ÜBER BESCHRÄNKTE FUNKTIONEN DIE IN GEGEBENEN PUNKTEN VORGESCHRIEBENE WERTE ANNEHMEN

AKADEMISCHE ABHANDLUNG

VON

ROLF NEVANLINNA

Wird mit Genehmigung der Philosophischen Fakultät der Universität Helsingfors am 21. Mai 1919 um 10 Uhr vormittags im historisch-philologischen Auditorium zur öffentlichen Verteidigung vorgelegt.

JOENSUUN YLIOPISTON
KIRJASTO

HELSINGFORS 1919

Bk 2.

HELSINGFORS 1919
BUCHDRUCKEREI-A.-G. SANA

Meinem hochverehrten Lehrer Herrn Professor ERNST LINDELÖF spreche ich an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aus für die unermüdliche Anleitung und die wertvollen Ratschläge, mit denen er mir während der Ausarbeitung meiner Abhandlung beigestanden hat.

Der Verfasser.

Einleitung.

In der vorliegenden Abhandlung beschäftigen wir uns mit einer besonderen Klasse von Funktionen, die durch folgende Eigenschaften charakterisiert ist:

1:o Jede Funktion

$$z = f(x)$$

der Klasse ist eindeutig und regulär innerhalb eines einfach zusammenhängenden Gebietes G.

2:o Ist x ein innerer Punkt von G, so fällt der entsprechende Punkt $z = f(x)$ innerhalb oder auf den Rand eines ebenfalls einfach zusammenhängenden Bereiches H der z-Ebene.

Dadurch, dass das Variabilitetsgebiet der Funktion in dieser Weise beschränkt wird, werden auch die Werte der Funktion und ihrer Differentialquotienten in gegebenen Punkten innerhalb G gewissen Beschränkungen unterworfen; Ziel der folgenden Untersuchungen ist die Art dieser Beschränkungen zu ermitteln. Wir stellen uns nämlich folgendes Hauptproblem:

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit es eine Funktion $f(x)$ der betrachteten Klasse gibt, die in den innerhalb G gewählten Punkten

$$x_0, x_1, \cdots, x_n$$

die vorgeschriebenen Werte

$$z_0, z_1, \cdots, z_n$$

annimmt, und wie kann man eine solche Funktion bilden?

Man sieht unmittelbar ein, dass die Untersuchung auf den besonderen Fall zurückgeführt werden kann, wo G und H beide der Einheitskreis sind. Zu diesem Zweck wählen wir zwei

Funktionen $\xi = G(x)$ und $\zeta = H(z)$, welche die Gebiete G und H auf den Einheitskreis konform abbilden. Die Punkte $x_0, x_1, \cdots, x_n$ und $z_0, z_1, \cdots, z_n$ mögen bei dieser Abbildung in die Punkte $\xi_0 = G(x_0), \xi_1 = G(x_1), \cdots, \xi_n = G(x_n)$ und $\zeta_0 = H(z_0), \zeta_1 = H(z_1), \cdots, \zeta_n = H(z_n)$ übergehen. Ist $x = G_1(\xi)$ die inverse Funktion von $\xi = G(x)$, so wird $z = f[G_1(\xi)] = \bar{f}(\xi)$ eine innerhalb des Einheitskreises reguläre Funktion von ξ, die nur Werte von H annimmt und die Punkte $\xi_0, \cdots, \xi_n$ in $z_0, \cdots, z_n$ überführt. Hieraus folgt, dass die zusammengesetzte Funktion $\zeta = H[\bar{f}(\xi)] = \varphi(\xi)$ eine für $|\xi| < 1$ reguläre Funktion ist, deren absoluter Betrag für diese Werte ≤ 1 ist. Von einer solchen Funktion sagen wir nach Herrn SCHUR kurz, dass sie zur *Klasse E* gehört. Weiter nimmt $\varphi(\xi)$ in den Punkten $\xi_0, \cdots, \xi_n$ die Werte $\zeta_0, \cdots, \zeta_n$ an. Ist nun das Problem für die Klasse E gelöst, so erhält man die entsprechenden Resultate für die ursprüngliche Funktion $z = f(x)$, indem man mit Hilfe der Abbildungsfunktionen $G(x)$ und $H(z)$ zu den Gebieten G und H zurückgeht.

Das Hauptproblem wird im ersten Abschnitt für die Klasse E vollständig gelöst. Wir gelangen zu dem Resultat, dass die vorgeschriebenen $n+1$ Wertepaare $n+1$ verschiedenen Ungleichheiten genügen müssen. Diese analytischen Kriterien werden dann geometrisch gedeutet, wobei u. A. ein einfaches Resultat erhalten wird hinsichtlich des Variabilitetsgebiets eines Funktionenwertes, wenn die übrigen Werte als fest angenommen werden.

Denkt man sich die Anzahl der vorgeschriebenen Wertepaare wachsen, so entsteht die Frage, ob es auch zu einer unendlichen Folge gegebener Argumentwerte und entsprechender Funktionenwerte, die sämtlich die im ersten Kapitel aufgestellten Bedingungen erfüllen, immer eine Funktion der Klasse E gibt. Im zweiten Abschnitt wird gezeigt, dass dies immer der Fall ist und dass, wenn die Argumentwerte eine gewisse Bedingung erfüllen, die betreffende Funktion der Klasse E durch die vorgeschriebenen Wertepaare eindeutig bestimmt ist. Wir gehen dann zu dem Spezialfall über, wo unendlich viele Nullstellen vorgeschrieben sind, und

leiten eine allgemeine Darstellungsform für eine beschränkte Funktion ab, welche die vorgeschriebenen Nullstellen besitzt.

Der dritte Abschnitt enthält dann den allgemeinen Fall, wo in den gegebenen Punkten ausser den Werten der gesuchten Funktion die Werte ihrer Differentialquotienten bis zu einer gewissen, im jedem Punkte bestimmten Ordnung vorgeschrieben sind. Es wird gezeigt, dass die notwendigen und hinreichenden Bedingungen sich durch einen Grenzübergang aus den im ersten Abschnitt abgeleiteten Kriterien ergeben. Eingehender beschäftigt uns dann der von verschiedenen Matematikern früher behandelte besondere Fall, wo nur die Werte der Funktion und ihrer n ersten Differentialquotienten im Punkte $x = 0$, oder m. a. W. die $n + 1$ ersten Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung der Funktion in der Umgebung des Nullpunkts gegeben sind. Ausser den Kriterien für die Koeffizienten stellen wir einige Ungleichungen für den absoluten Betrag der betreffenden Funktion auf.

Vermittels einer konformen Abbildung gehen wir dann im vierten Abschnitt zu dem Fall über, wo H die Halbebene rechts von der imaginären Achse ist, und nehmen wieder die $n + 1$ ersten Koeffizienten der Taylorschen Entwicklung als gegeben an. Mit Hilfe der im vorigen Kapitel gefundenen Ungleichheiten werden einige Abschätzungen für den reellen und imaginären Teil der Funktion abgeleitet.

Im fünften Kapitel leiten wir aus den eben genannten Abschätzungen einige Ungleichheiten für den absoluten Betrag einer Funktion ab, die den Einheitskreis auf einen konvexen Bereich konform abbildet. Für den absoluten Betrag und das Argument der Derivierten ergibt sich ebenfalls eine untere und obere Schranke.

Im sechsten Abschnitt geben wir schliesslich eine kurze historische Übersicht über die Entwicklung der von uns in dieser Abhandlung behandelten Fragen.

I. Ableitung der Bedingungen für die vorgeschriebenen Wertepaare und Lösung des Hauptproblems.

1. Da wir im nachfolgenden wiederholt konforme Abbildungen des Einheitskreises auf sich selbst ausführen werden, wollen wir zunächst die Eigenschaften einer solchen Abbildung näher betrachten.

Die lineare Substitution

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}\, z}, \\[2ex] z = \dfrac{x + a}{1 + \bar{a}\, x}, \end{cases}$$

wo $|a| < 1$ ist und $\bar{a}$ die zu a konjugierte Zahl bezeichnet, bildet den Kreis $|z| \leq 1$ derart auf den Kreis $|x| \leq 1$ konform ab, dass dem Punkt $z = a$ der Punkt $x = 0$ entspricht und dass die entsprechenden Tangentenrichtungen in diesen Punkten parallell sind. Hieraus folgt ohne weiteres die Richtigkeit des ersten Teils folgender Bemerkung, die für unsere Untersuchung von Bedeutung ist:

Bemerkung: *Wenn* $|x| < 1$ *und* $|a| < 1$ *ist, so ist der absolute Betrag des Ausdrucks*

$$z = \frac{x + a}{1 + \bar{a}\, x}$$

immer kleiner als eins. Sobald aber entweder $|x| = 1$ *oder* $|a| = 1$ *ist, wird auch* $|z| = 1$.

Wenn $|x| = 1$ und also $\dfrac{1}{x} = \bar{x}$ ist, kann man z in der Form

$$z = \frac{1}{x} \cdot \frac{x + a}{\bar{x} + \bar{a}}$$

schreiben, woraus unmittelbar folgt, dass $|z| = 1$ ist. Für $|a| = 1$ schreiben wir wieder

$$z = \frac{1}{\bar{a}} \cdot \frac{x + a}{\frac{1}{\bar{a}} + x}.$$

Weil hier $\frac{1}{\bar{a}} = a$ ist, erhalten wir offenbar $|z| = 1$.

Der Kreis $|x| = r \leqq 1$ wird durch die Substitution (1) in einen Kreis C_r der Steinerschen Kreisenschaar, deren Grenzpunkte die Punkte $z = a$ und $z = \frac{1}{\bar{a}}$ sind, transformiert. Den Werten $|x| < r$ werden die Punkte der z-Ebene entsprechen, welche innerhalb C_r, den Werten $|x| > r$ dagegen diejenigen Punkte z, die ausserhalb dieses Kreises liegen. Aus dieser einfachen Tatsache kann man einige wichtige Ungleichheiten für $|z|$ ableiten.

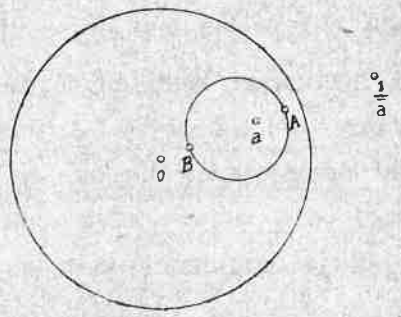

Fig. 1.

Man sieht leicht ein, dass diejenigen Punkte von C_r, deren Entfernungen von dem Nullpunkt am grössten und kleinsten sind, die beiden Punkte

$$(2) \qquad \begin{cases} z = e^{i \arg a} \dfrac{|a| + r}{1 + |a| r}, \\[2ex] z = e^{i \arg a} \dfrac{|a| - r}{1 - |a| r} \end{cases}$$

sind (die Punkte A und B in Fig. 1). Diese Werte nimmt z bzw. in den Punkten $x = e^{i \arg a} r$ und $x = -e^{i \arg a} r$ an. Aus den Ausdrücken der Punkte (2) sieht man ferner, dass sie beide auf

der Geraden, die den Punkt $z = a$ mit dem Nullpunkt verbindet, liegen. Ist $r \leqq |a|$, so sind beide auf dem Halbstrahl $\arg z = \arg a$ gelegen. In diesem Fall fällt also der Nullpunkt ausserhalb des Kreises C_r.

Aus dem obengesagten schliesst man sogleich, dass folgende Ungleichheiten für $|z|$ bestehen:

Für $|x| < r \leqq 1$ ist

$$|z| \leqq \frac{|a| + r}{1 + |a| r}, \tag{3}$$

und für $|x| < r \leqq |a|$

$$|z| \geqq \frac{|a| - r}{1 - |a| r}. \tag{4}$$

In der ersten Formel tritt das Gleichheitszeichen nur für $x = e^{i \arg a} r$, in der zweiten nur für $x = -e^{i \arg a} r$ ein. Aus der geometrischen Bedeutung der rechten Seiten dieser Ungleichheiten ergibt sich ferner, dass wenn r von 0 bis 1 wächst, die obere Grenze (3) auch beständig zunimmt (von $|a|$ bis 1), die untere Grenze (4) dagegen abnimmt (von $|a|$ bis 0, wenn r von 0 bis $|a|$ wächst). Die erstgenannte Grenze ist übrigens symmetrisch in bezug auf r und $|a|$, woraus folgt, dass sie bei festem r und wachsendem $|a|$ stetig zunimmt (von r bis 1, wenn $|a|$ von null bis eins wächst).

2. Nach diesen vorbereitenden Bemerkungen gehen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe über. Wir wählen also innerhalb des Einheitskreises $n + 1$ Punkte

$$x_0, x_1, \cdots, x_n \tag{5}$$

und ordnen diesen Augumentwerten die Funktionenwerte

$$z_0, z_1, \cdots, z_n \tag{6}$$

zu. Es sollen die notwendigen und hinreichenden Bedingungen aufgesucht werden, damit eine Funktion existiert, die zur Klasse E gehört und in den Punkten (5) die Werte (6) annimmt.

Nehmen wir also an, dass es eine Funktion mit den eben charakterisierten Eigenschaften gibt, und sei

$$z = z(x) \tag{7}$$

eine solche Funktion. Dann folgt zunächst für $x = x_0$, dass

$$|z(x_0)| = |z_0| \leq 1 \tag{8}$$

ist. Dieser Bedingung muss also z_0 notwendig genügen.

Nun kann die innerhalb des Einheitskreises reguläre Funktion (7) in dem inneren Punkt $x = x_0$ kein Maximum des absoluten Betrages besitzen, falls sie sich nicht auf eine Konstante reduziert. Ist $|z_0| = 1$, so muss also $z(x)$ identisch gleich z_0 sein. In diesem Falle sind somit auch die Werte $z_1, z_2, \cdots, z_n$ sämtlich gleich z_0. Also:

Ist

$$|z_0| = 1,$$

so ergibt sich als notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer Funktion mit den verlangten Eigenschaften, dass

$$z_0 = z_1 = \cdots = z_n \tag{9}$$

ist. Die Funktion ist in diesem Fall eindeutig bestimmt, sie reduziert sich nämlich auf die Konstante z_0.

Ist nun $|z_0|$ nicht gleich eins, so muss nach (8) notwendig

$$|z_0| < 1$$

sein. Durch die lineare Transformation

$$\zeta_0 = \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

bilden wir dann den Einheitskreis $|z| < 1$ konform auf sich selbst ab, so dass der Punkt $z = z_0$ in den Nullpunkt $\zeta_0 = 0$ übergeht. Setzt man hier für z die Funktion (7) ein, so folgt, dass die zusammengesetzte Funktion

$$\zeta_0(x) = \frac{z(x) - z_0}{1 - \bar{z}_0 z(x)}$$

zur Klasse E gehört und für $x = x_0$ verschwindet. Bildet man auch in der x-Ebene den Kreis $|x| \leq 1$ mittels der Substitution

$$\xi_0 = \frac{x - x_0}{1 - \bar{x}_0 x}$$

derart konform auf sich selbst ab, dass $\xi_0 = 0$ dem Punkt $x = x_0$ entspricht, so wird der Quotient

$$(10) \qquad z^{(1)}(x) = \zeta_0(x) : \xi_0 = \frac{z(x) - z_0}{1 - \bar{z}_0 z(x)} : \frac{x - x_0}{1 - \bar{x}_0 x}$$

eine innerhalb des Einheitskreises reguläre Funktion von x. Nun kann man, da $|\xi_0| = 1$ für $|x| = 1$, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet, die Zahl r so nahe eins wählen, dass

$$\frac{1}{|\xi_0|} < 1 + \varepsilon \text{ für } 1 > |x| \geqq r.$$

Weil ζ_0 dem absoluten Betrage nach kleiner als eins ist, so wird also

$$|z^{(1)}(x)| = \frac{|\zeta_0(x)|}{|\xi_0|} < 1 + \varepsilon$$

für die genannten Werte von x. Da $z^{(1)}(x)$ im ganzen Einheitskreis regulär ist, so besteht diese Abschätzung für alle $|x| < 1$, und weil dazu ε beliebig klein gewählt werden kann, so schliesst man, dass

$$|z^{(1)}(x)| \leqq 1$$

in jedem inneren Punkt des Einheitskreises ist. Die Funktion (10) gehört somit auch zu unserer Klasse E.

Die Werte dieser Funktion in den n letzten der Punkte (5) sind bekannt. Aus (10) erhält man nämlich

$$(11) \qquad z^{(1)}(x_\nu) = \frac{z_\nu - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_\nu} : \frac{x_\nu - x_0}{1 - \bar{x}_0 x_\nu} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Der Wert $z^{(1)}(x_\nu)$ wird also eindeutig durch die Wertepaare x_0, z_0 und x_ν, z_ν bestimmt, was wir mittels der Bezeichnung

$$(12) \qquad z^{(1)}(x_\nu) = z_\nu^{(1)}(x_0, z_0; x_\nu, z_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

ausdrücken.

Wir haben also gezeigt, dass aus der Existenz einer Funktion mit den anfangs charakterisierten Eigenschaften notwendig folgt, dass entweder $|z_0| = 1$ ist und die betreffende Funktion sich auf die Konstante z_0 reduziert, oder $|z_0| < 1$ ist, in welchem Falle es eine Funktion (10) der Klasse E gibt, die in den Punkten

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \tag{13}$$

die Werte (11) annimmt.

3. Wir werden nun beweisen, das diese letzteren Bedingungen auch hinreichend sind. Nehmen wir also an, dass sie erfüllt sind, dass also $|z_0| < 1$ ist und

$$z^{(1)}(x) \tag{14}$$

eine Funktion der Klasse E ist, die in den Punkten (13) die Werte (11) annimmt. Wir behaupten dann, dass die durch Auflösung der Formel (10) bestimmte Funktion

$$z(x) = \frac{\xi_0 z^{(1)}(x) + z_0}{1 + \bar{z}_0 \xi_0 z^{(1)}(x)} \tag{15}$$

die verlangten Eigenschaften besitzt.

In der Tat kann man leicht zeigen, dass sie zur Klasse E gehört. Die rechte Seite in der Beziehung (15) ist nämlich von derselben allgemeinen Form, wie der zweite der Ausdrücke (1). Weil nun $|\xi_0| < 1$, $|z^{(1)}(x)| \leq 1$ und somit

$$|\xi_0 z^{(1)}(x)| < 1$$

für $|x| < 1$ ist, so folgt, da nach Voraussetzung $|z_0| < 1$ ist, aus der S. 4 gemachten Bemerkung, dass auch $|z(x)| < 1$ innerhalb des Einheitskreises ist, d. h. die Funktion (15) gehört der Klasse E an.

Die Auflösung der Formel (11) ergibt

$$z_\nu = \frac{\xi_0(x_\nu) z_\nu^{(1)} + z_0}{1 + \bar{z}_0 \xi_0(x_\nu) z_\nu^{(1)}} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n). \tag{16}$$

Weil der Voraussetzung gemäss $z^{(1)}(x_\nu) = z_\nu^{(1)}$ ist, so folgt aus (15) mit Rücksicht auf (16)

$$z(x_\nu) = z_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n).$$

Im Punkte x_0 ist wieder $\xi_0 = 0$, und in diesem Punkt ist also, ganz unabhängig von der Wahl der Funktion (14),

$$z(x_0) = z_0.$$

Die Funktion (15) nimmt also in den Punkten (5) die vorgeschriebenen Werte (6) an und erfüllt somit die erforderlichen Bedingungen.

Fassen wir jetzt das oben bewiesene zusammen, so sind wir im ganzen zu folgendem Resultat gelangt:

Damit es eine Funktion der Klasse E gibt, die in den Punkten (5) die Werte (6) annimmt, ist es notwendig und hinreichend, dass entweder

$$|z_0| = 1 \text{ und } z_0 = z_1 = \cdots = z_n$$

ist, in welchem Fall die betreffende Funktion sich auf die Konstante z_0 reduziert, oder dass

$$|z_0| < 1$$

ist und es dazu eine Funktion der Klasse E gibt, die in den Punkten (13) die Werte (11) besitzt. In diesem Fall entspricht jeder Funktion $z^{(1)}(x)$ der zuletztgenannten Art eine vermöge der Beziehung (15) bestimmte Funktion $z(x)$ mit den verlangten Eigenschaften.

4. Durch diesen Satz ist unsere ursprüngliche Aufgabe auf die Untersuchung der notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Funktion der Klasse E, die in den Punkten (13) die Werte (11) annimmt, reduziert. Diese neue Aufgabe unterscheidet sich von der ursprünglichen nur in der Hinsicht, dass jetzt n Wertepaare statt $n+1$ vorgeschrieben sind, indem statt den Werten (5) und (6) die Werte (13) und (11) auftreten. Unser Resultat ermöglicht es uns also ein rekurrentes Verfahren einzuschlagen, das, wie wir sehen werden, bald zum Ziele führt.

Nach unserem Satz existiert nämlich eine Funktion $z^{(1)}(x)$ von den eben charakterisierten Eigenschaften dann und nur dann, wenn entweder

$$|z_1^{(1)}| = 1 \text{ und } z_1^{(1)} = z_2^{(1)} = \cdots = z_n^{(1)}$$

ist, oder

$$|z_1^{(1)}| < 1$$

ist und es dazu eine Funktion $z^{(2)}(x)$ gibt, die der Klasse E angehört und in den die $n-1$ letzten der Punkte (13)

(17) $$x_2, x_3, \cdots, x_n$$

die Werte

(18) $$z_2^{(2)}, z_3^{(2)}, \cdots, z_n^{(2)}$$

annimmt. Hier bestehen zwischen den Funktionen $z^{(1)}(x)$ und $z^{(2)}(x)$, bzw. den Werten (12) und (18), analoge Beziehungen, wie in den Formeln (10) und (15), bzw. (11) und (16) zwischen den Funktionen $z(x)$ und $z^{(1)}(x)$, bzw. den Werten (6) und (12). Führt man die Bezeichnung

$$z_1^{(1)}(x_0, z_0; x_1, z_1) = \varphi_1(x_0, z_0; x_1, z_1) = \varphi_1$$

ein, so erhält man also folgende Relationen:

(19) $$\begin{cases} z^{(2)}(x) = \dfrac{z^{(1)}(x) - \varphi_1}{1 - \overline{\varphi}_1 z^{(1)}(x)} : \dfrac{x - x_1}{1 - \overline{x}_1 x}, \\ z^{(1)}(x) = \dfrac{\xi_1 z^{(2)}(x) + \varphi_1}{1 + \overline{\varphi}_1 \xi_1 z^{(2)}(x)}, \qquad \left(\xi_1 = \dfrac{x - x_1}{1 - \overline{x}_1 x}\right). \end{cases}$$

(20) $$\begin{cases} z_\nu^{(2)} = \dfrac{z_\nu^{(1)} - \varphi_1}{1 - \varphi_1 z_\nu^{(1)}} : \dfrac{x_\nu - x_1}{1 - \overline{x}_1 x_\nu}, \\ z_\nu^{(1)} = \dfrac{\xi_1(x_\nu) z_\nu^{(2)} + \varphi_1}{1 + \overline{\varphi}_1 \xi_1(x_\nu) z_\nu^{(2)}}. \end{cases} \qquad (\nu = 2, 3, \cdots, n).$$

Der Wert $z_\nu^{(2)}$ ist nach (20) durch die Wertepaare x_0, z_0, x_1, z_1 und x_ν, z_ν bestimmt; dies geben wir mit der Bezeichnung

$$z_\nu^{(2)} = z_\nu^{(2)}(x_0, z_0; x_1, z_1; x_\nu, z_\nu)$$

an. Speziell schreiben wir

$$z_2^{(2)} = \varphi_2(x_0, z_0; x_1, z_1; x_2, z_2) = \varphi_2.$$

In dem erstgenannten speziellen Fall, wo $|\varphi_1| = 1$ ist, reduziert sich die Funktion $z^{(1)}(x)$ auf die Konstante φ_1. Aus der Formel (15) ergibt sich dann für unsere ursprüngliche Funktion (7) die Form

$$z(x) = \frac{\xi_0 \varphi_1 + z_0}{1 + \bar{z}_0 \xi_0 \varphi_1} = R_1(x). \tag{21}$$

Sie ist also eine rationale Funktion der ersten Ordnung. Weil $|\xi_0 \varphi_1| = |\xi_0| |\varphi_1| = 1$ auf der Peripherie $|x| = 1$ ist, so folgt aus der Bemerkung auf Seite 4, dass auch $|R_1(x)| = 1$ für $|x| = 1$ ist; die lineare Transformation (21) bildet also den Einheitskreis konform auf sich selbst ab.

5. Nun können wir das eingeschlagene rekurrente Verfahren, dessen zwei erste Schritte wir oben ausgeführt haben, in ganz derselben Weise weiter fortsetzen. Wir gelangen so zu den Funktionen

$$z^{(3)}(x), z^{(4)}(x), \cdots\cdots,$$

die mit Hilfe der Rekursionsformel

$$\left\{\begin{aligned} z^{(i)}(x) &= \frac{z^{(i-1)}(x) - \varphi_{i-1}}{1 - \bar{\varphi}_{i-1} z^{(i-1)}(x)} : \frac{x - x_{i-1}}{1 - \bar{x}_{i-1} x}, \\ z^{(i-1)}(x) &= \frac{\xi_{i-1} z^{(i)}(x) + \varphi_{i-1}}{1 + \bar{\varphi}_{i-1} \xi_{i-1} z^{(i)}(x)} \end{aligned}\right. \tag{22}$$

gebildet sind, wo $z^{(0)}(x) = z(x)$ und

$$\varphi_{i-1} = z^{(i-1)}(x_{i-1}), \quad \xi_{i-1} = \frac{x - x_{i-1}}{1 - \bar{x}_{i-1} x}.$$

Die Werte der Funktion $z^{(i)}(x)$ in den Punkten

$$x_i, x_{i+1}, \cdots, x_n \tag{23}$$

sind bekannt und durch die Beziehung

$$(24)\quad \begin{cases} z^{(i)}(x_\nu) = z_\nu^{(i)} = \dfrac{z_\nu^{(i-1)} - \varphi_{i-1}}{1 - \bar{\varphi}_{i-1} z_\nu^{(i-1)}} : \dfrac{x_\nu - x_{i-1}}{1 - \bar{x}_{i-1} x_\nu}, \\ z_\nu^{(i-1)} = \dfrac{\xi_{i-1}(x_\nu)\, z_\nu^{(i)} + \varphi_{i-1}}{1 + \bar{\varphi}_{i-1}\, \xi_{i-1}(x_\nu)\, z_\nu^{(i)}} \end{cases}$$

bestimmt. Durch successive Auflösung der ersten dieser Rekursionsformeln ergibt sich, dass $z_\nu^{(i)}$ nur von den Wertepaaren x_0, $z_0, x_1, z_1, \cdots, x_{i-i}, z_{i-1}$, und x_ν, z_ν abhängig ist. Wir schreiben demnach

$$(25)\quad \begin{cases} z_\nu^{(i)} = z_\nu^{(i)}(x_0, z_0; x_1, z_1; \cdots; x_{i-1}, z_{i-1}; x_\nu, z_\nu), \\ z_i^{(i)} = \varphi_i(x_0, z_0; x_1, z_1; \cdots; x_i, z_i) = \varphi_i. \end{cases}$$

Wenn nun die Ausdrücke

$$\varphi_0 = z_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_{i-1}$$

den absoluten Beträgen nach sämtlich kleiner als eins sind, so ist es notwendig und hinreichend für die Existenz einer Funktion der Klasse E, welche in den Punkten (5) die Werte (6) annimmt, dass entweder

$$(26)\qquad |\varphi_i| = 1 \text{ und } \varphi_i = z_{i+1}^{(i)} = \cdots = z_n^{(i)}$$

ist, oder

$$(27)\qquad |\varphi_i| < 1$$

ist und es eine Funktion $z^{(i+1)}(x)$ der Klasse E gibt, die in den Punkten

$$(28)\qquad x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_n$$

die durch die Formel (24), wo i durch $i+1$ ersetzt wird, bestimmten Werte

$$(29)\qquad z_{i+1}^{(i+1)} = \varphi_{i+1}, z_{i+2}^{(i+1)}, \cdots, z_n^{(i+1)}$$

hat.

Tritt der erstgenannte Fall ein, so ist identisch $z^{(i)}(x) \equiv \varphi_i$. $z^{(i-1)}(x)$ ist dann eine lineare Funktion von x, die den Einheitskreis konform auf sich selbst abbildet. Die weitere Auflösung der Rekursionsformel (22) ergibt, dass $z^{(i-2)}(x)$ eine rationale

Funktion zweiter Ordnung ist, die ihrem absoluten Betrage nach auf dem Einheitskreis konstant gleich eins ist. Indem man so fortsetzt findet man schliesslich, dass $z(x)$ eine wohlbestimmte rationale gebrochene Funktion $R_i(x)$ ist, deren Zähler und Nenner Polynome i:ten Grades sind und die auch die Eigenschaft

$$|R_i(x)| = 1$$

für $|x| = 1$ besitzt [1]).

Im zweiten Fall (27) gibt die Rekursionsformel (22) eine eindeutige Beziehung zwischen der Gesamtheit der Funktionen der Klasse E, die in den Punkten (5) die Werte (6) annehmen, und der Gesamtheit der zur Klasse E gehörigen Funktionen, die in den Punkten (28) die Werte (29) annehmen. Setzt man also in dieser Formel eine ganz beliebige Funktion $z^{(i+1)}(x)$ der letztgenannten Funktionenklasse ein, so erhält man durch successive Auflösung eine wohlbestimmte Funktion $z(x)$, die zur Klasse E gehört und die Werte (6) annimmt.

Sind nun besonders sämtliche Zahlen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ den absoluten Beträgen nach kleiner als eins, so bleibt nur die eine Bedingung übrig, dass die Funktion

$$z^{(n+1)}(x) = \frac{z^{(n)}(x) - \varphi_n}{1 - \bar{\varphi}_n z^{(n)}(x)} : \frac{x - x_n}{1 - \bar{x}_n x}$$

zur Klasse E gehören muss. Vermöge der Rekursionsformel (22), wo man i successiv die Werte $1, 2, \cdots, n+1$ zu geben hat, entspricht dann jeder Funktion $z(x)$ der Klasse E, die die Werte (6) annimmt, eine bestimmte Funktion $z^{(n+1)}(x)$ derselben Klasse, und umgekehrt jeder Funktion $z^{(n+1)}(x)$ der Klasse E eine wohlbestimmte Funktion von der zuerst genannten Eigenschaft. Wir haben also folgendes Resultat erhalten:

---

[1]) In Analogie mit dem von Herrn J. SCHUR in seiner Arbeit: *Über Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind* (J. f. Math. Bd. 147, S. 205 — 232, Bd. 148, S. 122 — 145) geführten Beweis, zeigt man, dass diese Polynome teilerfremd sind; $R_i(x)$ ist somit eine rationale Funktion i-ter Ordnung.

Satz I: *Eine Funktion der Klasse E, die in den Punkten (5) die Werte (6) annimmt, existiert dann und nur dann, wenn einer der folgenden zwei Fälle eintrifft:*

1:o. Es ist

$$(30)\quad \begin{cases} |\varphi_0| = |z_0| < 1, \\ |\varphi_1(x_0, z_0; x_1, z_1)| < 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ |\varphi_{i-1}(x_0, z_0; \cdots; x_{i-1}, z_{i-1})| < 1, \\ |\varphi_i(x_0, z_0; \cdots; x_i, z_i)| = 1, \end{cases}$$

wo i eine von den Zahlen $0, 1, \cdots, n$ ist, und weiter

$$(30)'\quad z_\nu^{(i)}(x_0, z_0; \cdots; x_{i-1}, z_{i-1}; x_\nu, z_\nu) = \varphi_i \ (\nu = i+1, i+2, \cdots, n).$$

In diesem Fall gibt es nur eine durch die vorgeschriebenen Wertepaare vollständig bestimmte Funktion $R_i(x)$ von den genannten Eigenschaften. Diese Funktion ist rational, von i:ter Ordnung, und ihrem absoluten Betrage nach gleich eins auf der Peripherie $|x| = 1$.

2:o. Sämtliche Zahlen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ erfüllen die Ungleichheiten

$$(31)\quad \begin{cases} |\varphi_0| < 1, \\ |\varphi_1(x_0, z_0; x_1, z_1)| < 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ |\varphi_n(x_0, z_0; \cdots; x_n, z_n| < 1. \end{cases}$$

Durch die Rekursionsformel (22) entspricht dann jeder Funktion $z^{(n+1)}(x)$ der Klasse E eine Funktion $z(x)$ von den anfangs genannten Eigenschaften, und umgekehrt.

Unser Resultat ermöglicht uns auch die Gesamtheit der zulässigen Werte (6), welche den gegebenen Punkten (5) entsprechen können, zu finden. Denn wenn man den Punkten (5) eine beliebige Folge von Parameterwerten

$$(32)\qquad \varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n,$$

die sämtlich den absoluten Beträgen nach kleiner als eins sind, zuordnet, so erhält man sofort mittels der Rekursionsformel (24) eine Folge (6) von Funktionenwerten, welche den Ungleichheiten (31) genügen. Wenn man wieder $|\varphi_0| < 1$, $|\varphi_1| < 1, \cdots, |\varphi_{i-1}| < 1$, $|\varphi_i| = 1$ wählt, wo $i \leqq n$ ist, so erhält man eine Folge von Werten (6), die die Bedingungen (30) und (30)′ erfüllen.

6. Um die Beziehungen zu erhalten, mit deren Hilfe $z^{(n)}(x)$ aus $z(x)$ (bzw. φ_n aus z_n), und umgekehrt, direkt berechnet werden können, wollen wir jetzt die Auflösung der Rekursionsformel (22) vornehmen. Aus der Relation (15) erhält man, wenn man den Wert von ξ_0 substituiert,

$$z(x) = \frac{(x - x_0)\, z^{(1)}(x) + \varphi_0 (1 - \bar{x}_0 x)}{1 - \bar{x}_0 x + \bar{\varphi}_0 (x - x_0)\, z^{(1)}(x)}.$$

Setzt man hier

$$x - x_0 = A_1(x), \quad \varphi_0 (1 - \bar{x}_0 x) = B_1(x),$$

so kann man

$$1 - \bar{x}_0 x = x\left(\frac{1}{x} - \bar{x}_0\right) = x\, \bar{A}_1\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\bar{\varphi}_0 (x - x_0) = x\, \bar{\varphi}_0 \left(1 - \frac{x_0}{x}\right) = x\, \bar{B}_1\left(\frac{1}{x}\right)$$

schreiben, wo also $\bar{A}_1$ und $\bar{B}_1$ aus A_1 und B_1 erhalten werden, wenn man die Koeffizienten durch die konjugierten Werte ersetzt. Man findet in dieser Weise

$$z(x) = \frac{A_1(x)\, z^{(1)}(x) + B_1(x)}{x\left[\bar{A}_1\left(\frac{1}{x}\right) + \bar{B}_1\left(\frac{1}{x}\right) z^{(1)}(x)\right]}.$$

Substituiert man in dieser Formel den Wert (19) für $z^{(1)}(x)$, so ergibt sich

$$z(x) = \frac{(x - x_1)\left[A_1(x) + \bar{\varphi}_1 B_1(x)\right] z^{(2)}(x) + (1 - \bar{x}_1 x)\left[\varphi_1 A_1(x) + B_1(x)\right]}{x^2\left\{\left(\frac{1}{x} - \bar{x}_1\right)\left[\bar{A}_1\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi_1 \bar{B}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right] + \left(1 - \frac{x_1}{x}\right)\left[\bar{\varphi}_1 \bar{A}_1\left(\frac{1}{x}\right) + \bar{B}_1\left(\frac{1}{x}\right)\right] z^{(2)}(x)\right\}}$$

$$= \frac{A_2(x)\, z^{(2)}(x) + B_2(x)}{x^2\left[\bar{A}_2\left(\frac{1}{x}\right) + \bar{B}_2\left(\frac{1}{x}\right) z^{(2)}(x)\right]}.$$

Indem man so fortsetzt, erhält man schliesslich

$$(33)\quad \left|\begin{aligned} z(x) &= \frac{A_\nu(x)\, z^{(\nu)}(x) + B_\nu(x)}{x^\nu\left[\bar{A}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) + \bar{B}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) z^{(\nu)}(x)\right]}, \\ z^{(\nu)}(x) &= \frac{x^\nu \bar{A}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) z(x) - B_\nu(x)}{A_\nu(x) - x^\nu \bar{B}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) z(x)}, \end{aligned}\right.$$

wo $A_\nu(x)$ und $B_\nu(x)$ Polynome ν-ten Grades in x sind, die den folgenden Rekursionsformeln genügen:

$$(34)\quad \left\{\begin{aligned} A_\nu(x) &= (x - x_{\nu-1})\left(A_{\nu-1}(x) + \bar{\varphi}_{\nu-1} B_{\nu-1}(x)\right), \\ B_\nu(x) &= (1 - \bar{x}_{\nu-1} x)\left(\varphi_{\nu-1} A_{1-\nu}(x) + B_{\nu-1}(x)\right), \end{aligned}\right. \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n),$$

wo $A_0(x) = 1$ und $B_0(x) = 0$ ist.

Zur Berechnung der Zahlen φ aus den gegebenen Werten (5) und (6), hat man also nach (33) die Formeln

$$(35)\quad \varphi_\nu = z^{(\nu)}(x_\nu) = \frac{x_\nu^\nu \bar{A}_\nu\left(\frac{1}{x_\nu}\right) z_\nu - B_\nu(x_\nu)}{A_\nu(x_\nu) - x_\nu^\nu \bar{B}_\nu\left(\frac{1}{x_\nu}\right) z_\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \cdots, n).$$

Da $z(x)$ in den Punkten $x_0, \cdots, x_{\nu-1}$ ganz unabhängig von der Wahl der Funktion $z^{(\nu)}(x)$ die Werte $z_0, \cdots, z_{\nu-1}$ annimmt, so erhält man aus (33), indem man $x = x_{\nu-1}$ und $z^{(\nu)}(x_{\nu-1}) = 0$ setzt,

$$(36) \qquad z_{\nu-1} = \frac{B_\nu(x_{\nu-1})}{x_{\nu-1}^{\nu}\,\bar{A}_\nu\left(\frac{1}{x_{\nu-1}}\right)} \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n+1),$$

durch welche Formel man die zu einer Parameterfolge (32) gehörigen Werte (6) berechnen kann.

Ist insbesondere $|\varphi_\nu| = 1$, so wird $z(x)$ die früher erwähnte rationale Funktion $R_\nu(x)$ der ν-ten Ordnung, für welche also die Formel (33) folgende Gestalt ergibt:

$$R_\nu(x) = \frac{\varphi_\nu A_\nu(x) + B_\nu(x)}{x^\nu\left[\bar{A}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi_\nu \bar{B}_\nu\left(\frac{1}{x}\right)\right]} = \frac{\varphi_\nu}{x^\nu} \cdot \frac{A_\nu(x) + \bar{\varphi}_\nu B_\nu(x)}{\bar{A}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi_\nu \bar{B}_\nu\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{\varphi_\nu}{x^\nu} \cdot \frac{P_\nu(x)}{\bar{P}_\nu\left(\frac{1}{x}\right)},$$

wo $P_\nu(x) = A_\nu(x) + \varphi_\nu B_\nu(x)$ ein Polynom ν-ten Grades von x ist. Für $|x| = 1$ ist $|R_\nu(x)| = 1$, was übrigens unmittelbar aus dem letzten Ausdruck von $R_\nu(x)$ hervorgeht.

7. Es seien nun die n ersten der Punkte (5) und die entsprechenden Funktionenwerte so gegeben, dass sie den n ersten Bedingungen (31) genügen. Es gibt dann unendlich viele Funktionen der Klasse E, die diese Werte annehmen. Notwendig und hinreichend, damit eine dieser Funktionen in einem weiteren $(n+1)$-sten Punkt x_n den Wert z_n annimmt, ist nach Satz I, dass das Wertpaar (x_n, z_n) der Ungleichung

$$(37) \qquad |\varphi_n(x_0, z_0; \cdots; x_n, z_n)| \leq 1$$

genügt. Wir stellen uns nun folgende Frage:

Denken wir uns den Punkt $x = x_n$ als fest, was besagt dann die Ungleichung (37) in bezug auf die Lage des Punktes $z = z_n$ der z-Ebene, und umgekehrt, welche Punkte $x = x_n$ können nach (37) einem gegebenen Funktionenwert z_n entsprechen?

Setzt man in der ersten der Formeln (33) $\nu = n$ und $x = x_n$, so ergibt sich, dass die Gesamtheit der möglichen Funktionenwerte z_n durch die Formel

$$z_n = \frac{A_n(x_n)\,\varphi_n + B_n(x_n)}{x_n^n\left[\bar{A}_n\left(\frac{1}{x_n}\right) + \bar{B}_n\left(\frac{1}{x_n}\right)\varphi_n\right]} \tag{38}$$

bestimmt wird, wo man den Parametern φ_n alle mögliche Werte

$$|\varphi_n| \leqq 1 \tag{39}$$

zu geben hat. Nun wissen wir einerseits, dass die diesen Parameterwerten entsprechenden Punkte $z = z_n$ als mögliche Werte einer der Klasse E angehörigen Funktion sicher sämtlich innerhalb des Einheitskreises $|z| \leqq 1$ fallen. Da anderseits der Ausdruck (38) eine lineare Funktion von φ_n ist, so schliessen wir, wenn wir die Parameterwerte φ_n als Punkte einer besonderen φ_n-Ebene zeichnen, dass der Kreis $|\varphi_n| \leqq 1$ dieser Ebene durch die Relation (38) in einen innerhalb des Einheitskreises $|z| = 1$ gelegenen Kreis C_n übergeführt wird. Beachtet man noch, dass wenn $|\varphi_n| = 1$ ist und z_n somit auf der Peripherie von C_n liegt, die betreffende Funktion $z(x)$ eine eindeutig bestimmte rationale Funktion $R_n(x)$ ist, dass es aber im Falle $|\varphi_n| < 1$, wo z_n ein innerer Punkt von C_n ist, unendlich viele Funktionen der Klasse E gibt, die in den Punkten (5) die Werte (6) annehmen, so kann man das gewonnene Resultat folgendermassen aussprechen:

Satz II: *Nimmt eine Funktion der Klasse E in den Punkten*

$$x_0, x_1, \cdots, x_{n-1} \tag{40}$$

die Werte

$$z_0, z_1, \cdots, z_{n-1} \tag{41}$$

an, so fällt der Wert z_n dieser Funktion in einem weiteren Punkt x_n innerhalb oder auf die Peripherie eines durch die gegebenen Werte $x_0, \cdots, x_n, z_0, \cdots, z_{n-1}$ vollständig bestimmten, innerhalb des Einheitskreises gelegenen Kreises.

Ist umgekehrt z_n ein Punkt im Innern dieses Kreises, so gibt es unendlich viele Funktionen der betrachteten Art, die für $x = x_n$

den Wert z_n annehmen, ist dagegen z_n ein Randpunkt, so gibt es nur eine wohlbestimmte Funktion mit dieser Eigenschaft. Diese ist eine rationale Funktion n-ter Ordnung.

8. Gehen wir jetzt zum zweiten Teil der S. 18 gestellten Frage über. Wir nehmen also an, dass z_n ein fester, beliebig innerhalb des Einheitskreises vorgeschriebener Funktionenwert ist, und wollen untersuchen, wo dann die entsprechenden Argumentwerte x_n liegen. Nach Satz I wird von diesen letztgenannten Punkten nichts weiteres verlangt, als dass sie innerhalb des Einheitskreises liegen und den Ausdruck

$$\varphi_n = \frac{x_n^n \overline{A}_n\left(\frac{1}{x_n}\right) z_n - B_n(x_n)}{A_n(x_n) - x_n^n \overline{B}_n\left(\frac{1}{x_n}\right) z_n} \tag{42}$$

dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ machen.

Um zu sehen, welche Schlüsse man hieraus in bezug auf x_n ziehen kann, wollen wir von dem einfachsten Fall ausgehen, wo $n = 1$ ist. Wir haben dann

$$\varphi_1 = \frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1} : \frac{x_1 - x_0}{1 - \bar{x}_0 x_1}, \tag{43}$$

wo auf der rechten Seite nur x_1 variabel angenommen wird. Die zulässigen Punkte x_1 sind nun diejenigen, welche $|\varphi_1| \leqq 1$ machen. Sie sind also durch die Beziehung

$$\left|\frac{x_1 - x_0}{1 - \bar{x}_0 x_1}\right| \geqq \left|\frac{z_1 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_1}\right|$$

bestimmt. Hier ist, da sowohl $|z_0|$ als $|z_1|$ kleiner als eins sind, auch die rechte Seite < 1 (vgl. die Bemerkung S. 4). Aus den im Anfang angestellten Betrachtungen über die lineare Transformation (1) ergibt sich demnach, dass das Gleichheitszeichen auf einem gewissen, innerhalb des Einheitskreises gelegenen Kreis C, das Ungleichheitszeichen in allen ausserhalb dieses Kreises liegenden

Punkten besteht. Die zulässigen Werte x_1 füllen also den ausserhalb C liegenden Teil des Einheitskreises aus. Liegt x_n insbesondere auf der Peripherie von C, so ist die entsprechende Funktion die eindeutig bestimmte lineare Funktion $R_1(x)$.

Betrachten wir nun den Fall $n = 2$. Der Punkt $x = x_2$ muss dann so liegen, dass die Funktion

$$\varphi_2 = \frac{z_2^{(1)} - \varphi_1}{1 - \bar{\varphi}_1 z_2^{(1)}} : \frac{x_2 - x_1}{1 - \bar{x}_1 x_2} \tag{44}$$

dem absoluten Betrage nach $\leqq 1$ wird. Hier ist

$$z_2^{(1)} = \frac{z_2 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_2} : \frac{x_2 - x_0}{1 - \bar{x}_0 x_2}. \tag{45}$$

Da weiter

$$\left| \frac{z_2 - z_0}{1 - \bar{z}_0 z_2} \right| < 1, \quad \left| \frac{x_2 - x_0}{1 - \bar{x}_0 x_2} \right| \geqq 1 \text{ für } |x_2| \geqq 1,$$

so folgt aus (45), dass $|z_2^{(1)}| < 1$ ist für die genannten Werte x_2. In ganz derselben Weise beweist man hieraus weiter mit Hilfe der Beziehung (44), die derselben Form wie (45) ist, dass auch $|\varphi_2| < 1$ für $|x_2| \geqq 1$ ist. Diejenigen Werte x_2, die $|\varphi_2| \geqq 1$ machen, liegen somit sämtlich innerhalb des Einheitskreises. Da nun φ_2 eine rationale gebrochene Funktion zweiten Grades in x_2 ist, so wird der Einheitskreis $|\varphi_2| = 1$ durch (44) auf eine Kurve der x_2-Ebene abgebildet, die nach dem obigem ganz innerhalb des Einheitskreises liegt und die, je nach dem, wie die Windungspunkte in der φ_2-Ebene in bezug auf den Einheitskreis $|\varphi_2| = 1$ liegen, aus einem oder aus zwei geschlossenen Zweigen besteht. Im erstgenannten Fall macht x_2 bei zweimaligem Umlauf von φ_2 längs der Peripherie $|\varphi_2| = 1$ einen vollen Umlauf um die ganze Kurve, in dem letzten entspricht ein vollständiger Umlauf von φ_2 einem vollen Umlauf der beiden Funktionenzweige x_2 um die geschlossenen Teilkurven. Die Kurve kann übrigens, weil φ_2 eine eindeutige Funktion von x_2 ist, sich selbst nicht schneiden. Sie teilt also die x_2-Ebene in zwei oder drei Teile und schneidet

somit aus dem Einheitskreis ein oder zwei Gebiete, innerhalb deren $|\varphi_2| > 1$ ist. Die zulässigen Punkte x_2 sind diejenigen Punkte des Einheitskreises, die ausserhalb dieser Gebiete liegen. Ist insbesondere x_2 ein Randpunkt, so ist die betreffende Funktion die wohlbestimmte rationale Funktion $R_2(x)$.

Geht man in der angegebener Weise weiter, so gelangt man zu folgendem allgemeinen Resultat:

Vermöge der Gleichung (42) entspricht dem Kreis $|\varphi_n| = 1$ eine Kurve der x_n-Ebene, die vollständig innerhalb des Einheitskreises liegt und höchstens n verschiedene geschlossene Zweige hat. Diese Zweige, die weder sich selbst noch einander schneiden, begrenzen höchstens n verchiedene Teilgebiete des Einheitskreises, innerhalb deren $|\varphi_n| > 1$. Der dem Funktionenwert z_n entsprechende Punkt x_n muss ausserhalb oder auf dem Rande dieser Gebiete liegen. Im ersten Fall gibt es unendlich viele Funktionen der Klasse E, welche in den Punkten (5) die Werte (6) annehmen, ist dagegen x_n ein Randpunkt, so ist die durch die gegebenen Werte vollständig bestimmte rationale Funktion $R_n(x)$ die einzige Funktion dieser Art.

Zuletzt wollen wir die Aufmerksamheit noch auf einen speziellen Fall lenken, indem wir annehmen dass $z_0 = z_1 = \cdots = z_{n-2} = 0$ ist, während der dem Punkt $x_{n-1} = 0$ entsprechende Funktionenwert z_{n-1}, den wir mit z' bezeichnen, von null verschieden ist. Schreibt man x_{n-1} statt x_n und setzt $z_n = 0$, so wird die Gleichung (42), wie man durch Einsetzen der gegebenen Werte (5) und (6) in dem Algorithmus (22) unmittelbar einsieht,

$$\varphi_n = (-1)^{n-1} \frac{z'}{x_0 x_1 \cdots x_{n-2}} \cdot \frac{1}{x_{n-1}}.$$

Die n-te Nullstelle x_{n-1} der Funktion muss demnach auf der Peripherie oder ausserhalb des Kreises

$$|x_{n-1}| \geqq \frac{|z'|}{|x_0| \cdot |x_1| \cdot \cdots \cdot |x_{n-2}|} \tag{46}$$

liegen. Man erhält also eine bekannte Abschätzung für die Null-

stellen einer beschränkten Funktion [1]). Besteht insbesondere in (46) das Gleichheitszeichen, so ist die betreffende Funktion eine rationale Funktion n-ter Ordnung, die leicht aus (22) zu bestimmen ist.

II. Über beschränkte Funktionen, die in unendlich vielen gegebenen Punkten vorgeschriebene Werte annehmen.

9. Im vorigen haben wir gefunden, dass sobald die Werte (5) und (6) den Bedingungen (31) gemäss gewählt sind, es immer Funktionen der Klasse E gibt, die in den Punkten (5) die Werte (6) annehmen. Da dieses Resultat für jedes n gilt, so entsteht die Frage, ob dasselbe noch für $n = \infty$ seine Gültigkeit behält. Mit dieser Frage wollen wir uns in dem vorliegenden Abschnitt beschäftigen; insbesondere werden wir untersuchen, wann die vorgeschriebenen Bedingungen die zugehörige Funktion eindeutig bestimmen.

Wir nehmen also innerhalb des Einheitskreises eine unendliche Folge von Punkten

$$x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots, \tag{47}$$

und wählen die entsprechenden Funktionenwerte

$$z_0, z_1, \cdots, z_n, \cdots \tag{48}$$

so, dass die Ungleichheiten

$$|\varphi_\nu(x_0, z_0; \cdots; x_\nu, z_\nu)| < 1 \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n, \cdots) \tag{49}$$

sämtlich erfüllt sind. Um eine solche Folge von Funktionenwerten zu erhalten, kann man so verfahren, dass man den Punkten (47) eine beliebige unendliche Folge von Parameterwerten

---

[1]) Diese Ungleichheit hat zuerst Herr JENSEN aus seinem bekannten Satze hergeleitet.

(50) $$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots$$

zuordnet, deren absolute Beträge sämtlich kleiner als eins sind, und dann die Werte (48) mit Hilfe der Formel (36) berechnet.

Nun gibt est, wie gesagt, für jedes n unendlich viele Funktionen der Klasse E, die in den $n+1$ ersten der Punkte (47) die entsprechenden Werte (48) annehmen. Um eine solche Funktion zu erhalten hat man ja nur aus den Formeln (34) die Polynome $A_{n+1}(x)$ und $B_{n+1}(x)$ zu berechnen und eine beliebige Funktion $z^{(n+1)}(x)$ der Klasse E zu wählen; die aus der Relation (33) bestimmte Funktion $z(x)$ wird dann die verlangten Eigenschaften besitzen.

Gehen wir von einer bestimmten Funktionenfolge $z^{(n+1)}(x)$ $(n = 0, 1 \cdots)$ aus, so gelangen wir in dieser Weise zu einer ganz bestimmten neuen Funktionenfolge

(51) $$f_0(x), f_1(x), \cdots, f_n(x), \cdots,$$

wo für jedes n die Funktion $f_n(x)$ der Klasse E angehört und in den Punkten $x_0, \cdots, x_n$ die Werte $z_0, \cdots, z_n$ annimmt. Wir wollen untersuchen, wann diese Folge gegen eine Grenzfunktion konvergiert.

Zu diesem Zweck betrachten wir die Differenz

(52) $$f_{n+p}(x) - f_n(x),$$

die in den $n+1$ ersten der Punkte (47) verschwindet, und anderseits das in denselben Punkten verschwindende Produkt

(53) $$\prod_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(x),$$

wo wir diesmal mit $\xi_\nu(x)$ diejenige lineare Funktion bezeichnen, welche für $x = 0$ einen reellen positiven Wert annimmt und den Einheitskreis derart konform auf sich selbst abbildet, dass x_ν in den Nullpunkt übergeht. Es ist

$$\xi_\nu(x) = \frac{1}{|x_\nu|} \frac{x - x_\nu}{x - x'_\nu},$$

wo x'_ν den Spiegelpunkt von x_ν in bezug auf den Einheitskreis bezeichnet.

Der Quotient

$$\xi_{n,p}(x) = \frac{f_{n+p}(x) - f_n(x)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(x)} \tag{54}$$

stellt für jedes n und p eine im Kreise $|x| < 1$ beschränkte reguläre Funktion dar. Weil nämlich $|f_n(x)|$ und $|f_{n+p}(x)|$ für $|x| < 1$ kleiner als eins sind und $\left|\prod\limits_{\nu=0}^{n} \xi_\nu\right| = 1$ für $|x| = 1$ ist, so kann man r so nahe eins wählen, dass für $1 > |x| \geq r$

$$|\zeta_{n,p}(x)| < 2(1+\varepsilon)$$

wird. Weil $\zeta_{p,n}(x)$ innerhalb des Einheitskreises regulär ist, so muss diese Abschätzung für alle $|x| < 1$ gelten, und da ε beliebig klein gewählt werden kann, so ist also im ganzen Einheitskreis für jedes n und p

$$|\zeta_{n,p}(x)| \leq 2$$

oder

$$\left|f_{n+p}(x) - f_n(x)\right| \leq 2 \left|\prod_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(x)\right| . \tag{55}$$

Wir sehen also, dass die Konvergenz der Funktionenfolge (51) wesentlich von dem Verhalten des unendlichen Produktes

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x) \tag{56}$$

abhängt. Verschwindet dieses Produkt identisch, d. h. konvergiert das Produkt (53) beim wachsenden n in jedem Kreis $|x| \leq r < 1$ gleichmässig gegen Null, so gilt dasselbe in bezug auf die Differenz $f_{n+p}(x) - f_n(x)$, und die Funktionenfolge (51) konvergiert also in diesem Falle gegen eine innerhalb des Einheitskreises reguläre Funktion $f(x)$, die zur Klasse E gehört und in den Punkten (47) die Werte (48) annimmt.

Um zu finden, wann das Produkt (56) identisch verschwindet, bedienen wir uns der Ungleichheit

$$|\xi_\nu(x)| < \frac{r + |x_\nu|}{1 + r|x_\nu|} < 1 ,$$

welche nach S. 6 für $|x| \leq r < 1$ besteht. Für das Produkt (53) erhalten wir hiernach die Abschätzung

$$\left| \prod_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(x) \right| \leq \prod_{\nu=0}^{n} \frac{r + |x_\nu|}{1 + r|x_\nu|}.$$

Nun konvergiert das rechtsstehende Produkt gegen null, wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - \frac{r + |x_\nu|}{1 + r|x_\nu|}\right) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left(1 - |x_\nu|\right) \cdot \frac{1 - r}{1 + r|x_\nu|}$$

divergiert. Da

$$(1 - |x_\nu|) \frac{1 - r}{1 + r|x_\nu|} > (1 - |x_\nu|) \frac{1 - r}{1 + r}$$

ist, so divergiert diese Reihe aber sicher, wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - |x_\nu|) \tag{57}$$

divergent ist. Die Divergenz dieser letzten Reihe ist also hinreichend, damit das Produkt (53) für $|x| = r \leq 1$ gleichmässig gegen Null konvergiert und die Funktionenfolge (51) also gegen eine Grenzfunktion $f(x)$, welche die verlangten Eigenschaften besitzt.

Ist nun $\varphi(x)$ eine andere Funktion, die im Einheitskreise beschränkt ist, also einer Ungleichheit der Form $|\varphi(x)| < M$ genügt, und die weiter in den Punkten (47) die Werte (48) annimmt, so gelangt man, ganz wie oben, zu der für jedes n gültigen Ungleichheit

$$|f(x) - \varphi(x)| < (1 + M) \left| \prod_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(x) \right|,$$

woraus man schliesst, dass $\varphi(x) - f(x)$ identisch verschwindet. Wir haben also folgendes Resultat erhalten:

Ist die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} (1 - |x_\nu|)$ divergent, so gibt es eine und nur eine der Klasse E angehörige Funktion, die in den Punkten (47)

die Werte (48) annimmt. Diese Funktion ist die einzige beschränkte Funktion, die überhaupt die letztgenannte Eigenschaft besitzt.

Hat eine beschränkte Funktion insbesondere in den Punkten (47) den Wert null, so muss sie also identisch verschwinden.

10. Wir gehen nun zu dem Fall über, wo die Reihe (57) konvergent ist. Um zu sehen, ob auch in diesem Fall Funktionen der verlangten Art existieren, bedienen wir uns einer bekannten wichtigen Folgerung des s. g. Vitalischen Satzes, nach welcher man aus einer unendlichen Folge von Funktionen, die innerhalb eines Gebietes G sämtlich regulär und beschränkt sind, immer eine Teilfolge wählen kann, die in jedem inneren Gebiet gleichmässig konvergiert. Nach diesem Satz können wir also aus (51) eine Teilfolge

$$f_{p_1}(x), f_{p_2}(x), \cdots, f_{p_n}(x), \cdots \tag{58}$$

herausgreifen, die für $|x| \leqq r < 1$ gleichmässig konvergiert und somit eine für $|x| < 1$ reguläre Grenzfunktion $f(x)$ besitzt. Diese gehört offenbar zur Klasse E und nimmt in den Punkten (47) die Werte (48) an.

Es ensteht nun die Frage, ob $f(x)$ die einzige Funktion der Klasse E ist, die diese Eigenschaften besitzt. Wir werden zeigen, dass dies nicht immer gilt, sondern dass es Fälle gibt, in welchen unendlich viele Funktionen der verlangten Art existieren.

Zu diesem Zweck betrachten wir wieder das Produkt (56), das wir in der Form

$$\prod_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x) = \prod_{\nu=0}^{\infty} [1 + (\xi_\nu(x) - 1)]$$

schreiben. Dieses Produkt konvergiert bekanntlich gleichmässig für $|x| \leqq r < 1$, wenn die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} |\xi_\nu(x) - 1| \tag{59}$$

für diese Werte gleichmässig konvergiert. Nun ist aber

$$|\xi_\nu(x) - 1| = (1 - |x_\nu|)\left|\frac{\varepsilon_\nu + x}{\varepsilon_\nu - |x_\nu|\, x}\right|,$$

wo $\varepsilon_\nu = e^{i \arg x_\nu}$. Ferner ist für $|x| \leq r < 1$

$$\left|\frac{\varepsilon_\nu + x}{\varepsilon_\nu - |x_\nu|\, x}\right| \leq \frac{1 + |x|}{1 - |x_\nu|\,|x|} < \frac{1 + |x|}{1 - |x|} \leq \frac{1 + r}{1 - r}.$$

Aus der Konvergenz der Reihe (57) folgt somit sofort die gleichmässige Konvergenz der Reihe (59). Das betrachtete unendliche Produkt stellt also jetzt eine innerhalb des Einheitskreises reguläre Funktion dar, die offenbar zur Klasse E gehört und in den Punkten (47) den Wert null annimmt, die aber nicht identisch verschwindet, da sie ja für $x = 0$ den von null verschiedenen Wert $\prod_{\nu=0}^{\infty} |x_\nu|$ annimmt.

Die Funktion (56) ist aber nicht die einzige, die diese Eigenschaften besitzt, denn jede Funktion

$$f(x) = \psi(x) \prod_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x), \tag{60}$$

wo $\psi(x)$ eine beliebige der Klasse E angehörige Funktion ist, genügt denselben Bedingungen. In dem Fall, wo die Werte (48) sämtlich gleich null sind, gibt es also unendlich viele Funktionen der verlangten Art.

Es frägt sich nun, ob man für die Funktionenwerte (48) oder die Parameterwerte (50) solche Bedingungen finden kann, dass sie, auch wenn die Reihe (57) konvergent ist, die zugehörige Funktion eindeutig bestimmen. Die Beantwortung dieser Frage scheint nicht leicht zu sein und müssen wir sie deshalb offen lassen. Jedenfalls können wir als Ergebnis der vorhergehenden Untersuchung folgenden Satz aussprechen:

Satz III: *Sind die Werten (47) und (48) den Bedingungen (49) gemäss gewählt, so gibt es wenigstens eine Funktion der Klasse E, die in den Punkten (47) die Werte (48) annimmt.*

Ist die Reihe (57) divergent, so existiert nur eine solche Funktion. Diese Funktion ist die einzige beschränkte Funktion, die überhaupt die genannten Eigenschaften besitzt.

Ist dagegen die Reihe (57) konvergent, so braucht die zugehörige Funktion nicht eindeutig bestimmt zu sein.

11. Wir sahen, dass jede Funktion der Form (60) zur Klasse E gehört und in den Punkten (47) den Wert null annimmt. Umgekehrt kann jede Funktion $f(x)$, welche diese Eigenschaften besitzt, in der Form (60) dargestellt werden. Denn die Folge

$$\frac{f(x)}{\prod\limits_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(x)} \qquad (n = 0, 1, 2 \cdots) \tag{61}$$

konvergiert im Einheitskreise gegen die Grenzfunktion

$$\frac{f(x)}{\prod\limits_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x)} = \psi(x),$$

die zur Klasse E gehören muss, weil dies für jede Funktion der Folge (61) gilt. Allgemeiner, wenn $f(x)$ irgend eine innerhalb des Einheitskreises reguläre Funktion bezeichnet, deren Modul daselbst $\leq M$ ist und die in den Punkten (47) verschwindet, so kann sie in der Form (60) dargestellt werden, wo jetzt $|\psi(x)| \leq M$ für $|x| < 1$ ist.

Aus der Gleichung (60) kann man schliessen, dass die obere Grenze des absoluten Betrages des Produktes (56) im Einheitskreise gleich eins ist. Denn wählt man die Funktion $f(x)$ in solcher Weise, dass die obere Grenze ihres absoluten Betrages gleich eins wird, so muss dies auch für die Faktoren $\psi(x)$ und $\prod\limits_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x)$ gelten, da sie beide zur Klasse E gehören.

Es kann aber noch mehr von der oberen Grenze des absoluten Betrages der Funktion (56) gesagt werden. Wir behaupten nämlich:

In einer beliebig kleinen Umgebung irgend eines Randpunktes des Einheitskreises ist die obere Grenze von $\left|\prod\limits_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x)\right|$ *gleich eins.*

Zum Beweise wählen wir einen beliebigen Punkt x auf der Peripherie des Einheitskreises und beschreiben mit diesem Punkt als Mittelpunkt und einem beliebig kleinen Radius δ einen Kreis S.

Es soll gezeigt werden, dass die obere Grenze des absoluten Betrages der Funktion (56) innerhalb der so entstandenen Umgebung von x gleich eins ist, d. h. dass es daselbst, für jedes $\varepsilon > 0$, wenigstens einen Punkt gibt, in welchem

$$\left| \prod_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x) \right| > 1 - \varepsilon \tag{62}$$

ist.

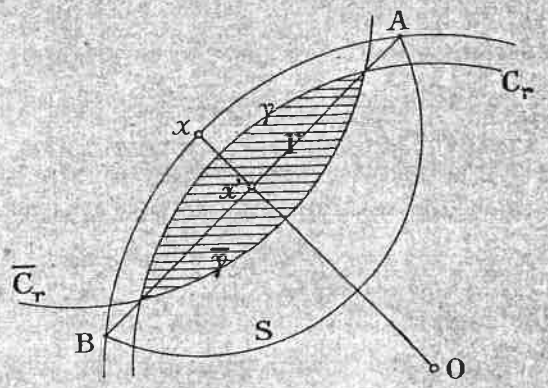

Fig. 2.

x' sei der Schnittpunkt der Sehne $A\,B$ und des Radius $0\,x$. Weil das Produkt (56) für $x = x'$ konvergiert, so wird es möglich sein, die Zahl n_0 so gross zu wählen, dass die Ungleichheit

$$\left| \prod_{\nu=n_0}^{\infty} \xi_\nu(x') \right| > 1 - \frac{\varepsilon}{4} \tag{63}$$

besteht. Weiter können wir r so gross nehmen, dass, sobald $1 > |x| \geq r$ ist,

$$\left| \prod_{\nu=0}^{n_0-1} \xi_\nu(x) \right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \tag{64}$$

wird. Gehört nun der Punkt x' dem Kreisring $r \leq |x| < 1$ an, so ist die Behauptung (62) offenbar in diesem Punkt erfüllt. Trifft der genannte Fall nicht ein, so behaupten wir, dass der von der Sehne $A\,B$ begrenzte Bogen γ des Kreises C_r, dessen Gleichung $|x| = r$ ist, wenigstens einen Punkt enthält, wo

$$\left| \prod_{\nu=n_0}^{\infty} \xi_\nu(x) \right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist.

Wir führen den Beweis indirekt und machen dabei Gebrauch von einem Verfahren, welches von E. Lindelöf zur Untersuchung der Ränderzuordnung bei konformer Abbildung benutzt worden ist [1]). Wir drehen die x-Ebene um den Winkel π um den Punkt $x = x'$. Wenn $\bar{x}$ die neue Lage des Punktes x bezeichnet, so wird diese Drehung analytisch durch die Gleichung $\bar{x} - x' = -(x - x')$ oder

$$\bar{x} = -x + 2x' \tag{65}$$

bestimmt. Der Kreis C_r geht in den in bezug auf $x = x'$ symmetrischen Kreis $\bar{C}_r$ über, dem Bogen γ entspricht der Bogen $\bar{\gamma}$ von $\bar{C}_r$. Bezeichnen wir kurz

$$\prod_{\nu = n_0}^{\infty} \xi_\nu(x) = \varphi(x),$$

so wird also die Funktion

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(\bar{x}) = \varphi(-x + 2x')$$

eine innerhalb des Kreises $\bar{C}_r$ reguläre Funktion von x sein, die dem absoluten Betrage nach kleiner als eins ist. Die beiden Kreisflächen C_r und $\bar{C}_r$ haben aber einen gemeinsamen Teil, nämlich das von γ und $\bar{\gamma}$ begrenzte, in der Figur schraffierte Gebiet Γ. Innerhalb und auf dem Rande dieses Gebietes sind die Funktionen $\varphi(x)$ und $\bar{\varphi}(x)$, und folglich auch ihr Produkt

$$\Phi(x) = \varphi(x)\,\varphi(x)$$

regulär.

Nehmen wir nun an, dass in jedem Punkt des Bogens γ

$$\left|\varphi(x)\right| \leqq 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

sei. Dann ist auf $\bar{\gamma}$

$$\left|\bar{\varphi}(x)\right| \leqq 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

[1]) Vgl: E. Lindelöf: *Sur un principe général de l'Analyse et ses applications à la theorie de la représentation conforme.* (Acta societatis scientiarum Fennicæ, t. XLVI N:o 4, 1915).

und weil ferner $|\varphi(x)| < 1$ auf $\bar{\gamma}$ und $|\bar{\varphi}(x)| < 1$ auf γ ist, so wird also in jedem Punkt der Begrenzung von Γ

$$\left|\Phi(x)\right| \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Diese Abschätzung muss wegen der Regularität von $\Phi(x)$ auch innerhalb Γ bestehen. Speziell erhalten wir für $x = x'$, weil nach (65) in diesem Punkt $\varphi(x') = \bar{\varphi}(x')$ ist,

$$|\Phi(x')| = |\varphi(x')|^2 \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Dieses Resultat widerspricht aber der Ungleichheit (63), nach welcher

$$\left|\varphi(x')\right|^2 > \left(1 - \frac{\varepsilon}{4}\right)^2 > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Wir schliessen hieraus, dass es auf dem Bogen γ wenigstens einen Punkt $x = x''$ gibt, wo

$$\left|\varphi(x'')\right| = \left|\prod_{\nu=n_0}^{\infty} \xi_\nu(x'')\right| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Beachtet man, dass die Ungleichheit (64) für alle Punkte von γ, also insbesondere für $x = x''$ gilt, so erhält man schliesslich

$$\left|\prod_{\nu=0}^{\infty} \xi_\nu(x'')\right| > \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 > 1 - \varepsilon,$$

womit unser Satz vollständig bewiesen ist.

III. Behandlung des Grenzfalls, wo einige unter den gegebenen Argumentwerten zusammenfallen.

12. Im vorhergehenden haben wir vorausgesetzt, dass die vorgeschriebenen Punkte (5) sämtlich verschieden sind. Wir wollen jetzt untersuchen, wie unsere frühere Resultate modifiziert werden, wenn gewisse der genannten Punkte zusammenfallen.

Fangen wir mit dem einfachsten Fall an, wo x_1 mit x_0 und also z_1 mit z_0 zusammenfällt, die übrigen Punkte (5) aber unter einander und von x_0 verschieden sind. Wenn nicht der Fall (30) schon für $i = 0$ eintritt, so ergibt unser Funktionenalgorithmus (22), wie vorher:

$$z^{(1)}(x) = \frac{z(x) - \varphi_0}{1 - \bar{\varphi}_0 z(x)} : \frac{x - x_0}{1 - \bar{x}_0 x}. \tag{66}$$

Hieraus folgt für $x = x_1 = x_0$ bei stetigem Grenzübergang

$$z^{(1)}(x_1) = z^{(1)}(x_0) = \frac{z'(x_0)}{1 - |\varphi_0|^2}(1 - |x_0|^2). \tag{67}$$

Dieser Ausdruck enthält also jetzt, ausser den Werten x_0, z_0, den ersten Differentialquotienten $z_0' = z'(x_0)$ der gegebenen Funktion im Punkte $x = x_0$ und hängt von diesem Differentialquotienten *linear* ab.

Als notwendige Bedingung, damit es eine Funktion $z(x)$ der Klasse E gibt, die in den Punkten $x_0, x_2, \cdots, x_n$ die Werte $z_0, z_2, \cdots, z_n$ annimmt und deren erster Differentialquotient dazu für $x = x_0$ einen vorgeschriebenen Wert z_0' hat, ergibt sich somit die Existenz einer Funktion $z^{(1)}(x)$, die zur Klasse E gehört und in den Punkten (13) die Werte (11) annimmt, wo man jetzt für $z^{(1)}(x_1)$ den Ausdruck

$$\varphi_1 = \frac{z_0'}{1 - |\varphi_0|^2}(1 - |x_0|^2) \tag{67'}$$

zu nehmen hat. Diese Bedingung ist aber auch hinreichend, denn wenn es eine solche Funktion $z^{(1)}(x)$ gibt, so besitzt die durch Auflösung der Formel (66) daraus gebildete Funktion $z(x)$ die erforderlichen Eigenschaften. Dass sie zur Klasse E gehört und in den Punkten $x_0, x_2, \cdots, x_n$ die Werte $z_0, z_2, \cdots, z_n$ annimmt, ergibt sich ganz wie früher S. 9. Da weiter der Wert der Funktion $z^{(1)}(x)$ für $x = x_0$ der Voraussetzung gemäss gleich dem Ausdruck (67)' ist, während derselbe anderseits in der Form (67) geschrieben werden kann, so sieht man, dass auch die Bedingung $z'(x_0) = z_0'$ erfüllt ist.

Von der Funktion $z^{(1)}(x)$ ausgehend gestaltet sich die Bildung des Funktionenalgorithmus ganz wie früher. Zu bemerken ist nur, dass wenn der Fall (30) schon für $i = 0$ eintritt und die Funktion $z(x)$ sich also auf die Konstante z_0 reduziert, der vorgeschriebene Wert z_0' die Bedingung $z_0' = 0$ erfüllen muss.

Wenn ausser x_1 auch x_2 mit x_0, und also z_2 mit z_0 zusammenfällt, so erhält man, falls $|\varphi_1| < 1$ ist, durch Entwickeln nach Potenzen von $x - x_0$ als Grenzwert der Funktion $z^{(2)}(x)$ für $x = x_2 = x_0$ den Ausdruck

$$(68) \qquad \frac{1-|x_0|^2}{(1-|\varphi_0|^2)(1-|\varphi_1|^2)}\left[\bar{z}_0 z'(x_0)^2 \frac{1-|x_0|^2}{1-|\varphi_0|^2} - \bar{x}_0 z'(x_0) + \frac{z''(x_0)}{2}(1-|x_0|^2)\right],$$

der von dem Wertpaar x_0, z_0 und den zwei ersten Differentialquotienten von $z(x)$ im Punkte $x = x_0$ abhängt. Als notwendige und hinreichende Bedingung, damit es eine Funktion der Klasse E gibt, welche in den Punkten $x_0, x_3, \cdots, x_n$ die Werte $z_0, z_3, \cdots, z_n$ annimmt und deren erster und zweiter Differentialquotient im Punkte $x = x_0$ die Werte z_0' bzw. z_0'' haben, ergibt sich, durch eine ähnliche Überlegung wie oben, die Existenz einer Funktion $z^{(2)}(x)$ der Klasse E, welche in den Punkten $x_2 (= x_0), x_3, \cdots, x_n$ die Werte (18) annimmt, wo jetzt φ_1 durch den Ausdruck (67)' und φ_2 durch den Ausdruck

$$(68)' \qquad \varphi_2 = \frac{1-|x_0|^2}{(1-|\varphi_0|^2)(1-|\varphi_1|^2)}\left[\bar{z}_0 z_0'^2 \frac{1-|x_0|^2}{1-|\varphi_0|^2} - \bar{x}_0 z_0' + \frac{z_0''}{2}(1-|x_0|^2)\right]$$

zu ersetzen ist.

Wenn der Fall (30) für $i = 1$ eintrifft, und die Funktion $z^{(1)}(x)$ also konstant ist, erhält man für den vorgeschriebenen Wert z_0'' die Bedingung $z^{(1)\prime}(x_0) = 0$.

Allgemein, wenn die $k_0 + 1$ $(k_0 \leq n)$ ersten der Punkte (5) mit x_0 und also die $k_0 + 1$ ersten der Werte (6) mit z_0 zusammenfallen, wird φ_ν $(\nu \leq k_0)$ durch das Wertpaar x_0, z_0 und die Werte der ν ersten Differentialquotienten der betrachteten Funktion für $x = x_0$ bestimmt. Aus der Form der Funktionen $z^{(\nu)}(x)$ ergibt sich weiter, dass φ_ν von dem ν:ten Differentialquotienten $z_0^{(\nu)}$ *linear* abhängt. Hieraus folgt, dass die Existenz einer Funktion $z^{(k_0)}(x)$ der Klasse E, die in den Punkten x_{k_0} $(= x_0)$, $x_{k_0+1}, \cdots, x_n$ die durch die Rekursionsformel (24) bestimmten Werte $z_{k_0}^{(k_0)} = \varphi_{k_0}, \cdots, z_n^{(k_0)}$ annimmt, notwendig und hinreichend ist, damit es eine Funktion $z(x)$ derselben Klasse gibt, welche in den Punkten $x_0, x_{k_0+1}, \cdots, x_n$ die Werte $z_0, z_{k_0+1}, \cdots, z_n$ hat, und deren k_0 ersten Differentialquotienten im Punkte $x = x_0$ die vorgeschriebenen Werte $z_0', z_0'', \cdots, z_0^{(k_0)}$ annehmen.

Da die Funktionen $z^{(k_0+1)}(x), \cdots, z^{(n+1)}(x)$ ganz wie im ersten Abschnitt gebildet werden, so ergibt sich schliesslich, dass die Ungleichheiten (30) und (31) in der neuen Form, welche sie durch den eben ausgeführten Grenzübergang annehmen, die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür liefern, dass es eine Funktion der eben charakterisierten Art gibt.

Wenn besonders der Fall (30) für $i < k_0$ eintrifft, so verschwinden, da $z^{(i)}(x)$ dann konstant ist, die Derivierten dieser Funktion identisch und also auch für $x = x_0$. Hieraus erhält man die Kriterien für die vorgeschriebenen Werte $z_0^{(i+1)}, \cdots, z_0^{(k_0)}$.

Wenn man weiter annimmt, dass die Punkte $x_{k_0+2}, \cdots, x_{k_0+k_1}$ sämtlich mit dem Punkt x_{k_0+1} zusammenfallen, so hat man die eben angestellten Betrachtungen zu wiederholen, indem man jetzt

von der Funktion $z^{(k_0+1)}(x)$ (statt $z(x)$) ausgeht. Der Parameter $\varphi_{k_0+\nu}$ $(\nu \leq k_1)$ wird, ausser von x_0 und den in diesem Punkte vorgeschriebenen Werten $z_0, z_0', \cdots, z_0^{(k_0)}$, von x_{k_0+1} und den $\nu - 1$ ersten Differentialquotienten der Funktion $z^{(k_0+1)}(x)$ in diesem Punkte abhängig. Diese letzteren werden aber durch die vorgeschriebenen Differentialquotientenwerte $z'_{k_0+1}, z''_{k_0+1}, \cdots, z^{(\nu-1)}_{k_0+1}$ im Punkte x_{k_0+1} eindeutig ausgedrückt Insbesondere hängt $\varphi_{k_0+\nu}$ von $z^{(\nu-1)}_{k_0+1}$ *linear* ab.

Wenn man in dieser Weise weiter geht, gelangt man zur Lösung des in der Einleitung genannten allgemeinen Problems, wo in den gegebenen Punkten ausser den Funktionenwerten die Werte der Differentialquotienten bis zu einer im jedem Punkte bestimmten Ordnung vorgeschrieben sind. Die notwendigen und hinreichenden Kriterien werden, bei geeigneter Bezeichnung, fortwährend aus den Bedingungen (30) und (31) erhalten.

Wir bemerken noch, dass auch die übrigen im ersten Abschnitt gewonnenen Resultate, z. B. der Satz II, bestehen bleiben.

13. Nach diesen allgemeinen Betrachtungen wollen wir ausführlicher den besonderen Fall behandeln, wo die Werte der Funktion und der n ersten Differentialquotienten in dem Nullpunkt, oder m. a. W. die $n+1$ Anfangskoeffizienten der Taylor'schen Entwicklung der Funktion in der Umgebung dieses Punktes vorgeschrieben sind. Unser Problem lautet nun, wie folgt:

Welche sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die $n+1$ Koeffizienten

$$a_0, a_1, \cdots, a_n,$$

damit es eine Potenzreihe

$$z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

existiert, die eine zur Klasse E gehörige Funktion darstellt und deren $n+1$ ersten Koeffizienten die gegebenen Werte haben, und wie wird eine solche Funktion gebildet?

Die Lösung dieser Aufgabe wird aus den Formeln (30) und (31) erhalten, wenn man in diesen

$$x_0 = x_1 = \cdots = x_n = 0 \tag{69}$$

substituiert. Um die dort auftretenden Zahlen φ zu bestimmen, kehren wir zu den Formeln (22) zurück, die wegen (69) folgende Form annehmen:

$$\left\{\begin{aligned} z^{(i+1)}(x) &= \frac{z^{(i)}(x) - \varphi_i}{1 - \bar{\varphi}_i z^{(i)}(x)} \frac{1}{x}, \\ z^{(i)}(x) &= \frac{x z^{(i+1)}(x) + \varphi_i}{1 + \bar{\varphi}_i x z^{(i+1)}(x)}. \end{aligned}\right. \quad (i = 0, 1, \cdots, n), \tag{70}$$

Hier ist jetzt $\varphi_i = z^{(i)}(0)$. Ist in der Umgebung von $x = 0$

$$z^{(i)}(x) = a_0^{(i)} + a_1^{(i)} x + \cdots + a_\nu^{(i)} x^\nu + \cdots, \quad (a_0^{(i)} = \varphi_i),$$

so findet man aus der ersten der Formeln (70) durch Entwicklung nach Potenzen von x und Vergleichen der Koeffizienten, dass allgemein $a_\nu^{(i+1)}$ die Form

$$a_\nu^{(i+1)} = \frac{a_{\nu+1}^{(i)}}{1 - |a_0^{(i)}|^2} + \varphi(a_0^{(i)}, a_1^{(i)}, \cdots, a_\nu^{(i)}) \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n - i - 1) \tag{71}$$

hat, wo φ eine rationale Funktion ihrer Argumente ist. Für $\nu = 0$ erhält man insbesondere

$$\varphi_{i+1} = a_0^{(i+1)} = \frac{a_1^{(i)}}{1 - |\varphi_i|^2}. \tag{72}$$

Aus der Rekursionsformel (71) ergibt sich, wenn mann i successiv durch $i - 1$, $i - 2, \cdots, 0$ ersetzt, dass der Koeffizient

$$a_\nu^{(i)} = a_\nu^{(i)}(a_0, a_1, \cdots, a_{\nu+i}) \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n - i) \tag{73}$$

von den Zahlen $a_0, a_1, \cdots, a_{\nu+i-1}$ rational, von $a_{\nu+i}$ linear abhängt. Für $\nu = 0$ findet man insbesondere, dass der Ausdruck

$$\varphi_i = \varphi_i(a_0, a_1, \cdots, a_i)$$

nur von den Zahlen $a_0, a_1, \cdots, a_i$ abhängt. Hieraus schliesst man, dass umgekehrt der Koeffizient

$$a_i = \psi(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i) \quad (i = 0, 1, \cdots, n) \tag{74}$$

durch die Parameterwerte $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_i$ eindeutig bestimmt ist.

Zur Berechnung des Ausdrucks $\psi(\varphi_0, \cdots, \varphi_i)$ kann man leicht eine Rekursionsformel ableiten. Die letztere der Formeln (70) kann nämlich für $i = 0$ in der Form

$$z(x)\,(1 + \overline{\varphi}_0\, x\, z^{(1)}(x)) = x\, z^{(1)}(x) + \varphi_0$$

geschrieben werden. Entwickelt man die beiden Seiten nach Potenzen von x, so findet man durch Vergleichen der Koeffizienten

$$(75) \qquad a_i = (1 - |\varphi_0|^2)\, a_{i-1}^{(1)} - \overline{\varphi}_0 \sum_{\nu=1}^{i-1} a_\nu\, a_{i-\nu-1}^{(1)}.$$

Die Koeffizienten der Funktion $z^{(1)}(x)$ sind aber von $\varphi_1, \cdots, \varphi_{i+1}$ (79)
ganz in derselben Weise wie die Koeffizienten der Funktion $z(x)$ von $\varphi_0, \cdots, \varphi_i$ abhängig. Es ist also

$$a_{i-1}^{(1)} = \psi(\varphi_1, \cdots, \varphi_i),$$

und die Gleichung (75) ergibt somit folgende Rekursionsformel

$$(76) \qquad \psi(\varphi_0, \cdots, \varphi_i) = (1 - |\varphi_0|^2)\, \psi(\varphi_1, \cdots, \varphi_i) - \overline{\varphi}_0 \sum_{\nu=1}^{i-1} \psi(\varphi_0, \cdots, \varphi_\nu)\, \psi(\varphi_1, \cdots, \varphi_{i-\nu}).$$

Durch successive Auflösung findet man hieraus, da $\psi(\varphi_i) = \varphi_i$ ist:

$$(77) \quad a_i = \psi(\varphi_0, \cdots, \varphi_i) = \varphi_i \prod_{\nu=0}^{i-1} (1 - |\varphi_\nu|^2) + \psi'(\varphi_0, \cdots, \varphi_{i-1}),$$

wo also ψ' durchaus nicht von φ_i abhängt.

Zur direkten Berechnung der Funktion $z(x)$ aus $z^{(\nu+1)}(x)$ ergibt sich aus (70) die mit (33) analoge Beziehung

$$(78) \qquad \begin{cases} z(x) = \dfrac{x\, \mathfrak{C}_\nu(x)\, z^{(\nu+1)}(x) + \mathfrak{D}_\nu(x)}{x^\nu \left[\overline{\mathfrak{C}}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) + x\, \overline{\mathfrak{D}}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) z^{(\nu+1)}(x)\right]}, \\[2ex] z^{(\nu+1)}(x) = \dfrac{x^\nu\, \overline{\mathfrak{C}}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) z(x) - \mathfrak{D}_\nu(x)}{x\left[\mathfrak{C}_\nu(x) - x^\nu\, \overline{\mathfrak{D}}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) z(x)\right]}. \end{cases}$$

Hier bedeuten $\mathfrak{C}_\nu(x)$ und $\mathfrak{D}_\nu(x)$ Polynome vom Grade ν in x, die durch die Rekursionsformeln

$$\begin{cases} \mathfrak{C}_\nu(x) = x\,\mathfrak{C}_{\nu-1}(x) + \bar{\varphi}_\nu\,\mathfrak{D}_{\nu-1}(x) & (\nu = 1, \cdots, n), \\ \mathfrak{D}_\nu(x) = x\,\mathfrak{C}_{\nu-1}(x)\,\varphi_\nu + \mathfrak{D}_{\nu-1}(x) & (\mathfrak{C}_0 = 1,\ \mathfrak{D}_0 = \varphi_0) \end{cases}$$

bestimmt sind. Die Polynome $\overline{\mathfrak{C}}_\nu(x)$ und $\overline{\mathfrak{D}}_\nu(x)$ werden aus $\mathfrak{C}_\nu(x)$ und $\mathfrak{D}_\nu(x)$ derart gebildet, dass man in diesen die Koeffizienten mit den konjugierten Werten ersetzt. Ist insbesondere $|z^{(\nu+1)}(x)| \equiv 1$, so reduziert sich $z(x)$ auf die rationale Funktion $(\nu+1)$:ter Ordnung

$$(79) \qquad R_{\nu+1}(x) = \frac{z^{(\nu+1)}}{x^{\nu+1}} \cdot \frac{x\,\mathfrak{C}_\nu(x) + \mathfrak{D}_\nu(x)\,\bar{z}^{(\nu+1)}}{\frac{1}{x}\,\overline{\mathfrak{C}}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) + \overline{\mathfrak{D}}_\nu\left(\frac{1}{x}\right) z^{(\nu+1)}} = \frac{z^{\nu+1}}{x^{\nu+1}} \cdot \frac{\mathfrak{P}_{\nu+1}(x)}{\overline{\mathfrak{P}}_{\nu+1}\left(\frac{1}{x}\right)}.$$

Aus den obigen Überlegungen in Verbindung mit den Ungleichheiten (30) und (31) folgt nun folgender Satz, der die vollständige Lösung des auf S. 36 gestellten Problems enthält:

Satz IV: *Eine Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots,$$

deren $n+1$ ersten Koeffizienten

$$a_0, a_1, \cdots, a_n$$

gegebene Werte annehmen und die eine Funktion der Klasse E darstellt, existiert dann und nur dann, wenn einer der folgenden zwei Fälle eintrifft:

1:o. Es ist

$$(80) \qquad \begin{cases} |\varphi_0| = |a_0| < 1, \\ |\varphi_1(a_0, a_1)| < 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ |\varphi_{i-1}(a_0, \cdots, a_{i-1})| < 1, \\ |\varphi_i(a_0, \cdots, a_i)| = 1, \end{cases}$$

wo i eine von den Zahlen $0, 1, \cdots, n$ ist, und weiter (vgl. (73))

$$(80)' \qquad a_1^{(i)} = a_2^{(i)} = \cdots = a_{n-i}^{(i)} = 0.$$

In diesem Fall gibt es nur eine durch die vorgeschriebenen Koeffizienten vollständig bestimmte Funktion $R_i(x)$ von den genannten Eigenschaften. Diese Funktion ist rational, i:ter Ordnung, und ihrem absoluten Betrage nach gleich eins auf der Peripherie $|x| = 1$.

2:o. Sämtliche Zahlen $\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n$ erfüllen die Ungleichheiten

$$(81) \qquad \left| \begin{array}{l} |\varphi_0| < 1, \\ |\varphi_1(a_0, a_1)| < 1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots, \\ |\varphi_n(a_0, \cdots, a_n)| < 1. \end{array} \right.$$

Durch die Rekursionsformel (78) entspricht dann jeder Funktion $z^{(n+1)}(x)$ der Klasse E eine Potenzreihe von den anfangs genannten Eigenschaften, und umgekehrt.

14. Denken wir uns jetzt eine unendliche Folge von Koeffizienten

$$(82) \qquad a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

gegeben, welche den unendlich vielen Ungleichheiten

$$(83) \qquad |\varphi_n(a_0, \cdots, a_n)| < 1 \qquad (n = 0, 1, \cdots)$$

genügen, so folgt aus den Resultaten des zweiten Abschnitts sofort, dass die Reihe

$$z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

für $|x| < 1$ konvergiert und eine der Klasse E angehörige Funktion darstellt. In der Tat ist jetzt $\xi_\nu = x$ für jedes ν, und die Bedingung

$$\lim_{n=\infty} \left| \prod_{\nu=0}^{n} \xi_\nu(x) \right| = 0$$

ist somit für $|x| \leqq r < 1$ gleichmässig erfüllt, woraus die Richtigkeit der Behauptung unmittelbar hervorgeht. Es gilt somit der folgende

Satz V: *Notwendig und hinreichend, damit die Potenzreihe*

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

für $|x| < 1$ *konvergiert und eine Funktion der Klasse* E *darstellt, ist, dass die Koeffizienten dieser Reihe die Bedingungen (83) erfüllen.*

Um eine Potenzreihe dieser Art zu bilden, kann man so verfahren, dass man eine beliebige Folge von Parameterwerten

$$\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n, \cdots$$

wählt, die sämtlich den absoluten Beträgen nach kleiner als eins sind, und daraus die Ausdrücke $\psi(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)$ $(n = 0, 1, \cdots)$ berechnet. Nach Satz V ist dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \psi(\varphi_0, \cdots, \varphi_n)\, x^n$$

eine Potenzreihe von der verlangten Eigenschaft.

15. Wir wählen nun die n ersten Koeffizienten $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ gemäss den Bedingungen (81) und betrachten die Gesamtheit der Funktionen

$$(84) \qquad z(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n + \cdots,$$

die zur Klasse E gehören und deren Potenzreihenentwicklungen mit den vorgeschriebenen Koeffizienten anfangen. Wir können dann nach Satz II behaupten, dass die einem festen Punkt x entsprechenden Funktionenwerte innerhalb oder auf die Peripherie eines innerhalb des Einheitskreises gelegenen Kreises fallen, deren Grösse und Lage jetzt durch die vorgeschriebenen Koeffizienten und den Punkt x vollständig bestimmt ist.

Aus (81) erhalten wir weiter ein einfaches Resultat in bezug auf den $(n+1)$:ten Koeffizienten a_n. Nach der letzten dieser Ungleichheiten ergibt sich nämlich die Gesamtheit der zulässigen Werte dieses Koeffizienten, wenn in der Beziehung

$$a_n = \psi(\varphi_0, \varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

dem Parameter φ_n alle Werte, die dem absoluten Betrage nach < 1 sind, gegeben wird. Nach (77) ist aber

$$a_n = \varphi_n \prod_{\nu=0}^{n-1} (1 - |\varphi_\nu|^2) + \psi'(\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1}).$$

Wird also a_n durch einen Punkt einer besonderen Ebene dargestellt, so ergibt sich hieraus, dass a_n innerhalb oder auf die Peripherie eines (innerhalb des Einheitskreises gelegenen) Kreises C_n fällt, deren Mittelpunkt $\psi'(\varphi_0, \cdots, \varphi_{n-1})$ und Radius $\prod_{\nu=0}^{n-1} (1 - |\varphi_\nu|^2)$ ist. Liegt a_n im Innern dieses Kreises, so gibt es unendlich viele Funktionen der Klasse E, deren $(n+1)$:ter Koeffizient mit a_n übereinstimmt, ist dagegen a_n ein Randpunkt, so ist, weil dann $|\varphi_n| = 1$, die rationale Funktion $R_n(x)$ die einzige Funktion dieser Art.

Zur Erläuterung dieses allgemeinen Ergebnisses wollen wir sehen, wie sich die einfachsten Fälle gestalten. Ist $n = 1$, also nur der erste Koeffizient $a_0 = \varphi_0$ gegeben, so erhält man

$$a_1 = \varphi_1 (1 - |\varphi_0|^2).$$

Das Variabilitetsgebiet von a_1 ist somit der um den Nullpunkt mit dem Radius $1 - |\varphi_0|^2$ beschriebene Kreis C_1. Für $n = 2$ ergibt sich

$$a_2 = \varphi_2 (1 - |\varphi_0|^2)(1 - |\varphi_1|^2) - \bar{\varphi}_0 \varphi_1^2 (1 - |\varphi_0|^2),$$

wo $\varphi_0 = a_0$ und $\varphi_1 = \frac{a_1}{1 - |a_0|^2}$ ist. Der Mittelpunkt des Kreises C_2 ist also $-\bar{\varphi}_0 \varphi_1^2 (1 - |\varphi_0|^2)$ und der Radius derselben $(1 - |\varphi_0|^2)(1 - |\varphi_1|^2)$. Wenn $|\bar{\varphi}_0 \varphi_1^2| > 1 - |\varphi_1|^2$ oder also $(1 + |\varphi_0|)|\varphi_1|^2 > 1$ ist, liegt der Nullpunkt ausserhalb dieses Kreises. In diesem Fall kann man also für $|a_2|$ ausser einer oberen Grenze auch eine *untere* Grenze ableiten.

16. Mit Hilfe des Satzes II könnte man für den absoluten Betrag der Funktion (84) eine obere und, falls der in dem genannten Satze erwähnte Kreis den Nullpunkt nicht enthält, auch

eine untere Grenze erhalten. Im letzteren Fall würde man dazu Schranken für das Argument der Funktion finden. Im folgenden wollen wir jedoch einen anderen Weg einschlagen, der zu weniger komplizierten Abschätzungen führt, die allerdings im allgemeinen nicht die genausten sind.

Von der Funktion $z(x)$ ausgehend bilden wir mit Hilfe der Rekursionsformel (70) die n zur Klasse E gehörigen Funktionen

$$z^{(1)}(x),\ z^{(2)}(x),\ \cdots,\ z^{(n)}(x).$$

Die letztere der Beziehungen (70) ergibt für $i = n - 1$

$$z^{(n-1)}(x) = \frac{x\, z^{(n)}(x) + \varphi_{n-1}}{1 + \overline{\varphi}_{n-1}\, x\, z^{(n)}(x)}.$$

Hier ist sowohl $|\varphi_{n-1}| < 1$ als $|z^{(n)}(x)| < 1$ für $|x| < 1$. Da folglich auch $|x\, z^{(n)}(x)| < 1$ ist, so folgt nach (3), dass für $|x| \leq r < 1$

$$(85) \qquad |z^{(n-1)}(x)| \leq \frac{r\,|z^{(n)}(x)| + |\varphi_{n-1}|}{1 + r\,|z^{(n)}(x)|\,|\varphi_{n-1}|}$$

ist. Weil $r\,|z^{(n)}(x)| \leq r$ für $|x| \leq r$ ist, so findet man aus dieser Ungleichheit a fortiori

$$(86) \qquad |z^{(n-1)}(x)| \leq \frac{r + |\varphi_{n-1}|}{1 + r\,|\varphi_{n-1}|}.$$

Hier kann das Gleichheitszeichen offenbar nur dann bestehen, wenn $|z^{(n)}(x)| = 1$ ist. In diesem Fall ist aber $z(x)$ eine wohlbestimmte rationale Funktion $R_n(x)$ der n:ten Ordnung. Dass in der Tat dann für einen bestimmten Wert x Geichheit eintritt, geht aus der S. 6 gemachten Bemerkung hervor. Der betreffende Wert $x = re^{i\vartheta}$ ist durch die Gleichung

$$\arg(x\, z^{(n)}) = \vartheta + \arg z^{(n)} = \arg \varphi_{n-1}$$

bestimmt; das Argument des entsprechenden Wertes $z^{(n-1)}(re^{i\vartheta})$ ist $= \arg \varphi_{n-1}$.

Setzt man die Auflösung des Algorithmus (70) weiter fort, so erhält man für $z^{(n-2)}(x)$ die Abschätzung

$$(87) \qquad |z^{(n-2)}(x)| \leq \frac{r\,|z^{(n-1)}(x)| + |\varphi_{n-2}|}{1 + r\,|z^{(n-1)}(x)| \cdot |\varphi_{n-2}|}.$$

Ersetzt man hier $|z^{(n-1)}(x)|$ durch die obere Grenze (86) so gilt diese Ungleichheit a fortiori. Die so erhaltene obere Grenze für $|z^{(n-2)}(x)|$ kann nur, wenn das Gleichheitszeichen in (86) gilt, erreicht werden, also nur, wenn $z(x) = R_n(x)$ und $x = re^{i\vartheta}$. Dazu muss noch

$$\arg(x\, z^{(n-1)}(x)) = \arg \varphi_{n-2}$$

sein, oder also, nach dem oben gesagten

$$\vartheta + \arg \varphi_{n-1} = \arg \varphi_{n-2}.$$

Ist also $\arg \varphi_{n-1} = \arg z^{(n)} + \vartheta$, $\arg \varphi_{n-2} = \arg z^{(n)} + 2\vartheta$, so bestehen in (86) und (87) die Gleichheitszeichen für die Funktion $R_n(x)$ in dem Punkt $x = re^{i\vartheta}$.

Durch weitere Auflösung des Funktionenalgorithmus (70) erhält man in dieser Weise successiv obere Grenzen für $|z^{(n-2)}(x)|, \cdots, |z^{(1)}(x)|$ und schliesslich für $|z(x)|$. Man findet in dieser Weise (vgl. S. 38), dass diese letzte Grenze die folgende Form hat:

$$(88) \qquad |z(x)| \leqq \frac{r\, C_{n-1}(r) + D_{n-1}(r)}{r^{n-1}\left[C_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right) + r\, D_{n-1}\left(\frac{1}{r}\right)\right]} = \frac{P_n(r)}{r^n P_n\left(\frac{1}{r}\right)} = r_n,$$

wo $C_{n-1}(r)$ und $D_{n-1}(r)$ Polynome $(n-1)$:ten Grades in r sind, welche mit Hilfe der Rekursionsformeln

$$\begin{cases} C_\nu(r) = r\, C_{\nu-1}(r) + |\varphi_\nu|\, D_{\nu-1}(r), \\ D_\nu(r) = r\, C_{\nu-1}(r)\, |\varphi_\nu| + D_{\nu-1}(r) \end{cases}$$

gebildet sind. Die Grenze (88) kann nur für die rationale Funktion $R_n(x)$ erreicht werden und wird in der Tat für $x = re^{i\vartheta}$ erreicht, wenn die Parametern φ die Bedingungen

$$\arg \varphi_{n-\nu} = \arg z^{(n)} + \nu\vartheta \qquad (\nu = 1, 2, \cdots, n)$$

erfüllen.

Man erhält aus dem Algorithmus (70) ebenfalls eine untere Grenze für $|z(x)|$, wenn $|x|$ genügend klein ist. Aus der Gleichung

$$z(x) = \frac{x\, z^{(1)}(x) + a_0}{1 + \bar{a}_0\, x\, z^{(1)}(x)}$$

folgt nämlich nach (4) für $r\,|z^{(1)}(x)| \leqq |a_0|$

$$|z(x)| \geqq \frac{|a_0| - r\,|z^{(1)}(x)|}{1 - r\,|a_0|\;|z^{(1)}(x)|}. \tag{89}$$

Nun findet man für $|z^{(1)}(x)|$, ganz wie oben für $|z(x)|$, die Abschätzung

$$|z^{(1)}(x)| \leqq \frac{P_n^{(1)}(r)}{r^{n-1}\, P_n^{(1)}\left(\frac{1}{r}\right)} = r_n^{(1)}, \tag{90}$$

wo $P_n^{(1)}(r)$ ein Polynom $(n-1)$:ten Grades in r ist. Da in der Formel (85) die auf der rechten Seite stehende obere Grenze mit wachsendem r und $|z^{(n)}|$ für jedes n selbst zunimmt, so gilt dasselbe auch für $r_n^{(1)}$ und r_n. Für $r = 1$ ist aber $r_n^{(1)} = 1$. Es ist also $r r_n^{(1)}$ eine mit r wachsende Funktion, die für $r = 0$ verschwindet und für $r = 1$ gleich eins wird, woraus folgt, dass die Gleichung

$$r r_n^{(1)} = |a_0|$$

eine Wurzel $r = r_0$ zwischen 0 und 1 hat, die übrigens $> |a_0|$ ist weil für $r = |a_0|$ die linke Seite kleiner als $|a_0|$ ist.

Die Ungleichheit (89) besteht also sicher für $|x| \leqq r \leqq r_0$, da für diese Werte $r r_n^{(1)}$ und um so mehr $r\,|z^{(1)}(x)| \leqq |a_0|$ ist. Ersetzt man in dieser Formel $|z^{(1)}(x)|$ mit der oberen Grenze $r_n^{(1)}$, so findet man nach der S. 6 gemachten Bemerkung

$$|z(x)| \geqq \frac{|a_0| - r r_n^{(1)}}{1 - r r_n^{(1)}\,|a_0|} = \varrho_n \tag{91}$$

für $|x| \leqq r \leqq r_0$. Weil in (90) die Grenze $r_n^{(1)}$ nur für $z(x) = R_n(x)$ erreicht werden kann, kann auch in (91) nur in diesem Falle das Gleichheitszeichen eintreten.

Ist insbesondere $a_0 = 0$, so erhält man

$$\frac{z(x)}{x} = z^{(1)}(x) = a_1 + a_2 x + \cdots + a_{n-1} x^{n-2} + \cdots. \tag{92}$$

Für $z^{(2)}(x)$ gilt eine Ungleichheit der Form

$$(93) \qquad |z^{(2)}(x)| \leqq \frac{P_n^{(2)}(r)}{r^{n-2} P_n^{(2)}\left(\frac{1}{r}\right)} = r_n^{(2)},$$

wo $P_n^{(2)}(r)$ ein Polynom Grades $n-2$ ist. Man erhält also nach (91) für $|x| \leqq r \leqq r_1$ die Ungleichheit

$$|z^{(1)}(x)| \geqq \frac{|a_1| - r r_n^{(2)}}{1 - r r_n^{(2)} |a_1|},$$

wo r_1 ($\geqq |a_1|$) die zwischen null und eins gelegene Wurzel der Gleichung $r r_n^{(2)} = |a_1|$ bezeichnet. Auf dem Kreis $|x| = r \leqq r_1$ ist somit nach (92)

$$(94) \qquad |z(x)| \geqq r \frac{|a_1| - r r_n^{(2)}}{1 - r r_n^{(2)} |a_1|} = \varrho_n.$$

In (93) und also auch in (94) kann die Gleichheit nur für die rationale Funktion $R_n(x)$ bestehen.

Aus (94) ergibt sich insbesondere, wenn man $r_n^{(2)} = 1$ setzt, die für $|x| = r \leqq |a_1|$ giltige Ungleichheit

$$(95) \qquad |z(x)| \geqq r \frac{|a_1| - r}{1 - |a_1| r}.$$

In derselben Weise findet man aus (3) die Ungleichheit

$$(96) \qquad |z(x)| \leqq r \frac{|a_1| + r}{1 + |a_1| r},$$

die für $|x| \leqq r < 1$ besteht. Die Grenzen (95) und (96) werden nur von der rationalen Funktion zweiter Ordnung

$$x \frac{x e^{i\alpha} + a_1}{1 + \bar{a}_1 x e^{i\alpha}}$$

in dem Punkt $x = r e^{i(\arg a_1 + \alpha)}$ bzw. $x = r e^{i(\arg a_1 - \alpha)}$ erreicht.

IV. Funktionen mit positivem Realteil.

17. Nachdem wir eingehend den Fall untersucht haben, wo die beiden Bereiche G und H der Einheitskreis sind, können wir nun durch die in der Einleitung angegebenen konformen Abbildungen unsere Resultate und Sätze auf jeden besonderen Fall übertragen.

Wir betrachten zuerst den Fall, wo G wie vorher der Einheitskreis ist, H aber die rechts von der imaginären Achse liegende Halbebene. Die zu untersuchende Funktionenklasse besteht also aus allen innerhalb des Einheitskreises regulären Funktionen

$$\zeta = f(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots, \tag{97}$$

deren reelle Teile daselbst nichtnegativ sind und die in den Punkten (5) gewisse vorgeschriebene Werte

$$\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_n \tag{98}$$

annehmen.

Um die Bedingungen für diese Werte zu finden bilden wir die Halbebene $\Re(\zeta) \geqq 0$ konform auf den Einheitskreis $|z| \leqq 1$ ab, so dass der Punkt $\zeta = \zeta_0$ in den Nullpunkt der z-Ebene übergeht. Dies geschieht mittels der linearen Transformation

$$\left\{\begin{aligned} z &= \frac{\zeta - \zeta_0}{\zeta + \bar{\zeta}_0}, \\ \zeta &= \frac{\zeta_0 + \bar{\zeta}_0 z}{1 - z}, \end{aligned}\right. \tag{99}$$

wo $\bar{\zeta}_0$ den konjugierten Wert von ζ_0 bezeichnet. Setzt man hier für ζ die Funktion (97) ein, so gehört die zusammengesetzte Funktion

$$z(x) = \frac{f(x) - \zeta_0}{f(x) + \bar{\zeta}_0} \tag{100}$$

der Klasse E an. Man erhält also die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die vorgeschriebenen Werte (5) und (98), wenn man in den Formeln (30) und (31) die Werte

$$z_\nu = \frac{\zeta_\nu - \zeta_0}{\zeta_\nu + \bar{\zeta}_0} \quad (\nu = 0, 1, \cdots, n)$$

einsetzt. Die im Falle (30) auftretenden rationalen Funktionen $R_i(x)$ gehen vermöge (99) wieder in rationale Funktionen über, die höchstens von derselben Ordnung wie $R_i(x)$ sind.

Da durch die Transformation (99) Kreise der z-Ebene wieder in Kreise übergehen, so können wir nach Satz II schliessen, dass das Variabilitetsgebiet des Wertes $\zeta = \zeta_n$, wenn die übrigen Funktionenwerte $\zeta_0, \zeta_1, \cdots, \zeta_{n-1}$ und die Punkte (5) gegeben sind, ein Kreis ist, der innerhalb der Halbebene $\Re(\zeta) > 0$ liegt.

18. Nehmen wir nun an, dass die $n+1$ ersten Koeffizienten

$$b_0, b_1, \cdots, b_n \tag{101}$$

der Funktion (97) vorgeschrieben sind. Wir bilden dann die Taylorsche Entwicklung der Funktion

$$z(x) = \frac{f(x) - b_0}{f(x) + \bar{b}_0} = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots. \tag{102}$$

Man verifiziert unmittelbar, dass hier a_ν durch die Koeffizienten $b_0, b_1, \cdots, b_\nu$ eindeutig bestimmt wird. Die $n+1$ ersten Koeffizienten der Reihe (102) sind also bekannt; insbesondere erhält man für die drei ersten die Ausdrücke

$$a_0 = 0, \; a_1 = \frac{b_1}{2\,\alpha_0}, \; a_2 = \frac{1}{2\,\alpha_0}\left(b_2 - \frac{b_1^2}{2\,\alpha_0}\right),$$

wo α_0 den reellen Teil von a_0 bezeichnet.

Für die Funktion (102), die ja der Klasse E angehört, gilt der Satz IV. Man erhält also die Kriterien für die vorgeschriebenen Koeffizienten (101), wenn man in den Ungleichheiten (80)

und (81) die aus den genannten Koeffizienten berechneten Werte $a_0, a_1, \cdots, a_n$ substituiert.

19. Aus den Ungleichheiten (88) und (94) können einige Abschätzungen für unsere Funktion (102) gefunden werden. Diese Ungleichheiten besagen nämlich, dass jedem Kreis $|x| = r$ eine Kurve der z-Ebene entspricht, die für jedes $r < 1$ innerhalb des Kreises $|z| \leq r_n$ und, wenn $r \leq \frac{|b_1|}{2a_0}$ ist, ausserhalb des Kreises $|z| = \varrho_n$ liegt. Weil $z(x)$ für $x = 0$ verschwindet, so muss diese Kurve den letztgenannten Kreis umschliessen. Geht man nun mit Hilfe der Transformation (99) zu der Halbebene $\Re(\zeta) \geq 0$ über, so werden die Kreise $|z| = r_n$ und $|z| = \varrho_n$ in zwei Kreise C_{r_n} und C_{ϱ_n} übergeführt, die durch die Gleichungen

$$\left|\frac{\zeta - b_0}{\zeta + \bar{b}_0}\right| = r_n \text{ bzw. } \left|\frac{\zeta - b_0}{\zeta + \bar{b}_0}\right| = \varrho_n$$

bestimmt sind. Die dem Kreis $|x| = r$ entsprechende Kurve C_r der ζ-Ebene liegt also, sobald $r < 1$ ist, innerhalb C_{r_n} und umschliesst für $r \leq \frac{|b_1|}{2a_0}$ den Kreis C_{ϱ_n}.

Aus diesen geometrischen Betrachtungen erhält man sofort folgende Abschätzungen:

Für $|x| \leq r < 1$ ist

$$(103) \quad \begin{cases} -\dfrac{2r_n a_0}{1 + r_n} \leq \Re(f(x) - b_0) \leq \dfrac{2r_n a_0}{1 - r_n}, \\ |\Im(f(x) - b_0)| \leq \dfrac{2r_n a_0}{1 - r_n^2}. \end{cases}$$

Weiter ist auf der Kreislinie $|x| = r \leq \frac{|b_1|}{2a_0}$

$$(104)\qquad \begin{cases} \max.\ \Re\,(f(x)-b_0) \geqq \dfrac{2\,\varrho_n\,a_0}{1-\varrho_n}, \\[2ex] \min.\ \Re\,(f(x)-b_0) \leqq -\dfrac{2\,\varrho_n\,a_0}{1+\varrho_n}, \\[2ex] \max.\ |\,\Im\,(f(x)-b_0)\,| \geqq \dfrac{2\,\varrho_n\,a_0}{1-\varrho_n^2}. \end{cases}$$

Diese Beziehungen bestehen also für sämtliche Funktionen, die innerhalb des Einheitskreises regulär sind und daselbst einen positiven Realteil besitzen, wenn nur ihre Taylor'schen Entwicklungen in der Umgebung des Nullpunktes mit den gegebenen Koeffizienten (101) anfangen. Da die Grenzen (88) und (94) nur für die Funktionen $R_n(x)$ erreicht werden können, so folgt, dass die Gleichheitszeichen in (103) und (104) nur für die den Funktionen $R_n(x)$ entsprechenden rationalen Funktionen bestehen können.

Ist nur der erste Koeffizient b_0 vorgeschrieben, also $n = 1$, so erhält man aus (103) die früher bekannten Abschätzungen

$$(105)\qquad \begin{cases} -\dfrac{2\,r\,a_0}{1+r} \leqq \Re\,(f(x)-b_0) \leqq \dfrac{2\,r\,a_0}{1-r}, \\[2ex] |\,\Im\,(f(x)-b_0)\,| \leqq \dfrac{2\,r\,a_0}{1-r^2}, \end{cases}$$

wo die Gleichheitszeichen nur für die lineare Funktion

$$(106)\qquad \frac{b_0+\bar{b}_0\,e^{i\alpha}\,x}{1-e^{i\alpha}\,x} = b_0 + \frac{2\,a_0\,e^{i\alpha}\,x}{1-e^{i\alpha}\,x}$$

gelten.

Wenn $n = 2$ ist, d. h. wenn die zwei ersten Koeffizienten b_0 und b_1 in (97) vorgeschrieben sind, ergeben sich aus (103) mit Rücksicht auf (96) die Ungleichheiten

$$(107)\quad \begin{cases} \Re\,(f(x)-b_0) \leqq r\,\dfrac{|b_1|+2\,a_0\,r}{1-r^2}, \\[2ex] \Re\,(f(x)-b_0) \geqq -\,r\,\dfrac{a_0\,(|b_1|+2\,a_0\,r)}{a_0+|b_1|\,r+a_0\,r^2}, \\[2ex] |\,\Im\,(f(x)-b_0)\,| \leqq \dfrac{r\,(|b_1|+2\,a_0\,r)\,(2\,a_0+|b_1|\,r)}{2\,(1-r^2)\,(a_0+|b_1|\,r+a_0\,r^2)}, \end{cases}$$

die für $|x| \leqq r < 1$ gelten. Für $x = r \leqq \dfrac{|b_1|}{2\,a_0}$ findet man aus (104) und (95):

$$(108)\quad \begin{cases} \max.\,\Re\,(f(x)-b_0) \geqq r\,\dfrac{a_0\,(|b_1|-2\,a_0\,r)}{a_0-|b_1|\,r+a_0\,r^2}, \\[2ex] \min.\,\Re\,(f(x)-b_0) \leqq -\,r\,\dfrac{|b_1|-2\,a_0\,r}{1-r^2}, \\[2ex] \max.\,|\,\Im\,(f(x)-b_0)\,| \geqq \dfrac{r\,(|b_1|-2\,a_0\,r)\,(2\,a_0-|b_1|\,r)}{2\,(1-r^2)\,(a_0-|b_1|\,r+a_0\,r^2)}. \end{cases}$$

In den Formeln (107) und (108) können die Gleichheitszeichen nur für diejenigen rationalen Funktionen eintreten, die den am Ende des dritten Abschnitts erwähnten rationalen Funktionen zweiter Ordnung entsprechen. Man findet, dass die erste Grenze in (107) und die zweite in (108) nur von der Funktion

$$(109)\qquad b_0 + x\,\frac{b_1+2\,a_0\,e^{2\,i\,\vartheta_1}\,x}{1-e^{2\,i\,\vartheta_1}\,x^2}, \qquad (\vartheta_1 = \arg b_1),$$

die zweite in (107) und die erste in (108) nur von

$$(110)\qquad b_0 + x\,\frac{a_0\,(b_1-2\,a_0\,e^{2\,i\,\vartheta_1}\,x)}{a_0-b_1\,x+a_0\,e^{2\,i\,\vartheta_1}\,x^2}$$

wirklich erreicht werden.

20. Wir wollen hier noch eine Funktion

$$(111)\qquad f(x) = c_0 + c_1\,x + \cdots + c_n\,x^n + \cdots.$$

betrachten, die im Einheitskreise regulär und von null verschieden ist und der Bedingung $|f(x)| \leqq M$ genügt. Sind die n ersten Koeffizienten in (111) vorgeschrieben, so können die oben abgeleiteten Resultate auf die Funktion

$$(112) \qquad -\log\frac{f(x)}{M} = b_0 + b_1 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots$$

angewandt werden, deren Realteil offenbar für $|x| < 1$ positiv ist. Die n ersten Koeffizienten dieser Entwicklung sind durch die vorgeschriebenen Koeffizienten bestimmt; insbesondere ist

$$b_0 = \log\frac{M}{c_0}, \; b_1 = -\frac{c_1}{c_0}.$$

Aus den Formeln (103) findet man also die für $|x| \leqq r < 1$ geltenden Ungleichheiten:

$$(113) \qquad \begin{cases} -\dfrac{2\, r_n \log\dfrac{M}{|c_0|}}{1 - r_n} \leqq \log\left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leqq \dfrac{2\, r_n \log\dfrac{M}{|c_0|}}{1 + r_n}, \\[2ex] \left|\arg\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leqq \dfrac{2\, r_n \log\dfrac{M}{|c_0|}}{1 - r_n^2}. \end{cases}$$

Nach (104) erhält man weiter auf dem Kreis $|x| = r \leqq a$, wo

$$(114) \qquad a = \frac{|c_1|}{2\,|c_0| \log\dfrac{M}{|c_0|}}$$

ist, die Ungleichheiten

$$(115) \qquad \begin{cases} \max.\log\left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \geqq \dfrac{2\, \varrho_n \log\dfrac{M}{|c_0|}}{1 + \varrho_n}, \\[2ex] \min.\log\left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leqq -\dfrac{2\, \varrho_n \log\dfrac{M}{|c_0|}}{1 - \varrho_n}, \\[2ex] \max.\left|\arg\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \geqq \dfrac{2\, \varrho_n \log\dfrac{M}{|c_0|}}{1 - \varrho_n^2}. \end{cases}$$

Für den absoluten Betrag von $f(x)$ ergeben sich aus (113) und (115) folgende Ungleichheiten:

$$(116)\qquad \left(\frac{M}{|c_0|}\right)^{-\frac{2r_n}{1-r_n}} \leq \left|\frac{f(x)}{c_0}\right| \leq \left(\frac{M}{|c_0|}\right)^{\frac{2r_n}{1+r_n}},$$

$$(117)\qquad \begin{cases} \max.\left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \geq \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{\frac{2\varrho_n}{1+\varrho_n}}, \\[2ex] \min.\left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leq \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{-\frac{2\varrho_n}{1-\varrho_n}}. \end{cases}$$

Die Ungleichheiten (116) gelten für $|x| \leq r < 1$, die Ungleichheiten (117) für $|x| = r \leq a$.

Wenn $n = 1$ ist, findet man hieraus für $|x| \leq r < 1$:

$$(118)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{-\frac{2r}{1-r}} \leq \left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leq \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{\frac{2r}{1+r}}, \\[2ex] \left|\arg\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leq \dfrac{2r}{1-r^2}\log\dfrac{M}{|c_0|}. \end{cases}$$

Setzt man $n = 2$, so erhält man:

$$(119)\qquad \begin{cases} \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{-2r\frac{r+a}{1-r^2}} \leq \left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leq \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{2r\frac{r+a}{1+2ar+r^2}}, \\[2ex] \left|\arg\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leq \dfrac{2r(a+r)(1+ar)}{(1-r^2)(1+2ar+r^2)}\log\dfrac{M}{|c_0|}, \end{cases}$$

$$(120)\quad \begin{cases} \max. \left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \geq \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{2r\frac{a-r}{1-r^2}}, \\[2ex] \min. \left|\dfrac{f(x)}{c_0}\right| \leq \left(\dfrac{M}{|c_0|}\right)^{-2r\frac{a-r}{1-2ar+r^2}}, \\[2ex] \max. \left|\arg\dfrac{f(x)}{c_0}\right| > \dfrac{2r(a-r)(1-ar)}{(1-r^2)(1-2ar+r^2)}\log\dfrac{M}{|c_0|}, \end{cases}$$

wo a die Bedeutung (114) hat. Hier gelten wieder die Ungleichheiten (119) für $|x| \leq r < 1$, die Ungleichheiten (120) für $|x| = r \leq a$.

V. Einige Anwendungen auf die konforme Abbildung konvexer Bereiche.

21. Die notwendigen und hinreichenden Bedingungen, damit eine für $|x| < 1$ reguläre Funktion

$$(121)\qquad \zeta = f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \cdots \quad (c_1 \neq 0)$$

den Einheitskreis auf einen konvexen Bereich konform abbildet, ist, wie Herr STUDY bewiesen hat, dass der Ausdruck

$$(122)\qquad \varphi(x) = x\frac{d}{dx}\log f'(x) + 1 = x\frac{f''(x)}{f'(x)} + 1$$

innerhalb dieses Kreises regulär ist und einen positiven reellen Teil besitzt [1]). Diese Funktion gehört somit zu der im vorhergehenden Abschnitt behandelten Funktionenklasse, und wir können also mit Hilfe der für diese Klasse geltenden Sätze einige Eigen-

[1]) E. STUDY: *Konforme Abbildung einfach zusammenhängender Bereiche* (Leipzig, Teubner, 1913).

schaften der in Frage stehenden konformen Abbildung ableiten. Insbesondere wollen wir mit Hilfe der im vorigen hergeleiteten Resultate einige Ungleichheiten für die Funktion (121) und ihre Derivierte aufstellen.

22. Wir denken uns in (121) die $n+1$ ersten Koeffizienten $c_0, c_1, \cdots, c_n$ gegeben, und betrachten die Gesamtheit der Potenzreihen (121), die mit diesen Koeffizienten beginnen und den Einheitskreis $|x| < 1$ auf einen konvexen Bereich konform abbilden. Bildet man die Funktion (122), so erhält man:

$$\varphi(x) = 1 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots, \tag{123}$$

wo b_ν durch die $\nu+1$ ersten der vorgeschriebenen Koeffizienten c eindeutig bestimmt ist. Die n ersten Koeffizienten in dieser Reihe sind somit bekannt. Setzen wir $c_0 = 0$ und $c_1 = 1$, was nur eine Ähnlichkeitstransformation der ζ-Ebene bedeutet, so findet man

$$b_1 = 2\,c_2, \quad b_2 = 2\,(3\,c_3 - 2\,c_2^2).$$

Aus den Beziehungen (103) ergeben sich folgende Ungleichheiten für $\varphi(x)$:

$$\left\{\begin{aligned} -\frac{2\,r_n}{1+r_n} \leq \Re\,(\varphi(x) - 1) &< \frac{2\,r_n}{1-r_n}, \\ |\Im\,(\varphi(x) - 1)| &\leq \frac{2\,r_n}{1-r_n^2}, \end{aligned}\right. \tag{124}$$

die für $|x| \leq r < 1$ gelten. Nun ist, wie man unmittelbar einsieht,

$$\Re\,(\varphi(x) - 1) = \Re\left(x\,\frac{d}{dx}\log f'(x)\right) = r\,\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(x)|,$$

$$\Im\,(\varphi(x) - 1) = r\,\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(x).$$

Durch Integration erhält man also sofort aus (124) für $|x| = r$,

$$(125)\quad \begin{cases} -\int_0^r \frac{2\,r_n}{r\,(1+r_n)}\,dr \leqq \log|f'(x)| \leqq \int_0^r \frac{2\,r_n}{r\,(1-r_n)}\,dr, \\ -\int_0^r \frac{2\,r_n}{r\,(1-r_n^2)}\,dr \leqq \arg f'(x) \leqq \int_0^r \frac{2\,r_n}{r\,(1-r_n^2)}\,dr. \end{cases}$$

Für $|f'(x)|$ gelten somit die Ungleichheiten

$$(126)\quad e^{-\int_0^r \frac{2\,r_n}{r\,(1+r_n)}\,dr} \leqq |f'(x)| \leqq e^{\int_0^r \frac{2\,r_n}{r\,(1-r_n)}\,dr}.$$

Weil $f(0) = 0$, hat man $f(x) = \int_0^x f'(x)\,dx$ und also

$$|f(x)| \leqq \int_0^x |f'(x)|\,|dx|.$$

Man findet mithin eine obere Grenze für $|f(x)|$ auf dem Kreis $|x| = r$, wenn man die obere Grenze von $|f'(x)|$ von 0 bis r integriert. Es ist leicht einzusehen, dass aus der eben bestimmten unteren Grenze von $|f'(x)|$ sich in entsprechender Weise eine untere Grenze für $|f(x)|$ ergibt.

Um dies zu zeigen, betrachten wir die Kurve C_r der ζ-Ebene, welche vermöge (121) dem Kreis $|x| = r$ entspricht. Die kürzeste Entfernung a dieser Kurve von dem Nullpunkt ist gleich dem Minimum von $|f(x)|$ für $|x| = r$. Weil die Strecke a nur einen Punkt mit C_r gemeinsam haben kann, so entspricht ihr in der x-Ebene eine Kurve L, die von dem Nullpunkt bis zu der Peripherie $|x| = r$ läuft und ganz im Innern des Kreises $|x| \leqq r$ liegt. Man hat nun:

$$a = \int_L |f'(x)|\,|dx| = \int_L |f'(x)|\,\left|\frac{dx}{dr}\right|\,|dr| \geqq \int_L |f'(x)|\,|dr|.$$

Bezeichnen wir mit $m(r)$ das Minimum von $|f'(x)|$ für $|x| = r$, so folgt hieraus

$$a \geqq \int_L m(r)\,|dr| \geqq \int_0^r m(r)\,dr,$$

was wir eben beweisen wollten.

Für den absoluten Betrag der Funktion (121) erhalten wir also auf dem Kreis $|x| = r$ folgende Grenzen:

$$(127)\qquad \int_0^r e^{-\int_0^r \frac{2\,r_n\,dr}{r(1+r_n)}}\,dr \leqq |f(x)| \leqq \int_0^r e^{\int_0^r \frac{2\,r_n\,dr}{r(1-r_n)}}\,dr.$$

22. Wir wollen nun sehen, welche Gestalt die eben abgeleiteten Ungleichheiten für die einfachsten Fälle annehmen. Ist $n = 1$, d. h. sind nur die Koeffizienten $c_0 = 0$ und $c_1 = 1$ vorgeschrieben, so findet man aus den Ungleichheiten (105):

$$(128)\qquad \begin{cases} -\dfrac{2}{1+r} \leqq \dfrac{\partial}{\partial r} \log|f'(x)| \leqq \dfrac{2}{1-r}, \\[2ex] -\dfrac{2}{1-r^2} \leqq \dfrac{\partial}{\partial r} \arg f'(x) \leqq \dfrac{2}{1-r^2}. \end{cases}$$

Durch Integration ergibt sich weiter

$$(129)\qquad \begin{cases} \log \dfrac{1}{(1+r)^2} \leqq \log|f'(x)| \leqq \log \dfrac{1}{(1-r)^2}, \\[2ex] \log \dfrac{1-r}{1+r} \leqq \arg f'(x) \leqq \log \dfrac{1+r}{1-r}, \end{cases}$$

und hieraus wieder

$$(130)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{(1+r)^2} \leqq |f'(x)| \leqq \dfrac{1}{(1-r)^2}, \\[2ex] \dfrac{r}{1+r} \leqq |f(x)| \leqq \dfrac{r}{1-r}. \end{cases}$$

Die Gleichheitszeichen können in (129) und (130) offenbar nur dann bestehen, wenn dasselbe in (128) gilt. Diese letztgenannten Grenzen werden aber nach (106) nur von der linearen Funktion

$$\varphi(x) = \frac{2\,x\,e^{i\alpha}}{1 - x\,e^{i\alpha}} + 1$$

erreicht, und Gleichheit kann demnach in (129) und (130) nur für diejenige Funktion $f(x)$ eintreten, die vermöge (122) dieser Funktion entspricht. Die Integration ergibt

$$f(x) = \frac{x}{1 - x\,e^{i\alpha}}. \tag{131}$$

Diese Funktion bildet den Einheitskreis konform auf diejenige Halbebene ab, die aus der Halbebene $\Re(\zeta) > -\frac{1}{2}$ durch die Drehung $\zeta' = \zeta\,e^{-i\alpha}$ entsteht. Man sieht unmittelbar ein, dass die Grenzen (130) in der Tat von der Funktion (131) erreicht werden.

Wird $n = 2$ gewählt, d. h. betrachten wir sämtliche Potenzreihen, die eine konforme Abbildung des Einheitskreises auf einen konvexen Bereich vermitteln und mit den drei vorgeschriebenen Koeffizienten $c_0 = 0$, $c_1 = 1$ und c_2 anfangen, so können wir die Formeln (107) benutzen, die jetzt, weil $b_1 = 2\,c_2$ und $a_0 = 1$ ist, folgende Gestalt annehmen:

$$\left\{\begin{aligned} &-\frac{2\,|c_2| + 2\,r}{1 + 2\,|c_2|\,r + r^2} \leq \frac{\partial}{\partial r}\log|f'(x)| \leq \frac{2\,|c_2| + 2\,r}{1 - r^2}, \\ &\left|\frac{\partial}{\partial r}\arg f'(x)\right| \leq \frac{2}{1 - r^2}\,\frac{(r + |c_2|)(1 + |c_2|\,r)}{1 + 2\,|c_2|\,r + r^2}. \end{aligned}\right. \tag{132}$$

Die Integration dieser Ungleichheiten ergibt:

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{1}{1 + 2\,|c_2|\,r + r^2} \leq |f'(x)| \leq \frac{1}{(1 - r)^{1 + |c_2|}\,(1 + r)^{1 - |c_2|}}, \\ &|\arg f'(x)| \leq \frac{1}{2}\log\frac{1 + 2\,|c_2|\,r + r^2}{(1 - r)^{1 + |c_2|}\,(1 + r)^{1 - |c_2|}}, \\ &\frac{1}{\sqrt{1 - |c_2|^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1 - |c_2|^2}\,r}{1 + |c_2|\,r} \leq |f(x)| \leq \frac{1}{2\,|c_2|}\left[\left(\frac{1 + r}{1 - r}\right)^{|c_2|} - 1\right]. \end{aligned}\right. \tag{133}$$

Nach (109) und (110) werden die Grenzen (132) für $\frac{\partial}{\partial r}\log|f'(x)|$ nur dann erreicht, wenn die Funktion (122) eine der folgenden ist:

$$(134)\qquad 1+2x\cdot\frac{c_2+e^{2i\vartheta}x}{1-e^{2i\vartheta}x^2},\quad 1+2x\cdot\frac{(c_2-e^{2i\vartheta}x)}{1-2c_2x+e^{2i\vartheta}x^2},$$

wo $\vartheta=\arg c_2$. Die Gleichheitszeichen in der ersten und dritten der Formel (133) können also nur für die Funktionen $f(x)$, die vermöge (122) den Funktionen (134) entsprechen, bestehen. Diese Funktionen

$$(135)\qquad \frac{e^{-i\vartheta}}{\sqrt{1-|c_2|^2}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{1-|c_2|^2}\,e^{i\vartheta}x}{1-|c_2|\,e^{i\vartheta}x},$$

$$(136)\qquad \frac{e^{-i\vartheta}}{2|c_2|}\left[\left(\frac{1+e^{i\vartheta}x}{1-e^{i\vartheta}x}\right)^{c_2}-1\right],$$

erreichen in der Tat die genannten Grenzen.

Durch (135) wird, für $\vartheta=0$, der Einheitskreis auf den von den Geraden $\Re(\zeta)=-\frac{\arccos c_2}{2\sqrt{1-|c_2|^2}}$ und $\Re(\zeta)=\frac{\pi-\arccos c_2}{2\sqrt{1-|c_2|^2}}$ begrenzten Parallelstreifen konform abgebildet. Die Funktion (136) bildet wieder den Einheitskreis auf ein Gebiet ab, das von zwei Halbstrahlen begrenzt wird, die von dem Punkt $\zeta=-\frac{1}{2|c_2|}$ ausgehen und mit der positiven Richtung der reellen Achse die Winkel $\frac{|c_2|\pi}{2}$ und $-\frac{|c_2|\pi}{2}$ bilden.

VI. Geschichtliche Übersicht. [1])

23. Die Untersuchungen über die in der Einleitung definierte allgemeine Funktionenklasse schliessen sich zwei Gebieten der modernen Funktionentheorie eng an, die besonders in den letzten Jahrzehnten grosse Fortschritte gemacht haben: einerseits der

[1]) Die folgende Darstellung beansprucht nicht vollständig zu sein. Infolge des Krieges sind die Verkehrsschwierigkeiten so gross gewesen, dass es uns unmöglich gewesen ist der Entwicklung der letzten Jahre genau zu folgen.

Theorie der konformen Abbildung, anderseits dem Picard'schen Satz und den damit zusammenhängenden Fragen. Hierbei sind die in dieser Arbeit behandelten besonderen Fälle (beschränkte Funktionen und Funktionen, deren Realteil positiv, oder allgemeiner kleiner oder grösser als eine gegebene Schranke ist) ganz besonders von Bedeutung gewesen. Die hierbei gewonnenen Abschätzungen haben u. a. wichtige Anwendungen gefunden in verschiedenen Konvergenzbeweisen und für das Studium der Eigenschaften analytischer Funktionen in der Umgebung einer wesentlich singulären Stelle, z. B. für die Beweise des Picard-Landauschen Satzes und in der Theorie der Riemannschen Zetafunktion.

24. In der Theorie der konformen Abbildung wurden anfangs häufig einige für harmonische Funktionen geltende aus dem Poissonschen Integral abgeleiteten Abschätzungen benutzt. Solche Ungleichungen sind z. B. von SCHWARZ [1]), NEUMANN [2]) und HARNACK [3]) gegeben. Schon früher (1869) hatte aber SCHWARZ [4]) von einem Satz Gebrauch gemacht, der sich auf beschränkte analytische Funktionen bezieht und für die folgenden Untersuchungen von grundlegender Bedeutung gewesen ist. Dieser Satz, der unter dem Namen „das Schwarz'sche Lemma" bekannt ist, kann folgendermassen ausgesprochen werden:

Ist $f(x)$ eine im Kreise $|x| < 1$ reguläre Funktion, die daselbst der Bedingung $|f(x)| \leqq 1$ genügt und für $x = 0$ verschwindet, so ist entweder in dem genannten Kreise $|f(x)| < |x|$, oder es ist iden-

---

1) H. A. SCHWARZ: *Zur Integration der partiellen Differentialgleichung* $\Delta u = 0$ (Ges. Math. Abhandlungen Bd II, 1871, S. 175—210, vgl. S. 190).

2) C. NEUMANN: *Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abelschen Integrale* (Leipzig, Teubner, 2 Aufl., 1884, S. 415).

3) A. HARNACK: *Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunktion in der Ebene* (Leipzig, Teubner, 1887, vgl. § 19).

4) H. A. SCHWARZ: *Zur Theorie der Abbildung* (Ges. Mathematische Abhandlungen Bd. II, 1869, S. 108—132, (siehe S. 110)).

tisch $|f(x)| = |x|$, in welchem Falle $f(x)$ sich auf eine lineare Funktion $e^{i\alpha} x$ reduziert.

Dieser Satz ist ja übrigens, wie CARATHÉODORY [1]) später hervorgehoben hat, eine unmittelbare Folge des klassischen Prinzips der Funktionentheorie, nach welchem eine analytische Funktion in keinem inneren Punkt ihres Regularitätsbereiches ein Maximum ihres absoluten Betrages besitzen kann, falls sie nicht konstant ist. Auf dieses Prinzip stützen sich seitdem fast alle Untersuchungen über beschränkte Funktionen.

Ehe wir zu den folgenden Resultaten, die sich dem Schwarz'schen Lemma eng anschliessen, übergehen, sind einige Ungleichheiten zu erwähnen, die mit Hilfe des Cauchy'schen Integrals abgeleitet wurden. Als BOREL [2]) im Jahre 1896 den Picard'schen Satz elementar bewies, machte er von einigen Ungleichheiten Gebrauch, die er einem von HADAMARD [3]) angegebenen Gedankengang folgend aufgestellt hatte. Die Borel'sche Ungleichheit, die für jede im Kreise $|x| < 1$ reguläre Funktion $f(x)$ gilt, deren reeller Teil daselbst kleiner als eine positive Zahl A ist und die im Punkte $x = 0$ den Wert $\alpha_0 + i\beta_0$ annimmt, lautet mit unwesentlicher Veränderung:

$$|f(x)| < |\beta_0| + |\alpha_0| \frac{1+r}{1-r} + \frac{4Ar}{1-r}. \tag{137}$$

Diese Abschätzung ist nachher von verschiedenen Autoren allmählig verbessert worden. SCHOTTKY [4]) gibt im Jahre 1904 eine

---

[1]) C. CARATHÉODORY: *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard.* (Comptes rendus, Bd. 141, 1905, S. 1213—1215).

[2]) E. BOREL: *Démonstration élémentaire du théorème de M. Picard sur les fonctions entières* (Comptes rendus, T. 122, 1896, S. 1045—1048).

[3]) J. HADAMARD: *Sur les fonctions entières de la forme* $e^{G(x)}$ (Comptes rendus, T. 114, 1892, S. 1053—1055).

[4]) F. SCHOTTKY: *Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen* (Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1904, S. 1244—1266).

solche Verbesserung und CARATHÉODORY [1] [2]) stellt im folgenden Jahr die noch schärfere Ungleichheit

$$|f(x)| \leq |\beta_0| + |\alpha_0| \frac{1+r}{1-r} + \frac{2Ar}{1-r} \tag{138}$$

auf, deren Herleitung er unmittelbar auf das Schwarz'sche Lemma stützt.

Wie man sieht, handelt es sich in allen oben angegebenen Ungleichheiten um besondere Fälle des folgenden allgemeinen Problems:

Es sei $z = f(x)$ eine innerhalb des einfach zusammenhängenden Bereiches G reguläre Funktion, deren Werte innerhalb eines anderen ebenfalls einfach zusammenhängenden Bereiches H fallen, und die in einem Punkt $x = x_0$ von G einen gegebenen Wert $z_0 = f(x_0)$ annimmt. Welcher Beschränkung ist dann der Wert $z = f(x)$ in einem beliebigen Punkt x innerhalb G unterworfen?

Mit dieser Frage beschäftigt sich SCHOTTKY [3]) in einer im Jahre 1907 erschienenen Abhandlung.

Da der Schottky'sche Gedankengang auch für unsere Betrachtungen im ersten Abschnitt grundlegend ist, wollen wir ihn hier kurz angeben.

$G(x, x_0)$ und $H(z, z_0)$ seien zwei Funktionen, die die Bereiche G und H derart auf den Einheitskreis konform abbilden, dass der Punkt $x = x_0$ bzw. $z = z_0$ in den Nullpunkt übergeht. Dann erhält man nach dem Modulprinzip die Ungleichung:

$$\left| \frac{H(f(x), z_0)}{G(x, x_0)} \right| \leq 1 \tag{139}$$

oder

$$|H(f(x), z_0)| \leq |G(x, x_0)|. \tag{140}$$

---

[1]) E. LANDAU: *Über den Picard'schen Satz* (Vierteljahrschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Jahrg. 51, 1906, S. 252—318).

[2]) E. LANDAU: *Beiträge zur analytischen Zahlentheorie* (Rendiconti del Circ. Matematico di Palermo, Bd. 26. 1908, S. 169—302).

[3]) F. SCHOTTKY: *Über zwei Beweise des allgemeinen Picard'schen Satzes* (Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1907, II, S. 823—848, § 1).

Mit Hilfe dieser allgemeinen Ungleichheit stellt SCHOTTKY für den besonderen Fall, wo H eine Halbebene ist, eine Ungleichung auf, welche, wenn G der Einheitskreis ist, folgende Form annimmt:

$$(141) \qquad |f(x) - a_0| \leq \frac{2r(A - a_0)}{1 - r},$$

die genauer als (137) ist. Von dieser Formel ausgehend leitet er weiter eine Ungleichheit für den absoluten Betrag einer Funktion ab, die in einem gegebenen Kreise von null verschieden und beschränkt ist. Diese Ungleichheit ist identisch mit der von uns für den speziellen Fall $n = 1$ aufgestellten ersten Abschätzung in (118).

SCHOTTKY hat das allgemeine geometrische Prinzip nicht bemerkt, welches jedoch unmittelbar aus den Formeln (139) und (140) folgt und die vollständige und genaue Lösung des oben gestellten Problems enthält. Dieses Prinzip wurde, ganz unabhängig von den SCHOTTKY'schen Untersuchungen, im Jahre 1908 von E. LINDELÖF [1]) entdeckt. Mit den oben angewandten Bezeichnungen kann es folgendermassen ausgesprochen werden:

Ist x ein Punkt der durch die Gleichung

$$|G(x, x_0)| = r \quad (r < 1)$$

bestimmten Kurve, so fällt der entsprechende Punkt $z = f(x)$ innerhalb oder auf die Kurve

$$|H(z, z_0)| = r.$$

Letzteres trifft dann und nur dann ein, wenn $z = f(x)$ die konforme Abbildung des Bereiches G auf H liefert.

Für $x = x_0$ ist insbesondere

$$|H'(z_0, z_0)|\,|f'(x_0)| \leq |G'(x_0, x_0)|,$$

wo das Gleichheitszeichen nur in dem erwähnten Ausnahmefall besteht.

[1]) E. LINDELÖF: *Memoire sur certaines inégalités dans la théorie des fonctions monogènes et sur quelques propriétés nouvelles de ces fonctions dans le voisinage d'un point singulier essentiel* (Acta societatis scientiarum Fennicae, T. XXXV, N:o 7, 1908).

LINDELÖF gibt diesen Satz in einer noch allgemeineren Fassung, indem er die Greens'chen Funktionen der Bereiche G und H statt der Abbildungsfunktionen betrachtet, wobei die Bereiche G und H auch mehrfach zusammenhängend sein können [1]). Aus seinem allgemeinen Prinzip leitet er dann eine Menge von Ungleichheiten ab, die teilweise neu, teilweise Verschärfungen früher bekannter Abschätzungen sind. Wir beschränken uns hier auf die allerwichtigsten.

Für eine innerhalb des Einheitskreises reguläre und beschränkte Funktion ($|f(x)| \leq M$), die im Nullpunkte den Wert a_0 annimmt, gelten für $|x| < 1$ folgende Abschätzungen:

$$|f(x)| \leq \frac{\frac{|a_0|}{M} + |x|}{1 + \frac{|a_0|}{M}|x|} M, \tag{142}$$

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{M} \frac{M^2 - |f(x)|^2}{1 - |x|^2}. \tag{143}$$

Wenn $|x| \leq \frac{|a_0|}{M}$, ist weiter:

$$|f(x)| \geq \frac{\frac{|a_0|}{M} - |x|}{1 - \frac{|a_0|}{M}|x|} M. \tag{144}$$

Den in diesen Formeln [2]) enthaltenen Satz hat KOEBE [3]) später „erweitertes Schwarzsches Lemma" genannt und davon in seinen Untersuchungen über konforme Abbildung wiederholt Gebrauch

[1]) Vgl: E. LINDELÖF: *Sur le théorème de M. Picard dans la théorie des fonctions monogènes* (Congrès des Mathématiques à Stockholm 1909, S. 112—136, vgl. S. 123).

[2]) Wir bemerken, dass diese, sowie überhaupt sämtliche von LINDELÖF gegebenen Abschätzungen *genau* sind. Aus dem oben erwähnten Prinzip geht ausserdem hervor, für welche Funktionen die Grenzen erreicht werden.

[3]) P. KOEBE: *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, II* (Acta Mathematica, Bd 40, vgl. S. 263—264).

gemacht. Die Formel (143) ist eine Verallgemeinerung der von LANDAU [1]) früher gefundenen Abschätzung

$$|f'(x)| < \frac{M^2 - |a_0|^2}{M}.$$

Die Formeln (142) und (144) gehen aus unseren Ungleichheiten (88) und (91) für $n = 1$ hervor.

LINDELÖF gibt weiter für den Fall, wo der reelle Teil der betreffenden Funktion unter einer gegebenen Schranke liegt, ausser einer Verschärfung der CARATHÉODORYschen Abschätzung (138), auch genaue Grenzen für den reellen und imaginären Teil der Funktion. Diese Ungleichheiten sind dem Inhalte nach mit unseren speziellen Formeln (105) identisch.

Schliesslich erwähnen wir noch die Ungleichheiten, welche LINDELÖF für eine von null verschiedene beschränkte Funktion findet. Ausser der von SCHOTTKY gefundenen Abschätzung leitet er auch die übrigen in (118) enthaltenen Ungleichheiten ab.

Für den Differenzquotienten einer im Einheitskreise beschränkten Funktion gibt CARATHÉODORY [2]) später (1914) die Abschätzung

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right| < \frac{2M}{1 - |x|\,|x_0|}.$$

In derselben Arbeit stellt er für eine Funktion $\psi(x)$, die für $|x| < 1$ der Bedingung $|\Re\,\psi| < \sigma$ genügt und für $x = 0$ verschwindet die Ungleichheit

$$|\Im\,\psi(x)| \leqq \frac{2\sigma}{\pi} \log \frac{1 + |x|}{1 - |x|} \tag{145}$$

---

[1]) E. LANDAU: loc. cit., (S. 62, [1])). S. 304.

[2]) C. CARATHÉODORY: *Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen* (Mathematische Abhandlungen HERMANN AMANDUS SCHWARZ zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet von Freunden und Schülern, Berlin, 1914. S. 19—41. s. S. 21—23).

auf [1]), welche jedoch schon in einer von LINDELÖF früher gegebenen Formel enthalten ist [2]).

25. Allen oben betrachteten Ungleichheiten gemeinsam ist, dass in ihnen nur *ein* Wert der Funktion als gegeben vorausgesetzt wird. Im Jahre 1916 wurde eine Untersuchung von JENSEN [3]) veröffentlicht, wo ausserdem gewisse Nullstellen der Funktion als bekannt angenommen werden. Als funktionentheoretische Grundlage dient ein Satz, den JENSEN „generalisiertes Schwarzsches Lemma" nennt und der folgendes besagt:

Ist $f(x)$ eine für $|x| < 1$ reguläre Funktion, die daselbst beschränkt ($|f(x)| < 1$) ist und in den Punkten $x_1, \cdots, x_n$ verschwindet, so ist für $|x| < 1$

$$|f(x)| < \prod_{i=1}^{n} \left| \frac{x - x_i}{1 - \bar{x}_i x} \right|.$$

---

[1]) Dies geschieht, wie er selbst sagt, «ohne sich um das geometrische Bild zu kümmern, durch einfache Abschätzung«. Es ist jedoch schwer einzusehen, welcher Vorteil darin liegt, dass man wie es CARATHÉODORY und JENSEN gemacht haben, das allgemeine, anschauliche LINDELÖF'sche Prinzip mit arithmetischen Abschätzungen ersetzt. Abgesehen davon, dass man in dieser Weise schwer die genauesten Abschätzungen erlangt, scheint ein solches Bestreben nur die eigentliche Grundlage der ganzen Sache zu verhüllen. An Strenge wird selbstverständlich nichts gewonnen; die in Betracht kommenden geometrischen Bilder (Halbebene, Parallelstreifen usw.) sind ja nicht solcher Art, dass die Anschauung hier zu unrichtigen Schlüssen führen könnte.

[2]) E. LINDELÖF, loc. cit. S. 10 unten. Setzt man in dieser Formel $a_0 = 1$ und $i \log f(x) = \psi(x)$, so erhält man die Ungleichheit (145). Dieselbe Ungleichheit findet sich aus in der Arbeit von KOEBE: *Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung I* (Journal für Mathematik, Bd. 145, S. 177—223, vgl. S. 190—191).

[3]) J. L. W. V. JENSEN: *Undersøgelser over en Klasse fundamentale Uligheder i de analytiske Funktioners Theori* (D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, Naturv. og Mathematisk Afd., 8 Raekke, II, 3, 1916, S. 203—228).

Dieser Satz ist in einer Note von CARATHÉODORY und FEJÉR [1]) enthalten, wo die von JENSEN [2]) schon früher abgeleitete Ungleichheit (46) bewiesen wird [3]). Aus diesem Satze leitet JENSEN mehrere Ungleichheiten ab, zu deren Umformung er gewisse formale Regeln für Rechnen mit komplexen Zahlen benutzt [4]).

26. Wir gehen nun zu einer Reihe von Untersuchungen über, die sämtlich ein Problem behandeln, das mit den oben erläuterten Fragen nahe zusammenhängt, wenn es auch ganz getrennt von diesen und nach anderen Methoden untersucht wurde. Es ist dies die Frage nach den Bedingungen für die Koeffizienten einer innerhalb des Einheitskreises konvergenten Potenzreihe, deren reeller Teil positiv ist. CARATHÉODORY [5]) hat im Jahre 1907 die Lösung dieses Problems gegeben mit Hilfe geometrischer Betrachtungen über den kleinsten konvexen Körper des $2n$-dimensionalen Raumes, der die Kurve

$$x_i = 2\cos i\vartheta,\ y_i = -2\sin i\vartheta \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

---

[1]) C. CARATHÉODORY et L. FEJÉR: *Remarques sur le theorème de M. Jensen* (Comptes rend., T. 145, 1907, S. 163—165).

[2]) J. L. W. V. JENSEN: *Sur un nouvel et important théorème de la théorie des fonctions* (Acta Mathematica, T. 22, 1899, S. 359—364).

[3]) Siehe auch E. LANDAU: *Über eine Aufgabe aus der Funktionentheorie* (The Tôhoku Mathematical Journal, B. 5, 1914, S. 97—116).

[4]) JENSEN betont, dass seine Resultate auch in der Hinsicht allgemeiner als die LINDELÖF'schen seien, dass bei ihm der Funktionenwert im Punkte $x = x_0$ statt $x = 0$ als bekannt vorausgesetzt wird. Hierzu ist zu bemerken, dass die Einschränkung $x_0 = 0$ eine ganz unwesentliche ist. In dem LINDELÖF'schen allgemeinen Prinzip ist in der Tat der allgemeinere Fall vorausgesetzt.

[5]) C. CARATHÉODORY: *Über den Variabilitätsbereich der Koeffizienten von Potenzreihen, die gegebene Werte nicht annehmen* (Math. Annalen, Bd. 64, 1907, S. 93—115).

enthält. Später (1911) gelang es TOEPLITZ [1]) die Bedingungen in analytischer Form auszudrücken. Die TOEPLITZ'schen Resultate veranlassten CARATHÉODORY [2]) das Problem aufs neue zu behandeln; er beweist dann auch einen Satz, der mit unserem Satz V analog ist.

Für die CARATHÉODORY'schen Sätze sind später von FISCHER [3]), HERGLOTZ [4]), I. SCHUR [5]) und FROBENIUS [6]) rein algebraische Beweise gegeben worden.

Schliesslich ist noch eine bemerkenswerte Untersuchung von I. SCHUR zu erwähnen [7]). In dem ersten Teil seiner Arbeit, an die sich unsere Untersuchungen der Methode nach anschliessen, behandelt SCHUR das CARATHÉODORY'sche Problem, nur mit dem Unterschied, dass er beschränkte Potenzreihen betrachtet. Nachdem mit Hilfe des Funktionenalgorithmus (70) die Sätze IV und

---

[1]) O. TOEPLITZ: *Zur Theorie der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen* (Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, math.-phys. Klasse, Jahrg. 1910, S. 489—506), und *Über die Fouriersche Entwickelung positiver Funktionen* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII, 1911, S. 191—192).

[2]) C. CARATHÉODORY: *Über den Variabilitätsbereich der Fourierschen Konstanten von positiven Funktionen* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII, 1911, S. 193—217). Vgl. auch. C. CARATHÉODORY und L. FEJÉR: *Über den Zusammenhang der Extremen von positiven harmonischen Funktionen mit ihren Koeffizienten und über den Picard-Landauschen Satz* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII, 1911).

[3]) E. FISCHER: *Über das Carathéodorysche Problem, Potenzreihen mit positivem reellen Teil betreffend* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. XXXII, 1911, S. 240—256).

[4]) G. HERGLOTZ: *Über Potenzreihen mit positivem, reellen Teil im Einheitskreis* (Berichte über die Verhandlungen der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenchaften zu Leipzig, math.-phys. Klasse, Bd. 63, 1911, S. 501—511).

[5]) I. SCHUR: *Über einen Satz von C. Carathéodory* (Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1912, S. 4—15).

[6]) G. FROBENIUS: *Ableitung eines Satzes von Carathéodory aus einer Formel von Kronecker* (Sitzungsberichte der Kgl. Preussischen Akademie der Wissenschaften, Jahrg. 1912, S. 16—31).

[7]) Vgl. die Fussnote S. 14.

V abgeleitet worden sind, nimmt SCHUR gewisse rechnerische Umbildungen der Bedingungen (81) vor und beweist dann, dass die so erhaltenen neuen Kriterien durch Übergang zu Funktionen mit positivem reellen Teil zu den CARATHÉODORY-TOEPLITZ'schen Bedingungen führen.

In dem zweiten Teil der zitierten Arbeit macht SCHUR zahlreiche Anwendungen von seinen Resultaten. Er zeigt, dass die Parameterdarstellung (74) der Koeffizienten einer beschränkten Potenzreihe für die Untersuchung vieler Fragen sehr vorteilhaft ist. U. a. folgen daraus leicht gewisse von FEJÉR [1]) und BOHR [2]) früher erhaltene Resultate hinsichtlich der Partialsummen beschränkter Potenzreihen. Auch werden neue Resultate aufgestellt.

27. Wie aus der vorstehenden Übersicht hervorgeht, sind die Beschränkungen hinsichtlich der Funktionenwerte und diejenigen, die sich auf die Koeffizienten der Taylor'schen Entwicklung beziehen, bis jetzt ganz getrennt von einander untersucht worden. Die vorliegende Arbeit ist ein Versuch diese Fragen von einem allgemeineren und einheitlichen Standpunkt aus zu behandeln. Wir untersuchen nämlich im ersten Abschnitt den allgemeinen Fall, wo $n+1$ verschiedene Funktionenwerte vorgeschrieben sind. Wir finden so die Kriterien (30) und (31), welche auch die Lösung des allgemeinsten Problems enthalten, wo ausser den Funktionenwerten auch die Werte der Differentialquotienten (oder Koeffizienten der Taylor'schen Entwicklung) bis zu einer gewissen in jedem Punkte bestimmten Ordnung gegeben sind. Die Beschränkungen für diese letzteren ergeben sich nämlich, wie im dritten Abschnitt gezeigt wird, aus den Bedingungen (30) und (31), indem man die gegebenen Argumentwerte in geeigneter Weise zusammenfallen lässt.

Unser Satz II, der eine einfache geometrische Deutung der eben genannten analytischen Kriterien (30) und (31) gibt, kann

[1]) *Rendiconti di Palermo*, Bd. 38, 1914. S. 95.

[2]) *Gött. Nachrichten*, math.-phys. Klasse, 1917, S. 119—128.

in gewissem Sinne als eine Verallgemeinerung des LINDELÖF'schen Prinzips angesehen werden. Wir haben ihn allerdings nur für die besondere Funktionenklasse E ausgesprochen; nach den Auseinandersetzungen der Einleitung ist es jedoch klar, welche Fassung man ihm in dem allgemeinen Fall zu geben hat.

Im zweiten Abschnitt erweitern wir unsere Resultate zu dem Fall $n = \infty$ und zeigen, dass wenn die vorgeschriebenen Werte den unendlich vielen Bedingungen (49) genügen, es immer zugehörige Funktionen gibt. Wir untersuchen dann, wie die Eindeutigkeit der betreffenden Funktion von den gegebenen Werten abhängt. Später erfahren wir, dass diese Betrachtungen, sowie die Darstellungsform (60) für eine beschränkte Funktion mit unendlich vielen Nullstellen, schon bekannt sind [1]).

Im dritten Abschnitt folgen wir bei der Behandlung des CARATHÉODORY'schen Problems der Hauptsache nach der SCHUR'schen Darstellung. SCHUR scheint jedoch nicht beachtet zu haben, dass der Algorithmus (22) in dem Sinne umkehrbar ist, dass wenn man in der Formel (33) für $z^{(n+1)}(x)$ eine ganz beliebige Funktion der Klasse E einsetzt, die hierbei erhaltene Funktion $z(x)$ der verlangten Art ist. Auch ist unser Beweis für den Satz V einfacher als SCHURS, indem wir von der Cauchy'schen Koeffizientenabschätzung ($|a_n| < 1$) keinen Gebrauch machen.

Die Abschätzungen der dritten und vierten Abschnitte dürften neu sein. Für $n = 1$ erhält man aus ihnen die von LINDELÖF gegebenen Ungleichheiten.

Im fünften Abschnitt, wo es sich um Funktionen handelt, die

---

[1]) Vgl: W. BLASCHKE: *Eine Erweiterung des Satzes von Vitali über Folgen analytischer Funktionen* (Berichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. LXVII, 1915, S. 194—200). Die BLASCHKE'sche Arbeit haben wir nicht gesehen; wir sind durch die Note von E. LANDAU: *Über die Blaschkesche Verallgemeinerung des Vitalischen Satzes* (Berichte der math.-phys. Klasse der Kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Bd. LXX, 1918, S. 156—159) auf sie aufmerksam gemacht worden.

den Einheitskreis auf einen konvexen Bereich konform abbilden, gehen wir auf die Kriterien für die Koeffizienten der Potenzreihenentwicklungen nicht näher ein, weil dieses Problem schon früher von CARATHÉODORY [1]) behandelt worden ist. Die Abschätzungen (127), (126) und (125) für den absoluten Betrag der betreffenden Funktion und ihrer Derivierten, sowie für das Argument der letzten, sind meines Wissens nicht früher bekannt. Für die einfachsten Fälle ($n = 1$ und 2) hat T-H. GRONWALL [2]) die Ungleichheiten (130) und die erste und dritte der Abschätzungen (133) aus der SCHWARZ'schen Formel für die Abbildung eines Polygons auf den Einheitskreis ausgehend früher gefunden.

---

[1]) C. CARATHÉODORY: *Sur la représentation conforme des polygones convexes* (Annales de la Societé scientifique de Bruxelles, T. XXXVII, S. 1—10).

[2]) T-H. GRONWALL: *Sur la déformation dans la représentation conforme* (Comptes rendus. Bd. 162, 1916, S. 249—252) und: *Sur la déformation dans la représentation conforme sous des conditions restrictives* (Comptes rendus, Bd. 162, 1916, S. 316—318).

Druckfehlerverzeichnis.

S. 25. Zeile 8 von oben statt $\zeta_{p,n}(x)$ lies $\zeta_{n,p}(x)$.
S. 31, » 9 von unten statt $\varphi(x)\,\varphi(x)$ lies $\varphi(x)\,\bar{\varphi}(x)$.
S. 33, » 4 von unten statt $z^{(1)}(x)$ lies $z^{(1)}(x)$.
S. 34, » 2 von oben statt $z^{(1)}(x)$ lies $z^{(1)}(x)$.
S. 48, » 4 von unten statt a_0 lies b_0.