionen under ett integraltecken är differentialkoefficient. — Emedan tydligen konvergensområdet till hvarje element af $\psi(\xi)(\xi - a)^n$ sträcker sig minst till gränsen af området $R' < |\xi - a| < R$, så är undre gränsen, δ , till konvergensradierna för de element G , som tillhöra området $r' \leq |\xi - a| \leq r$, icke noll. Vi välja nu radierna $r_1, r_2, \dots, r_\mu$ så, att $r_1 - r' = r_2 - r_1 = \dots = r_\mu - r_{\mu-1}$, och taga μ så stort, att $r_1 - r' < \delta$. Vidare sätta vi $x'_\nu - a = r' \cdot e^{\frac{2\nu\pi i}{m}}$, $x_\nu - a = r_1 \cdot e^{\frac{2\nu\pi i}{m}}$, $\nu = 1, 2, \dots, m$. Emedan då

$$|x'_\nu - x_\nu| = r_1 - r' < \delta, \quad |x'_\nu - x_{\nu+1}| = |r_1 \cdot e^{\frac{2\nu\pi i}{m}} - r' |,$$

$$|x'_\nu - x'_{\nu+1}| = r' \cdot |1 - e^{\frac{2\pi i}{m}}|,$$

så ses, att man kan taga m så stort, att icke blott x_ν utan också $x_{\nu+1}$ och $x'_{\nu+1}$ falla inom konvergensområdet för $G(x|x'_\nu)$. Vi ombilda nu $G(x|x'_1)$ längs cirkeln (r') eller, hvilket är detsamma, längs den brutna linien $(x'_1, x'_2, \dots, x'_m, x'_1)$. Vi få då i punkten x'_1 samma element, som om vi ombilda $G(x|x'_1)$ längs den brutna linien

$$(x'_1, x_1, x_2, x'_2, x_2, \dots, x_\nu, x'_\nu, x_\nu, x_{\nu+1}, x'_{\nu+1}, \dots, x_1, x'_1).$$

Detta är en omedelbar följd af det, som sades om $x'_\nu, x_\nu, x_{\nu+1}, x'_{\nu+1}$. Emedan åter x'_ν faller inom konvergensområdet för $G(x|x_\nu)$, så få vi i x'_1 , samma resultat längs denna linie, som längs linien $(x'_1, x_1, x_2, \dots, x_m, x_1, x'_1)$.

Integralen $\int \psi(\xi)(\xi - a)^n d\xi$, tagen längs cirkeln (r') , är följaktligen lika med samma integral, tagen längs den sist nämnda linien, det är längs cirkeln (r_1) , ty linien (x', x_1) genomlöpes tvänne gånger i motsatta riktningar. På samma sätt visas, att integralen är densamma, om den tagges längs (r_1) eller (r_2) , o. s. v. tills man kommer till r .

Detta förutsatt bilda vi nu tvänne oändliga serier af entydigt bestämda storheter sålunda, att vi sätta

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \int \psi(\xi)(\xi - a)^{-(n+1)} d\xi, \quad n = 0, 1, \dots \infty,$$

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int \psi(\xi)(\xi - a)^{n-1} d\xi, \quad n = 1, 2, \dots \infty,$$

der integralerna ha den nyss angifna betydelsen. Derefter bilda vi serien

$$\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} C_{-n}(x-a)^{-n}.$$

Det är lätt att finna, att densamma absolut konvergerar för hvarje x , som tillhör området $R' < |x-a| < R$. Ty sedan ett sådant x blifvit fixerad, kunna vi anse, att integralerna C_n äro tagne längs en cirkel, hvars radie, r , uppfyller villkoret $|x-a| < r < R$, och integralerna C_{-n} längs en cirkel, hvars radie, r' , uppfyller villkoret $R' < r' < |x-a|$. Äro g och g' de resp. öfre gränserna för $|\psi(\xi)|$ på cirkelne (r) och (r') , så är på grund af en nyss bevisad sats

$$|C_n| |x-a|^n \leq g \cdot \frac{|x-a|^n}{r^n}, \quad |C_{-n}| |x-a|^{-n} = g' \cdot \frac{r'^n}{|x-a|^n},$$

hvaraf den absoluta konvergensen framgår.

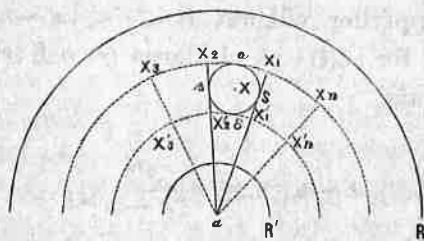
Vi skola nu bevisa, att $\varphi(x) = \psi(x)$. Om x är ett värde, hvilket som helst, inom området $R' < |x-a| < R$, så är

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\psi(\xi)}{\xi-x} d\xi,$$

om integralen är tagen längs en cirkel, som har x till medelpunkt och en så liten radie, ρ , att cirkeln hel och hållen faller inom området $R' < |\xi - a| < R$. Omkring punkten a såsom medelpunkt upprita vi nu tvänne koncentrisk cirklar, (r') och (r) , $r' < r$, hvilka tangera cirkeln (ρ) , och draga ifrån a tvänne tangenter till cirkeln (ρ) . De punkter, i hvilka dessa tangenter råka cirkeln (r) , beteckna vi med $x_1 = r \cdot e^{t_1 i}$ och x_2 , samt de motsvariga punkterna på cirkeln (r') med x'_1 och x'_2 . Vi välja ρ så, att bågen $(x_1 x_2)$ utgör en jemn del af $2\pi r$, och sätta

$$x_v - a = r \cdot e^{(t_1 + \frac{2(v-1)\pi}{m})i}, \quad x'_v - a = r' \cdot e^{(t_1 + \frac{2(v-1)\pi}{m})i}, \quad v = 1, \dots, m.$$

Genom en betraktelse, som nyligen har blifvit använd, visas nu att ρ kan tagas så litet, att i allmänhet $x_{v-1}, x_{v+1}, x'_{v-1}, x'_v, x'_{v+1}$ falla inom konvergensområdet för det element af $\psi(\xi)$, som motsvarar punkten x_v , ($x_0 = x_m, x_{m+1} = x_1$), och att tillika konvergensradierna till de element af $\psi(\xi)$, som höra till punkterna x'_1 och x'_2 , icke äro mindre än de resp. afstånden $|x'_1 - x|$ och $|x'_2 - x|$. Allt det sagda gäller då tydligen också om de motsvariga elementen af $\psi(\xi)(\xi - x)^{-1}$,¹⁾ såvida v icke har värdena 1 och 2, och således också om potensserierna $G(x|x_v)$, $G(x|x'_1)$ $G(x|x'_2)$, såvida icke $v = 1, 2$.



så fås i β samma element, $G(\xi|\beta)$, antingen man följer bågen $(\alpha\beta)$ eller den brutna linien $(\alpha x_2 \beta)$. Emedan $|x'_2 - x| > |x_2 - \beta|$, $|x'_2 - x| > |x'_2 - \gamma|$,

Om vi nu ombilda potensserien $G(\xi|\alpha)$ längs cirkeln $(\alpha\beta\gamma\delta\alpha)$, så erhålla vi i punkten α samma element, som om vi ombilda $G(\xi|\alpha)$ längs linien $(\alpha x_2 \beta x'_2 \gamma x'_1 \delta x_1 \alpha)$. Ty emedan punkterna α och β falla inom konvergensområdet för $G(\xi|x_2)$, alldenstund tydligen

¹⁾ Ty $\psi(\xi)(\xi - x)^{-1}$ har inga andra gränsställen än möjligen $\xi = x$.

så fås vidare i punkten γ samma fortsättning af $G(\xi|\beta)$, antingen man följer bågen $(\beta\gamma)$ eller linien $(\beta x'_2\gamma)$, o. s. v. Integralen $\int \psi(\xi)(\xi-x)^{-1}$ har således samma värde, antingen den tages längs cirkeln $(\alpha\beta\gamma\delta\alpha)$ eller längs den brutna linien $\alpha x_2\beta x'_2\gamma x'_1\delta x_1\alpha$. På grund här af och emedan det är likgiltigt ifrån hvilken punkt på linien integralen räknas, har man

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\psi(\xi)}{\xi - x} d\xi,$$

hvarest integralen nu är tagen längs den brutna linien $(x_1\alpha x_2x'_2\gamma x'_1x_1)$, eller hellre längs den brutna linien $(x_1x_2x'_2x'_1x_1)$ ¹⁾.

Vi bevisa nu, att man i punkten x_1 får samma element, antingen man ombildar $G(x|x_1)$ längs den brutna linien $(x_1x_2x'_2x'_1x_1)$ eller längs den brutna linien $(x_1x_2\cdots x_mx_1x'_1x'_m\cdots x'_2x'_1x_1)$. Tydligen erhåller man i punkten x_1 samma element antingen man fortsätter $G(x|x_1)$ längs den brutna linien $(x_1x_2x'_2x'_1x_1)$ eller längs den brutna linien $(x_1x_2x_3x'_3x'_2x'_1x_1)$. Ty sedan man erhållit $G(x|x_2)$, erhåller man i punkten x'_2 samma element, antingen man ombildar $G(x|x_2)$ längs linien $(x_2x'_2)$ eller längs $(x_2x_3x'_3x'_2)$, emedan båda linierna falla inom konvergensområdet för $G(x|x_3)$, hvaraf $G(x|x_2)$ kan anses vara en omedelbar ombildning. På samma sätt bevisas nu vidare, att man i punkten x_1 erhåller samma fortsättning längs linien $(x_1\cdots x_4x'_4\cdots x'_1x_1)$ som längs linien $(x_1\cdots x_3x'_3\cdots x'_1x_1)$, o. s. v. tills vårt påstående är ådagalagdt.

Härmed är nu också bevisadt, att integralen längs $(x_1x_2x'_2x'_1x_1)$ är lika med integralen längs den brutna linien $(x_1x_2\cdots x_mx_1)$ plus integralen längs $(x_1x'_1)$ plus integralen längs $(x'_1x'_m\cdots x'_2x'_1)$ plus integralen längs (x'_1x_1) . Emedan summan af den andra och fjärde integralen är noll, och den tredje lika med det motsatta värdet af integralen längs $(x'_1x'_2\cdots x'_mx'_1)$, så är

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\psi(\xi)}{\xi - x} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \int_{(r')} \frac{\psi(\xi)}{x - \xi} d\xi,$$

¹⁾ Det är icke sagdt, att man omedelbart kan ombilda $G(x|x_1)$ uti $G(x|x_2)$.

der integralerna tydligen kunna anses tagne längs de resp. cirklarne (r) och (r') . Emedan

$$\frac{1}{\xi - x} = \frac{1}{\xi - a} + \frac{x - a}{(\xi - a)^2} + \dots + \frac{(x - a)^{\mu+1}}{(\xi - a)^{\mu+1}} \cdot \frac{1}{\xi - x},$$

$$\frac{1}{x - \xi} = \frac{1}{x - a} + \frac{\xi - a}{(x - a)^2} + \dots + \frac{(\xi - a)^{\mu+1}}{(x - a)^{\mu+1}} \cdot \frac{1}{x - \xi},$$

så är, om man erinrar sig betydelsen af storheterna C_n och C_{-n} ,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\psi(\xi)}{\xi - x} d\xi = \sum_{n=0}^{\mu} C_n (x - a)^n + \frac{(x - a)^{\mu+1}}{2\pi i} \int_{(r)} \frac{\psi(\xi)}{(\xi - a)^{\mu+1}} \cdot \frac{d\xi}{\xi - x},$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(r')} \frac{\varphi(\xi)}{x - \xi} d\xi = \sum_{n=1}^{\mu} C_{-n} (x - a)^{-n} + \frac{(x - a)^{-(\mu+1)}}{2\pi i} \int_{(r')} \varphi(\xi) (\xi - a)^{\mu+1} \cdot \frac{d\xi}{x - \xi}.$$

Äro g och g' de resp. öfre gränserna till $|\varphi(\xi)(\xi - x)^{-1}|$ på cirklarne (r) och (r') , så är absoluta beloppet för sista termen i högra membrum af den förra likheten icke större än

$$r \cdot g \cdot \frac{|x - a|^{\mu+1}}{r^{\mu+1}},$$

och för motsvarande term i den senare likheten icke större än

$$r' \cdot g' \cdot \frac{r'^{\mu+1}}{|x - a|^{\mu+1}}.$$

Båda dessa storheter kunna, emedan $r' < |x - a| < r$, göras godtyckligt små genom att taga μ tillräckligt stort. Emedan följaktligen $|\psi(x) - \varphi(x)|$ är mindre än hvarje positivt tal, så är $\psi(x) = \varphi(x)$, och härmed anse vi den märkliga *Laurentska* satsen vara bevisad.

Att det icke kan finnas mer än en serie med samma egenskaper som φ inses sålunda. Funnes det tvänne, så vore deras skilnad, som också är en efter hela potenser af $x - a$ fortskridande potensserie, lika med noll. Låter man x genomlöpa en cirkel, som har a till medel-

punkt och faller inom området $R' < |x-a| < R$, så kan enligt en bekant sats absoluta beloppet för ingen af termerna i serien vara större än öfre gränsen, som här är noll, för absoluta beloppen af de värden, som serien derunder antager. Samtliga termer i skilnaden vore således noll.

För att göra framställningen så kort som möjligt, ha vi låtit righeten af vissa punkter i beviset framgå på geometrisk väg, men det inses, att beviset äfven i dessa punkter kan göras till ett rent analytiskt.

II.

1. I besittning af den Laurentska satsen kunna vi nu besvara den i slutet af § 6 uppkastade frågan genom att bevisa följande sats. *Alla de potensserier, hvilka satisfiera en gifven irreduktibel algebraisk likhet emellan x och y , äro element af en och samma analytiska funktion, hvilken icke tillika kan vara rot (= satisfiera) till någon annan irreduktibel algebraisk likhet¹⁾.*

Då vi säga, att ett ställe x_0 är ett gränsställe till en analytisk funktion, så är dermed, såsom redan i inledningen antyddes, icke nödvändigtvis sagdt, att det öfverhufvud icke finnes något emot x_0 svarande element af funktionen, utan endast, att x_0 uppträder såsom ett gränsställe, då man närmar sig detsamma på en bestämd väg²⁾.

Gränsställena till en *algebraisk funktion* d. v. s. en funktion, som är rot till en algebraisk likhet, sägas vara *singulära ställen* till funktionen. Alla andra ställen kallas då *regulära ställen*. De singulära ställena böra sökas ibland nollpunkterna till diskriminanten och $F_n(x)$. Men omvänt behöfver icke en nollpunkt till diskriminanten vara ett singulärt ställe. Vi gifva ett exempel. Nollpunkterna till diskriminanten sammanfalla på grund af § 3 med de värden på x , för hvilka det finnes sådana värden på y , att likheterna $F(x, y) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ samtidigt ega rum. Taga vi nu likheten

$$F = y^2 - x^2(1 - x) = 0,$$

¹⁾ Tvänne likheter anses icke såsom olika, om de blott skilja sig genom en konstant.

²⁾ Icke alltid uppställes samma definitiva på ett gränsställe. C. f. *Formeln und Lehrätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* von Schwarz, pag. 1.

så består densamma tillika med $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y = 0$ för $x=0, y=0$. Men $x=0$ kan icke vara ett singulärt ställe, emedan likheten, som är af andra graden i afseende å y , satisfieras af $y = xe^{\frac{1}{2}\log(1-x)}$ och $y = -xe^{\frac{1}{2}\log(1-x)}$, hvilka i omgifningen af $x=0$ kunna utvecklas efter potenser af x . Man visar nämligen lätt, att ett ställe, mot hvilket det svarar n potensserier, som satisfiera en irreduktibel likhet af graden n i afseende å y , icke kan vara ett singulärt ställe till en funktion, som är rot till likheten.

Låt $x=a$ vara ett ställe, i hvilket hvarken diskriminanten eller $F_n(x)$ är noll, och $P_1(x|a), P_2(x|a), \dots, P_n(x|a)$ de n skilda element, som i omgifningen af $x=a$ satisfiera vår irreduktibla likhet.

Om vi med hvarandra jemföra

$$(1) \quad y + \frac{F_{n-1}}{F_n}y^{n-1} + \dots + \frac{F_0}{F_n}$$

och

$$(2) \quad (y - P_1)(y - P_2) \dots (y - P_n) = y^n - f_1 y^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n,$$

der $f_1, f_2, \dots, f_n$ äro de elementära symmetriska funktionerna af $P_1, P_2, \dots, P_n$, så är det lätt att finna, att $(-1)^v f_v = \frac{F_{n-v}}{F_n}$ inom en cirkel, som har a till medelpunkt och icke innehåller någon singulär punkt. Ty om vi inom detta område fixera ett x , så äro (1) och (2) noll för samma värden på y och således för detta x identiskt lika, emedan koeficienten för högsta potensen af y är ett i båda.

Låt oss nu antaga, att potensserierna $P_1, P_2, \dots, P_n$ icke alla tillhöra samma analytiska funktion, utan att de sönderfalla i skilda grupper, sådana att alla element i samma grupp tillhöra samma analytiska funktion och låt $P_1, P_2, \dots, P_\mu$ vara en sådan grupp. Låt oss bilda

$$(y - P_1)(y - P_2) \dots (y - P_\mu) = y^\mu - f_1 y^{\mu-1} + \dots + (-1)^\mu f_\mu.$$

Funktionen $f_v, v=1, 2, \dots, \mu$, kan sättas lika med en potensserie $P(x|a)$, hvilken är ett element af en analytisk funktion, som nu skall undersökas. Likheten

$$P(x|a) = f_v$$

eger rum för det system af analytiska funktioner, som definieras genom systemet $P, P_1, \dots, P_\mu$, och systemets gränsställen böra sökas ibland de värden, i hvilka vare sig vår algebraiska likhets diskriminant eller koefficienten F_n försvinner. Låt oss nu fortsätta $P, P_1, \dots, P_\mu$ på en godtycklig väg, i det vi dock undvika de nämnda punkterna, och låt oss återkomma till punkten a . Det är lätt att se, att vi i punkten a återfå samma serie, $P(x|a)$, från hvilken vi utgingo. Ty å ena sidan måste fortsättningen af P_v , $v = 1, 2, \dots, \mu$ vara något af elementen $P_1, P_2, \dots, P_\mu$, och å andra sidan kunna de erhållna fortsättningarna af tvänne skilda serier P_v icke vara lika, emedan då de båda serierna P_v också skulle måsta vara lika. Sedan vi på den betraktade vägen återkommit till punkten a , så har följaktligen uti f , blott inträffat en *permutation* af potensserierna $P_1, P_2, \dots, P_\mu$. Men vid en sådan förblir f_v oförändrad. På samma sätt visas att det icke heller mot någon annan punkt i x -planet kan svara mer än en fortsättning af $P(x|a)$. Denna potensserie är således ett element af en entydig analytisk funktion, f_v , hvilken är definierad öfver hela planet, och hvilken kan ha blott ett ändligt antal singulära ställen. Vi skola söka att närmare bestämma denna funktion genom att undersöka, huru den förhåller sig i omgifningen af dess möjliga singulära ställen.

I och för denna undersökning är det nödigt att något betrakta vår algebraiska likhet

$$(3) \quad F_n y^n + F_{n-1} y^{n-1} + \dots + F_0 = 0.$$

Låt x_0 vara en nollpunkt af ordningen p till $F_n(x)$. Om man uti (3)

sätter $y = \frac{z}{(x - x_0)^p}$ och multiplicerar likheten med $(x - x_0)^{(n-1)p}$ så fås

$$(4) \quad \bar{F}_n z^n + F_{n-1} z^{n-1} + \dots + F_v (x - x_0)^{(n-1)p} = 0,$$

hvarest $F_n = \bar{F}_n (x - x_0)^p$, $|\bar{F}_n(x_0)| > 0$. Om $P(x|a)$ är en potensserie, som satisfierar likheten (3), så satisfieras likheten (4) tydligen af den genom likheten

$$(5) \quad \bar{P}(x|a) = (x - x_0)^p P(x|a)$$

definierade potensserien $\bar{P}$ och således också af alla fortsättningar af densamma. Likheten (5) består emellan alla motsvariga fortsättningar af P och $\bar{P}$. Emedan $|\bar{F}(x_0)| > 0$, så kunna vi omgifva x_0 med en cirkel, sådan att den öfre gränsen för absoluta beloppen af de värden på z , som satisfiera (4), är ändlig, såvida området för x inskränkes inom denna cirkel¹⁾. På grund här af erhåller man i stöd af det, som blifvit sagdt om likheten (5), följande viktiga sats.

Om $x = x_0$ är en nollpunkt af ordningen p till $F_n(x)$, och a en punkt mot hvilken det svarar n potensserier $P_1(x|a)$, $P_2(x|a)$, $\dots$, $P_n(x|a)$, som satisfiera vår likhet, så kan man omgifva x_0 med en cirkel, sådan att, om man tager i betraktande alla fortsättningar af $(x-x_0)^p P_1(x|a)$, $\dots$, $(x-x_0)^p P_n(x|a)$, som motsvara punkter inom sagde cirkel, den öfre gränsen till absoluta beloppen af de värden, som dessa fortsättningar kunna erhålla för värden på x , hvilka falla inom cirkeln, är ett ändligt tal. Det är nog om man väljer denna cirkel så, att x_0 är den enda ibland alla punkter inom cirkeln och på periferin af densamma, hvari $F_n(x)$ kan försvinna.

Om F_n är af samma grad, m , i afseende å x som $F(x, y)$ så inses i stöd af det, som blifvit anfördt på sid. 37, att den öfre gränsen till absoluta beloppen af de värden, som de analytiska fortsättningarna af $P_1(x|a)$, $P_2(x|a)$, $\dots$, $P_n(x|a)$ kunna erhålla utom en cirkel, som omsluter alla nollpunkter till F_n , är ändlig. Är åter F_n af lägre grad än m i afseende å x , och kommer F_n , sedan man dividerat alla koefficienter i $F(x, y)$ med x^m , att innehålla faktorn $\frac{1}{x^p}$, så ådagalägges såsom nyss, att den öfre gränsen för de värden, som de analytiska fortsättningarna af $\frac{1}{x^p} \cdot P_1(x|a)$, $\frac{1}{x^p} \cdot P_2(x|a)$, $\dots$, $\frac{1}{x^p} \cdot P_n(x|a)$ kunna erhålla utom sagde cirkel, är ändlig.

Nu återgå vi till den entydiga funktionen f_v , som var bildad af en grupp af potensserier, som antogos höra till samma analytiska funktion. De inom ändligt område belägna singulära ställena till f_v äro inbegripna ibland de punkter, i hvilka vare sig diskriminanten

¹⁾ C. f. sid. 29.

eller F_n försvinner. Är x_0 en sådan punkt och R ett positivt tal af den beskaffenhet, att ingen annan sådan punkt som x_0 är faller inom området $|x - x_0| < R$, så är i stöd af den Laurentska satsen

$$(6) \quad f_v = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_{\lambda} (x - x_0)^{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_{-\lambda} (x - x_0)^{-\lambda},$$

så snart $0 < |x - x_0| < R$. Det är nu lätt att visa, att denna serie kan innehålla blott ett ändligt antal negativa potenser af $x - x_0$, om den alls innehåller sådana, och att således x_0 på sin höjd är ett *oväsendtligt* *singulärt ställe* till f_v . Ty antager man, att x_0 är en nollpunkt af ordningen p till F_n , hvarvid p anses vara $= 0$ om $|F(x_0)| > 0$, så är, på grund af hvad nyligen visats, den öfre gränsen till absoluta beloppen af

$$(x - x_0)^p f_v$$

ändlig inom hvarje område, som faller inom området $0 < |x - x_0| < R$. Detta är möjligt endast derigenom, att i produkten af $(x - x_0)^p$ och serien (6) icke förekommer någon term med negativ potens af $x - x_0$. Ty öfre gränsen för absoluta beloppen af de värden, som en serie, hvilken fortskrider efter hela potenser af $x - x_0$, antager på en cirkelperiferi, som har x_0 till medelpunkt, kan icke vara mindre än absoluta beloppet för någon af termerna.

För alla värden på x , som falla utom en cirkel, hvilken har origo till medelpunkt, och omsluter alla i det ändliga belägna singulära ställen till f_v , har man i stöd af den Laurentska satsen

$$f_v = \sum_{\lambda=0}^{\infty} C_{\lambda} x^{\lambda} + \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_{-\lambda} x^{-\lambda}$$

Med ledning af det föregående visas nu lätt, att denna serie kan innehålla blott ett ändligt antal positiva potenser af x d. v. s. blott ett ändligt antal negativa potenser af $\frac{1}{x}$.

Emedan det således nu är ådagalagdt, att hvarje ställe x , som icke är ett *regulärt ställe* till f_v , nödvändigt är ett *oväsendtligt singulärt ställe*, så är f_v på grund af en känd sats en *rational funktion* af x . På samma sätt bevisas, att de elementära symmetriska funktionerna af alla de öfriga gruppernas potensserier äro rationela funktioner. På grund af den på sid. 63 bevisade likheten

$$(7) \quad y^n + \frac{F_{n-1}}{F_n} y^{n-1} + \dots + \frac{F_0}{F_n} = (y - P_1)(y - P_2) \dots (y - P_n)$$

kan således venstra membrum af (7) sättas lika med en produkt af hela rationela funktioner af y , hvilkas koefficienter äro rationela funktioner af x . En omedelbar följd häraf är åter tydligen, att likheten

$$(8) \quad F_n y^n + F_{n-1} y^{n-1} + \dots + F_0 = 0$$

icke kan vara irreduktibel. Men detta strider emot antagandet. Om således likheten (8) är irreduktibel, så äro alla potensserier, som satisfiera densamma, element af en och samma analytiska funktion.

Antager man, att samma analytiska funktion, som är rot till den nyss betraktade likheten, också är rot till ¹⁾

$$\bar{F}_n y^n + \bar{F}_{n-1} y^{n-1} + \dots + \bar{F}_0 = 0,$$

så är tydligen $\frac{F_{n-v}}{F_n} = \frac{\bar{F}_{n-v}}{\bar{F}_n}$. Sedan man utan svårighet först visat, att F_n och $\bar{F}_n$ blott kunna skilja sig genom en konstant faktor, måste tydligen det samma vara fallet också med de båda likheterna på grund af den bestående relationen emellan koefficienterna.

2. Vi skola nu undersöka, huru en algebraisk funktion förhåller sig i omgifningen af dess singulära ställen, och sedan besvara den andra af de i slutet af § 1 uppställda frågorna. Förr än vi öfvergå till denna undersökning, är det skäl att påminna om den allmänna

¹⁾ Gradtalet måste naturligtvis vara detsamma.

satsen i slutet af sid. 44 samt derom, att emot ett singulärt ställe till en n -tydig algebraisk funktion i ingen händelse kan svara n skilda funktionselement.

Vidare framhålla vi följande sats. *Låt a vara en punkt inom området $0 < |x - x_0| < R$ och $P_1(x|a)$ ett godtyckligt funktionselement, som kan fortsättas längs hvarje linie inom detta område. Låt oss fortsätta P_1 i positiv riktning längs en cirkel, som har x_0 till medelpunkt och $|x_0 - a| = r$ till radie, och låt $P_2(x|a)$ vara det element som fås i punkten a . Låt oss förfara med P_2 på samma sätt som med P_1 , och låt $P_3(x|a)$ vara det element som fås i punkten a . Låt oss antaga att vi slutligen få ett element $P_n(x|a)$, sådant att vi i punkten a återfå elementet $P_1(x|a)$, om vi fortsätta P_n i positiv riktning längs cirkeln (r). Då kan man för hvarje punkt inom området $0 < |x - x_0| < R$ ur $P_1(x|a)$ härleda n skilda fortsättningar och icke flere än n , om man vid fortsättandet icke öfverskrider gränsen af området. — Det fall förtjenar särskildt att observeras, då $n = 1$. — Vi antyda blott hufvudpunkterna i beviset.*

1:o. Om man fortsätter P_1 i negativ riktning huru många gånger som helst längs cirkeln (r), så fås i punkten a inga andra fortsättningar än de, som erhöles då fortsättningen skedde i positiv riktning.

2:o. Mot hvarje punkt emellan ändpunkterna af den radie, som går genom punkten a , svara minst n element.

3:o. Mot hvarje punkt på cirkeln (r) svara också minst n element.

Ur 2:o och 3:o i förening framgår, att mot hvarje punkt inom området $0 < |x - x_0| < R$ svara minst n element. Här af följer lätt, att till alla punkter inom sagde område hör ett lika antal element.

4:o. Punkten a motsvaras icke af flere än n element, emedan man kan visa, att hvarje sådant element kan erhållas ur $P_1(x|a)$ genom att i positiv eller i negativ eller i båda riktningarne ett visst antal gånger genomkretsa cirkeln (r).

Låt oss fortsätta systemet $P_1, P_2, \dots, P_n$ längs cirkeln (r). Då vi återkomma till punkten a , så har hvarje föregående af dessa serier öfvergått i den närmast följande samt P_n uti P_1 . Vi ha således nu i punkten a systemet $P_2, P_3, \dots, P_n, P_1$, hvilket utgör en *cyklisk permutation* af det första systemet. Sedan man genomkretsat cirkeln (r) n gån-

ger återfår man i punkten a det första systemet. Potensserierna $P_1, P_2, \dots, P_n$ sägas bilda ett *cykliskt system* omkring punkten x_0 . Till hvarje annan punkt inom området $0 < |x - x_0| < R$ hör tydligen också ett cykliskt system af n element.

Låt nu x_0 vara ett singulärt ställe till en funktion, som är definierad såsom rot till en irreduktibel algebraisk likhet af graden n , och låt oss omgifva x_0 med en cirkel, (R) , inom hvilken funktionen icke har någon annan singulär punkt än x_0 . Äro $P_1(x|a), P_2(x|a), \dots, P_n(x|a)$ de n element, som motsvara en punkt a inom området $0 < |x - x_0| < R$, så är det naturligt, att dessa element måste bilda ett eller flere cykliska system omkring punkten x_0 .¹⁾ För att erhålla det system, hvar till t. ex. P_1 hör, behöfver man blott ombilda P_1 längs en cirkel, som går genom punkten a och har x_0 till medelpunkt, samt efterse, hvilka de skilda element äro, som erhållas i punkten a . Sedan dessa blifvit fränskilda ifrån $P_1, P_2, \dots, P_n$, förfar man med ett af de återstående elementen på samma sätt som med P_1 , och erhåller sålunda ett nytt system, o. s. v.

Antalet af de cykliska system, i hvilka $P_1, P_2, \dots, P_n$ sönderfalla, är åtminstone lika med antalet af de skilda värden på y , som för $x = x_0$ satisfiera den algebraiska likheten. Emedan antalet af dessa system är oberoende af läget af punkten a inom området $0 < |x - x_0| < R$, så får man antaga, att a ligger godtyckligt nära punkten x_0 . Äro $b_1, b_2, \dots, b_s$, $s \leq n$, de nämnda värdena på y , och $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_s$ deras resp. ordningstal, samt δ ett så litet positivt tal, att samma y icke kan uppfylla tvänne af villkoren $|y - b_1| < \delta, |y - b_2| < \delta, \dots, |y - b_s| < \delta$, så kan man dock finna ett sådant positivt tal ρ , att hvarje x inom området $0 < |x - x_0| < \rho$ motsvaras af n skilda värden på y , hvilka satisfiera den algebraiska likheten, och hvilka dela sig i s grupper, (μ_v) , af hvilka (μ_v) består af v värden, som uppfylla villkoret $|y - b_v| < \delta$. Härur följer nu lätt satsens rigtighet, om man anser, att a faller inom området $0 < |x - x_0| < \rho$.

I stöd af den nyss åberopade satsen från § 4 inses rigtigheten af följande sats. *Om argumentet x af en algebraisk funktion obegränsadt när-*

¹⁾ Det kan hända att till ett sådant system hör blott ett enda element.

mar sig gränsstället x_0 , så närma sig funktionsvärdena ett gränsvärde, som är fullt bestämdt, så snart x kommit inom området $0 < |x - x_0| < R$, för att icke mera utträda derur.¹⁾

Vi ha visat, att en punkt i det ändliga är ett *regulärt* eller *singulärt* ställe till en algebraisk funktion, allt efter som mot denna punkt svara eller icke svara n skilda funktionselement. I öfverensstämmelse härmed anses punkten $x = \infty$ vara ett regulärt eller singulärt ställe, allt efter som det finnes eller icke finnes n skilda potensserier, som fortskrida efter hela och positiva potenser af $\frac{1}{x}$, och hvilka inom sina resp. konvergensområden öfverensstämma med funktionen.

Diskussionen af en algebraisk funktion i omgifningen af dess singulära ställen är nu slutförd, om man till det, som i denna § blifvit framställt, lägger följande i föregående § bevisade sats. Betyder $\varphi(x)$ den algebraiska funktionen och x_0 en singulär punkt till densamma, så kan man alltid finna ett sådant positivt helt tal, μ , att den öfre gränsen till absoluta beloppen af alla de värden, som $(x - x_0)^\mu \varphi(x)$ kan erhålla, är ändlig, om x inskränkes till en tillräckligt liten omgivning af x_0 , och detta gäller också om $x_0 = \infty$, i hvilket fall $x - x_0 = \frac{1}{x}$. Denna sista egenskap är af vikt, ty det är den som skiljer roten till en algebraisk likhet med rationela koefficienter ifrån roten till en algebraisk likhet, hvars koefficienter äro funktioner af rationel karakter.

3. Man kan nu fråga, äro de egenskaper, som vi hittills funnit hos de algebraiska funktionerna, sådana, att ur dessa egenskaper omvänt med nödvändighet följer, att hvarje analytisk funktion, som besitter desamma, måste satisfiera en algebraisk likhet med rationela koefficienter. Svaret innehålles i följande sats?

Antag att man om en analytisk funktion, $\varphi(x)$, vet, 1:o att densamma inom hvarje ändligt område har blott ett ändligt antal gränsställen, 2:o att

¹⁾ Detta gäller också i den händelse att $x_0 = \infty$, om $x - x_0 = \frac{1}{x}$ och R betyder det reciproka värdet af radien i en cirkel, hvars medelpunkt är origo, och hvilken omsluter alla singulära ställen i det ändliga.

mot hvarje ställe, som icke är ett gränsställe, svara n skilda element af funktionen ¹⁾, 3:o) att mot hvarje gränsställe, x_0 , inklusive $x_0 = \infty$, svarar ett sådant positivt helt tal, μ , att den öfre gränsen till absoluta beloppen af de värden, som $(x - x_0)^\mu \varphi(x)$ kan erhålla, är ett ändligt tal, om x inskränkes till en tillräckligt liten omgifning af x_0 . Det kan då bevisas, att $\varphi(x)$ måste vara rot till en algebraisk likhet af graden n med rationela koefficienter.

Vi behöfva blott antyda beviset. Äro $P_1(x|a)$, $P_2(x|a)$, $P_n(x|a)$ n element af $\varphi(x)$, så satisfierar φ likheten

$$(y - P_1)(y - P_2) \dots (y - P_n) = y^n - f_1 y^{n-1} + \dots + (-1)^n f_n = 0,$$

der $f_1, \dots, f_n$ äro de elementära symmetriska funktionerna af $P_1, \dots, P_n$, åtminstone om x faller inom det gemensamma konvergensområdet för dessa element. Här af följer, att φ måste satisfiera likheten för alla värden, för hvilka $f_1, \dots, f_n$ äro definierade. Dessa äro öfver hela planet definierade entydiga funktioner, som icke ha något väsendtligt singulärt ställe, och hvilka således äro rationela funktioner.

Man inser lätt rigtigheten af följande sats. Äro $P_1(x|a)$, $P_2(x|a)$, $P_n(x|a)$ element af en och samma eller af flere skilda algebraiska funktioner, så är hvarje hel rationel funktion af dessa element sjelf ett element af en algebraisk funktion.

4. Då argumentet, x , af en algebraisk funktion närmar sig ett gränsställe, x_0 , så närma sig funktionsvärdana, y , alltid ett gränsvärde y_0 . Vi kunna nu lätt finna, att en algebraisk funktion har blott sådana gränsvärden, som böra till funktionen adjungeras. För att det emot gränstället x_0 svarande gränsvärdet y_0 skall kunna adjungeras, bör det finnas en eller flera positiva potenser af $x - x_0$ och $y - y_0$ fortskridande potensserie, $G(x - x_0, y - y_0)$, sådan att

$$G(x - x_0, y - y_0) = 0$$

för de värdepar x, y , som i omgifningen af x_0 erhållas ur funktionen. En sådan likhet fås tydligen här alltid, om man utvecklar venstra medlemmen af den likhet, hvartill den algebraiska funktionen är rot,

¹⁾ Denna egenskap tillkommer alla dessa ställen, om den tillkommer ett enda ibland dem.

efter potenser af $x-x_0$ och $y-y_0$. Äfven om båda eller det ena af värdena x_0, y_0 är $=\infty$, så bör dock y_0 adjungeras. Ty om t. ex. $x_0 = \infty$, så får man, genom att först utveckla den algebraiska likheten efter potenser af $y-y_0$ och sedan dividera alla koefficienter med högsta potensen af x , en likhet

$$G\left(\frac{1}{x}, y-y_0\right) = 0,$$

som eger rum för de betraktade värdena x, y .

Låt oss betrakta den *analytiska bild*, som definieras genom en algebraisk funktion. Måne denna bild, sammanfaller med den bild, som utgör sammanfattningen af alla de värdepar x, y , hvilka satisfiera den irreduktibla likhet, hvartill funktionen är rot? Man inser utan svårighet, att detta verkligen är fallet, emedan också alla gränsvärden adjungeras till funktionen. Skulle man icke adjungera dessa gränsvärden, så skulle de båda bilderna icke sammanfalla, utan den förra skulle innehållas i den senare. Uti den nu antydda omständigheten har man att se ett motiv till uppställandet af den i inledningen anförda definitionen på ett gränsvärde, som bör adjungeras till en analytisk funktion. Man inser dock icke häraf nödvändigheten af att adjungera *endast* de gränsvärden, som uppfylla de i definitionen anförda villkoren.

5. Det återstår ännu att härleda en vigtig formel, hvilken, om en viss konstant i densamma fixeras på ett passande sätt, kan representera hvilken som helst af elementerna i ett cykliskt system.

Antag, att $P_1(x|a), P_2(x|a), \dots, P_n(x|a)$ bilda ett cykliskt system af n element omkring punkten x_0 . Låt R vara en sådan positiv kvantitet, att x_0 är den enda singulära punkt, som tillhör området $|x-x_0| < R$. Låt vidare z_1 vara ett värde, som satisfierar likheten $a-x_0 = (z-x_0)^n$.

Vi uppställa nu likheten

$$(1) \quad x-x_0 = (z-x_0)^n.$$

Utvecklas här $x-a$ efter potenser af $z-z_1$ och införes denna utveckling uti $P_1(x|a)$, så kan derefter P_1 utvecklas efter potenser af $z-z_1$. Den potensserie, som sålunda fås, beteckna vi med $G_1(z|z_1)$. Då z uti

z -planet rör sig inom cirkeln $|z - x_0| < R$, så rör sig x uti x -planet inom cirkeln $|x - x_0| < R$. Man ådagalägger nu utan svårighet genom en enda betraktelse såväl att $G_1(z|z_1)$ kan fortsättas längs hvarje linie inom området $0 < |z - x_0| < R$ som att man kan erhålla den fortsättning af $G_1(z|z_1)$, som på en viss väg, L , erhålles i punkten $z = z'$, också så, att man först för punkten $x = x' = x_0 + (z' - x_0)^n$ ur $P_1(x|a)$ härleder en ombildning längs den linie, som x beskriver under det z beskriver linien L , och sedan med tillhjälp af likheten (1) utvecklar den erhållna ombildningen efter potenser af $z - z'$.

Om vi kunna visa, att vi efter att ha ombildat $G_1(z|z_1)$ ett hvarf längs en cirkel, som går genom punkten $z = z_1$ och har x_0 till medelpunkt, i punkten z_1 återfå $G_1(z|z_1)$, så är på grund af en sats i § 2 derigenom ådagalagdt, att mot ingen punkt inom $0 < |z - x_0| < R$ svarar mer än en fortsättning af $G_1(z|z_1)$, och att man således i stöd af af den Laurentska satsen har

$$(2) \quad G_1(z|z_1) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} (z - x_0)^{\lambda},$$

der tydligen blott ett ändligt antal negativa potenser kunna förekomma. ¹⁾

Emedan x rör sig n hvarf längs den cirkel, som går genom a och har x_0 till medelpunkt, under det z rör sig ett hvarf längs den cirkel, som går genom z_1 och har x_0 till medelpunkt, och emedan $P_1, P_2, \dots, P_n$ utgöra ett cykliskt system, så är det tydligen fallet att man återfår $G_1(z|z_1)$. Vi ha således likheten (2).

Det finnes icke mera än en enda potensserie, $G(x|a)$, som fortskrider efter hela och positiva potenser af $x - a$, och hvars konstanta term är $z_1 - z_0$, och hvilken insatt för $z - x_0$ uti likheten (1) satisfierar densamma. Uttrycker man med tillhjälp af denna serie, $z - z_1$ och $z - x_0$ uti (2) genom $x - a$, så fås, om man erinrar sig uppkomsten af serien $G_1(z|z_1)$,

$$P_1(x|a) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} [G(x|a)]^{\lambda}.$$

Emedan $G(x|a)$ satisfierar likheten $y^n = x - x_0$, så kan man såsom be-

¹⁾ C. f. sid. 69.

kant ibland de element af $\log(x - x_0)$, som motsvara punkten $x = a$, finna ett sådant att

$$G(x|a) = e^{\frac{1}{n} \log(x - x_0)}$$

Man kan nu bevisa, att det är tillåtet, att i likheten

$$P_1(x|a) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} \left[e^{\frac{1}{n} \log(x - x_0)} \right]^{\lambda}$$

ombilda systemet $P_1(x|a)$, $\log(x - x_0)$ längs en cirkel som går genom a och har x_0 till medelpunkt. Göres detta, så fås tydligen

$$P_2(x|a) = \sum_{\lambda} C_{\lambda} \left[e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n} \log(x - x_0)} \right]^{\lambda}$$

Går man en gång till längs samma cirkel, så fås ett uttryck för $P_3(x|a)$, o. s. v. Här af ses att alla element af ett cykliskt system kunna representeras genom

$$\sum_{\lambda} C_{\lambda} \left[e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot e^{\frac{1}{n} \log(x - x_0)} \right]^{\lambda} \text{ eller genom } \sum_{\lambda} C_{\lambda} (x - x_0)^{\frac{\lambda}{n}}, \lambda = 0, 1, \dots, n-1,$$

om $(x - x_0)^{\frac{1}{n}}$ får vara ett gemensamt tecken för de n serier, som satisfiera likheten $y^n = x - x_0$.

Emedan man, om b betyder en enkel rot till likheten $F(x, y) = 0$ och y den motsvarande serien, har likheten

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = 0,$$

så kan man med denna likhet till utgångspunkt bilda deriverade af alla ordningar till y , och vi ha således också här ett medel att framställa y . I det föregående har deremot ingen metod blifvit angifven, enligt hvilken man i det fall, att b har ett högre ordningstal än 1, kunde afgöra, om det finnes eller icke finnes en motsvarig serie, och enligt hvilken man i förra händelsen kunde framställa serien. Icke

heller har någon metod blifvit angifven, enligt hvilken man kunde finna de cykliska system, hvori elementen af den algebraiska funktionen dela sig i omgifningen af en singularär punk. Då en framställning af allt detta ännu skulle taga i anspråk två eller tre ark, så nödgas vi afstå ifrån densamma. En sträng framställning här af finnes i *Nouveau précis d'analyse infinitésimale* af Méray.

Den Laurentska satsen ligger till grund för alla undersökningar i kapitel II. Vi hade kunnat undvara densamma genom att såsom bekant förutsätta en sats om väsendtliga singularära ställen ur *Weierstrass'* afhandling *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen*. Denna sats skulle visserligen icke ha hjälpt oss då det sedan hade gällt att härleda den formel, hvarigenom alla element i ett cykliskt system framställas. Men det utrymme, som hade blifvit inbesparadt genom utelämnandet af beviset för den Laurentska satsen, hade nu kunnat användas till en framställning enligt Periseux och Méray af metoderna att bilda de cykliska systemen. Slutresultatet af en sådan framställning hade då varit den i frågavarande formeln. — Förf. har mycket tvekat vid valet emellan de båda nu betecknade vägarne.

Genom att grunda framställningen på den Laurentska satsen, som redan i och för sig är af intresse, ha vi icke behöft stöda oss på någon sats utom denna afhandling, hvars hufvuduppgift är både att framställa det väsendtliga i teorin för de algebraiska funktionerna och att gifva en användning af den Weierstrassiska funktionsteorin.

Rättelser.

- Sid. 19. 1:sta raden bör lyda: Af (4) framgår utan vidare, att *diskriminanten*
- „ 23. 2:dra raden nedifrån, står: flere, bör vara: två.
- „ 25. 6:te raden, står: sats blifvit bevisad, bör vara: satser blifvit bevisade.
- „ 55. Under de båda summationstecknen bör $(-1)^\lambda$ tilläggas.
- „ 58. 2:dra raden nedifrån, står: utvecklas, bör vara: utvecklas i en serie, som fortskrider.
- „ 59. 5:te raden, emellan orden af *likheten* ha bortfallit orden: den likhet, som erhöles ur
- „ „ 6:te raden bör sluta med: ty venstra membrum af den sist erhållna likheten kan tydligen utvecklas i en serie, som fortskrider efter hela och positiva potenser af h och k .
- „ „ 9:de och början af 10:de raden bör lyda: $\varepsilon \cdot \psi \cdot L$, om ε betyder öfre gränsen till de värden, som $|x_{v+1} - x_v|$ kan antaga för $|t_{v+1} - t_v| < \delta$, $v = 1, 2, \dots n$.
- „ „ 11:te raden, står: gränsen till, bör vara: gränsen δ till.
- „ 66. 3:dje raden nedifrån står: konstant, bör vara: konstant faktor.
- „ „ 11:te raden, emellan orden *De singulära* ha bortfallit orden: inom ändligt område belägna.
- „ 73. 3:dje raden nedifrån, emellan 4 och inses böra nödvändigt inskjutas orden: och den allmänna satsen på sidan 72.
- „ 75. Ifrån 9:de raden bör produkten $(y - P_1) \dots (y - P_n)$ och första likhetstecknet bortlemnas.
- „ „ Emellan andra och tredje stycket bör inskjutas såsom ett korollarium: *hvarje entydig algebraisk funktion är en rationel funktion.*
- „ 78. 12:te raden, står: $v-1$, bör vara $(v-1)$.
- „ „ 14:de raden bör sluta med: och fortskrida efter hela och positiva potenser af $x-\alpha$.
- Uti fig. på sid. 62 står α , s , δ , x_n , x'_n i stället för resp. α , δ , γ , x_m , x'_m .

JOENSUUN YLIOPISTON
KIRJASTO

160 0288831

