AVARUUDEN KÄSITYKSISTÄ

Kirjoittanut

ROLF NEVANLINNA

Kun seuraavassa yritän selvittää eräitä näkökohtia, jotka avaruuden käsityksen muodostumisessa ovat olleet merkitseviä, otan lähtökohdaksi geometriset ilmiöt, jotka havaitsemme lähimmässä ympäristössämme, suhteellisen välittömästi aukeavassa »näkökentässämme». Geometrian tutkimus, kuten teoreettinen ajattelu yleensä, ankkuroituu ihmisen arkiympäristöön, sellaisiin kokemuksiin ja ilmiöihin, jotka biologisissa, käytännöllisissä ja sosiaalisissa suhteissa ovat keskeisiä ja vitaalisen tärkeitä. Aina aikojen alusta lähtien on ajatus kuitenkin pyrkinyt särkemään tämän lähimmän ympäristön rajoja. Sitä on ohjannut usko siihen että tämän maailman ilmiöissä piilee jokin salattu merkitsevyys. Jo kauan ennen kuin voi puhua »tieteeksi» nimitetyn toiminnan vaatimasta systemaattisesta ajattelusta, on ihminen yrittäessään selvitellä ilmiöiden ja olioiden keskinäistä järjestystä joutunut luomaan uskonnollisia tai rationaalisia maailmankuvia, joihin sovitettuna myös yksilön osuus on tuntunut saavan korkeampaa merkitystä.

Yhteisenä piirteenä maailmankuvien kehityksessä ja vaihteluissa havaitaan voimakas taipumus *yleistämiseen*. Tämä esiintyy erikoisen silmiinpistävänä murroskausien jälkeisinä aikoina, jolloin kumoukselliset tieteelliset ideat ovat astuneet valtaan. Tällöin tutkimus ensimmäisten menestysten rohkaisemana säännöllisesti on yltynyt laajentamaan saavutustensa kantavuutta liian pitkälle. Näin se on joutunut loittonemaan etäälle siitä empiirisestä pohjasta, jolta se on ratkaisevat virikkeensä saanut. Tällainen liian dogmaattisesti yleistävä tendenssi on ennemmin tai myöhemmin herättänyt vastareaktion, joka on taltuttanut uudet oivallukset takaisin kohtuuden rajoihin, joiden sisällä ne jatkuvasti säilyttävät laillisen pätevyytensä.

Tämänkaltainen kriitillinen, empiirisesti asennoitunut suuntaus vuorostaan on usein vetänyt tutkimuksen rajat liian tiukalle. Niin on eräänlainen »kriitillinen dogmaattisuus» saattanut voittaa jalansijaa, haitaksi tutkimustoiminnan vapaudelle, jota vailla tiede ankarimmissakaan muodoissaan ei ole elinkelpoinen.

Niin ahtaasti rajoitettu kuin geometrian tutkimus sisällyksensä puolesta tuntuukin olevan, valaisee sen kehitys selvästi sellaisia yleisluontoisia piirteitä, joihin yllä on viitattu. Avaruuden käsitysten historia avaa näissä yleisissäkin suhteissa varsin mielenkiintoisia näköaloja.

* * *

Kun nyt palaan varsinaiseen aiheeseeni, niin kiinnitän alussa mainitun ohjelman mukaisesti ensin huomion meitä ympäröivään »näkökenttään». Muodostakoon sen esim. luentosalin määräämä lähiympäristö. Jäämme tarkkaamaan siinä esiintyviä »geometrisia ilmiöitä» ja havaitsemme mm. seuraavaa.

Salimme on muodoltaan suorakulmainen suuntaissärmiö, jota rajoittaa kuusi tasomaista sivupintaa (neljä seinää, lattia ja katto). Sivupinnat ovat suorakulmioita, joita rajoittaa kaksi paria yhdensuuntaisia suoraviivaisia särmiä. Kahdeksassa kärkipisteessä kohtaa toisensa kolme sivupintaa ja kolme sivusärmää, jotka parittain ovat kohtisuorassa toisiinsa nähden jne.

Vaikka nämä lausumat näyttävät ilman muuta selviltä ja kiistattomilta, havaitsemme kuitenkin, jos hetkiseksi vaivaudumme niitä miettimään, että niihin sisältyy joukko problemaattisia piirteitä. Mitähän lopulta tarkoittavat niissä esiintyvät käsitteet: »piste», »suora», »taso», »yhdensuuntainen», »kohtisuora» jne.? Ne näyttävät tosin mutkattomilta, mutta toisaalta: joudumme ilmeisesti pulaan, jos yritämme niitä palauttaa sellaisiin »välittömiin», yksityisiin havaintoihin, jotka empiirikon mielestä ovat lauseen pätevyyden viimeinen koetinkivi. Itse asiassa nuo käsitteet ovat pitkälle viedyn abstrahoinnin ja idealisoinnin tuotteita, ja sellaisina ne osittain vieläpä edellyttävät ennakolta määrättyyn suuntaan vakiinnutettua geometrista teorianmuodostustakin.

Lyhyesti haluan selventää tätä ajatusta. Ehkä praktikon tai empiirikon mielestä on turhaa hiuksenhalkomista käydä erittelemään niin yksinkertaista ja ilmeisen selvää käsitettä kuin »piste». Pistehän on, hän sanoo, paikka jolla ei ole mitään ulottuvaisuutta, avaruuden kohta vailla pituutta, leveyttä ja korkeutta. Mutta tuollaisella selityksellä hän ei pääse pitkälle. Juuri empiirikkona hänen on jossakin määrätyssä konkreettisessa tilanteessa kyettävä tulkitsemaan »pisteen» käsite niin, että se on suoranaisesti tarkistettavissa havaintoteitse, näkö- tai jonkun muun aistimuksen välityksellä. Mutta jos ajattelemme mitä hyvänsä »piste»-käsitteen konkreettista vastinetta tai mallia (mustalle taululle merkittyä pienen pientä liitupistettä, kahden hiuksenhienon viivan leikkauspistettä tms.), niin ei yhdessäkään niistä toteudu se ideaalinen, ulottuvaisuudeton pistemäisyys, jota geometria näyttää edellyttävän. Käytännössä tosin ei ole paljoakaan väliä sillä, että piste-käsitteen konkreettiset tulkintayritykset siten pakostakin joutuvat lähtemään häälyvältä pohjalta. Tavallisissa käytännön vaatimissa toimituksissa, esim. paikanmääräyksiä suoritettaessa, voidaankin ilman väärinkäsitysten vaaraa tyytyä »approksimaatioihin», jolloin pisteen asema tulee määrätyksi, joskaan ei täysin täsmällisesti, niin kuitenkin suhteellisen yksiselitteisesti, riittävällä tarkkuudella annettuun tilanteeseen nähden.

Kokeellisen fysiikan tutkija joutuu esimerkiksi suorittamaan jonkin nopeus- tai pituusmääräyksen. Hienoimmatkin käytettävissä olevat mittausmenetelmät ovat sikäli välillisiä, että ne komplisoidulla tavalla liittyvät korkealle kehitettyyn fysikaaliseen teoriaan, joka tässä siis jo edellytetään, olipa kokeen suorittaja sillä hetkellä siitä tietoinen tai ei. Olkoon näiden teoreettisten yhteyksien laita kuinka tahansa, olkoot käytettävissä olevat tarkkuuskojeet millaisia tahansa — viime kädessä koe kuitenkin on »yksityisen havainnon» varassa: on kyettävä toteamaan milloin kaksi pistettä lankeaa yhteen, toisen ollessa esim. valopiste ja toisen taas mitta-asteikkoon kuuluva merkki. Mutta juuri siksi että konkreettinen pistekäsite luonteeltaan on tietyissä rajoissa epämääräinen, ei tuollaisessa tilanteessa päästä täysin varmaan ratkaisuun. On taas tyydyttävä approksimaatioihin; näissä yhteyksissä puhutaankin yleisesti »virherajoista», joiden välisellä alueella kokeen tulos liikkuu. (Tuohon kieltämättä hieman hämärään sanontaan liittyy eräitä tietoteoreettisia kysymyksiä, joita ei voi pitää ratkaistuina, niin suurta vaivaa kuin matemaatikot ja filosofit ovatkin nähneet täsmentääkseen niiden sisältöä. Kun näet puhutaan »virheistä», on edeltävänä taustakuvana ihmisestä riippumaton, absoluuttinen — joskin meille tuntematon — »ideaalitodellisuus», jota yhä suurempaan tarkkuuteen pyrkien yritämme lähestyä.) Niihin ratkaisuihin nähden, joihin mainitunlaisessa kokeessa tähdätään, ovat virherajat kuitenkin niin ahtaat, että likimääräinenkin tarkkuus yleensä takaa koetulokselle tyydyttävän yksiselitteisen tulkinnan, eikä silloin ole syytä välittää niistä epävarmuus- tai epämääräisyysväleistä, joiden sisäpuolella havainnot tai mittaus eivät ratkaisua anna.

Mutta on toisia tilanteita, joissa tällainen suhtautuminen ei käy päinsä. Eräissä korkeissa tieteellisissä yhteyksissä on usein kysymys ratkaisuista, joissa vaaditaan suurempaa tarkkuutta kuin mihin parhaimmatkaan mittausmenetelmät auttavat pääsemään. Valaisevana esimerkkinä tästä mainitsen tilanteen, jossa on tehtävä ratkaisu Newtonin klassillisen fysiikan ja Einsteinin suhteellisuusteorian kesken. Loogisina konstruktioina ovat molemmat systeemit kuten tunnettua virheettömät (sts. ristiriidattomat), joskaan ne käsitteelliseltä rakenteeltaan eivät ole isomorfisia. Tästä huolimatta niiden esittämät lauseet lankeavat yksiin silloin kun ne koskevat ihmisen »fysikaalisessa normaaliympäristössä» esiintyviä ilmiöitä, siis jokapäiväisen suuruusluokan etäisyyksiä, nopeuksia tms. Fysiikan *välittömimpiin käytännöllisiin* sovellutuksiin nähden ei näiden kahden teorian välillä itse asiassa ole mitään havaittavaa eroa. Samoin on laita sellaisissa tieteellisissäkin yhteyksissä, joissa esiintyvät suuruusluokat eivät aivan tavattomasti poikkea normaaleista mitoista, ja niinpä on myös lukuisissa tieteellisissä fysikaalisissa kysymyksissä yhdentekevää, kummalleko näistä kahdesta teoriasta halutaan antaa etusija. Tähtitieteilijä esimerkiksi voi laskea auringonpimennyksen yhtä hyvin klassillisesti kuin relativistisesti; prognoosi on käytännöllisesti katsoen sama. Itse asiassa nykyinen tiede käyttää molempia teorioita rinnatusten, ja niin tullaan epäilemättä myös tulevaisuudessa menettelemään. Tutkittaessa niin sanoakseni normaaleissa, maanpäällisissä mitoissa esiintyviä fysikaalisia ilmiöitä on ehdottomasti käytännöllisempää »pitää voimassa» absoluuttista aikaa, Galilein kinematiikkaa ja Newtonin dynamiikkaa. Milloin taas on kysymys rajailmiöistä, astronomian makrokosmisista ja atomifysiikan mikrokosmisista yhteyksistä, on tarkoituksenmukaisempaa joskaan ei välttämätöntä käyttää suhteellisuusteoriaa. Vaikkakin moderni tiede tätä nykyä yleensä antaa *periaatteellisen* etusijan relativistisille eikä klassillisille ideoille, ei tätä kannanottoa siis voida sitovasti motivoida vetoamalla ns. »objektiivisiin kriterioihin» tai »tieteelliseen todisteluun». Pikemminkin tässä on määrääjänä ollut *arvoarvostelma*, jonka muodostumiseen ovat vaikuttaneet sellaiset aspektit kuin teorian »yksinkertaisuus», »yhtenäisyys», »suurenmoisuus», »harmonia», »kauneus». Ratkaisevassa määrin ovat juuri arvonäkökohdat kaiken reaalitieteen kehityksen virikkeinä: aivan oleellisesti näin on laita jopa tieteistä ankarimmassakin, matematiikassa. Senvuoksi tutkimustyö vaatii harjoittajaltaan sellaisia ominaisuuksia, joiden yhteiseksi nimitykseksi myös intellektuaalisen toiminnan alueilla sopii vain *hyvä maku*. Halu eliminoida tieteestä arvomomentit on näin ollen mieletöntä. Mikäli voisi kuvitella, että tällainen vaatimus jollakin tieteen sektorilla saataisiin toteutetuksi, olisi siitä hetkestä lähtien turha odottaa merkityksellisiä saavutuksia sen tieteenhaaran taholta.

* * *

Nämä näkökohdat esittävät tärkeää osaa myös siinä varsin rajoitetussa probleemapiirissä, avaruuskäsityksen kehityksessä, josta tässä on ollut puhe. Tarkastelkaamme nyt uudelleen eräitä geometrisessa suhteessa merkittäviä seikkoja »näkökenttämme» alueella.

Kuten kävi ilmi, liittyy viattomalta näyttävään pisteen käsitteeseen jo eräitä arvoituksellisia piirteitä. Sitäkin runsaammin kohtaamme niitä eräiden muiden, yhä vielä varsin alkeellisten geometristen ilmiöiden yhteydessä, joihin alussa viittasin. Eräs alkeisgeometrian perusobjekteista on »suora viiva». Olettakaamme, että jo olemme voineet sopia »viiva»-käsitteen hyväksyttävästä tulkinnasta. Mutta mitä sitten tarkoitamme, jos sanomme viivaa »suoraksi»? »Suoruus» on tosin varsin havainnollinen, voipa sanoa: suggestiivinen kvaliteetti, hahmo, josta jokainen on selvillä ilman sen kummempia selityksiä. Mutta puhtaana, »sellaisenaan», se ei ole *aistein* havaittavissa, ja empiirikon on taas turvauduttava konkreettisiin, havaintojen alueelta saatuihin kriterioihin selvittääkseen »suoran» käsitettä. Tällaisia yleisesti tunnettuja tulkintaehdotuksiahan eli »määritelmiä» on useita, ja käytännössä, esim. rakennustekniikassa, maanmittauksessa jne., ne kyllä täyttävät tehtävänsä. Eräs vähimmin karkeista sisältyy postulaattiin: »valonsäde on suora». Mutta mitä tulkintoja geometrisille käsitteille tai lauseille annetaankin: jos ne yritetään saattaa empiirisen koeteltavuuden ulottuville, päädytään aina samaan umpikujaan. Terävimmätkin huomiot ja havainnot jättävät tilaa marginaalille, alueelle jossa vallitsee ilmeinen epämääräisyys. Empiirinen todellisuus on *luonteeltaan moniselitteinen*, struktuuriltaan niinkin yksinkertaisilla sektoreilla kuin geometrisella tai fysikaalisella. Tästä seuraa, että empiirinen totuuskriterio tiettyjen rajojen välillä joutuu periaatteessa hyväksymään rajattoman määrän mahdollisia, teoreettisesti kuvailevia systeemejä, jotka struktuuriltaan ovat erilaisia. Mikäli nämä systeemit loogisessa suhteessa osoittautuvat moitteettomiksi, ei niihin kohdistuva valinta siis voi tapahtua loogisin perustein, yhtä vähän kuin se oli mahdollista empiirisen koeteltavuuden pohjalta, ja kuten edellä jo mainittiin, valinta tämän tai tuon teorian hyväksi määräytyy luonteeltaan aivan toisenlaisten näkökohtien varassa.

* * *

Tuontapaisten momenttien vaikutus kaiken tieteen kehitykseen on ollut tavaton; tyydyn tässä vain viittaamaan muutamiin yksityisseikkoihin, jotka ovat tärkeitä nimenomaan avaruuskäsityksen muovautumisen kannalta.

Olemme jo todenneet, että salimme muodostamassa näkökentässä esiintyi yhdensuuntaisia suoria. Mitä nyt tarkoitetaan attribuutilla »yhdensuuntainen»? Tuo käsite ilmeisesti pakottaa meidät etääntymään konkreettisen näkökenttämme alueelta: tuokioksi se saa meidät jättämään kaiken skeptillisen empirismin sikseen ja sen sijaan antamaan tilaa idealisoivalle, täydentävälle ja yleistävälle *geometriselle näkemykselle.* Tämän mukaisesti kuvittelemme, että oma näkökenttämme edustaa vain pientä rajoitettua osaa ideaalisesta »näkemysavaruudesta», suuresta maailmanavaruudesta, jonka ajatus varustaa geometrisillä objekteilla: pisteillä, suorilla, tasoilla jne. Kuvittelemme edelleen, että avaruus äärettömän kaukaiseen nähden on rajaton, lisäksi rajattomasti osiin jaettavissa sekä kauttaaltaan homogeeninen. *Tässä* saa käsite »yhdensuuntainen» tarkoin määrätyn merkityksensä: sellaisiksi nimitämme kahta molempiin suuntiin rajatonta suoraa, jotka ovat samassa tasossa eivätkä kohtaa toisiansa.

Tässä näkemysavaruudessa näyttävät nyt eukliidisen geometrian säännöt toteutuvan, alkaen niistä lauseista, joille jo Euklideen omassa loogisessa analyysissa on annettu ns. aksioman asema, esimerkiksi: »kahden annetun pisteen kautta voidaan asettaa suora, mutta ainoastaan yksi», tai parallelliaksioma: »suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee ainoastaan yksi sen kanssa yhdensuuntainen suora».

Näyttää siis siltä kuin geometrinen ideaalinäkemys voimakkaasti, havainnollisen selvästi puhuisi sen puolesta, että meidän olisi hyväksyttävä juuri Euklideen opit, jotka Elementa-teoksessa on kehitetty ihailtavan ankaraksi loogis-matemaattiseksi systeemiksi. Kahteen vuosituhanteen ei geometrinen tutkimus itse asiassa tuonutkaan mitään periaatteellisesti uutta Euklideen järjestelmään. Vasta viimeisten sadan vuoden kuluessa on saavutettu tuloksia, jotka toisaalta ovat oleellisesti syventäneet antiikista periytyneitä käsityksiä, toisaalta taas kumouksellisessa määrin laajentaneet geometrisen tiedon alaa eri suuntiin.

Euklideen rakennelmassa painopiste ei ole geometris-havainnollisella vaan loogis-matemaattisella alueella. Kuitenkin on ilmeistä, että antiikkinen alkeisgeometrian systeemi on kasvanut juuri sen tapaisen ideaalisen avaruusnäkemyksen varassa, josta edellä oli puhe. Eksplisiittisen formulointinsa se kuitenkin vasta kahden vuosituhannen kuluttua sai Newtonin Principia-teoksessa: näkemysavaruus on sama kuin Newtonin *absoluuttinen avaruus*, joka kauan on hallinnut fysiikkaa samoin kuin luontoa koskevaa filosofiaa. Siten se on myös antanut vakiintuneen suunnan avaruuskäsitteeseen liittyville yleisille populäärikäsityksille.

Kaiken tämän pohjalta ei ole ihmeteltävää, että Kant tietokritiikissään otaksui avaruuden a priori eukliidiseksi, »luonnostaan eukliidiseksi». Kieltämättä on näet niin, että psyykellä on luontainen *taipumus* muodostaa kuva avaruudesta »eukliidiseen tapaan».

Kuinka tämä on selitettävissä?

Empiirikko ehkä esittäisi asian näin: geometrinen ideaalinäkemys syntyy luonnollisena yleistyksenä niistä kokemuksista, jotka ihminen saa oman ympäristönsä »kiinteiden fyysillisten kappaleiden» geometrisesta käyttäytymisestä. Niinpä kyllä, mutta tämä argumentointi yksin ei kysymystä ratkaise. Sillä avaruusnäkemykselle on luonteenomaista, että se antaa meille ehdottoman *kokonaiskuvan* siitä mikä muodostaa maailmankaikkeuden, kuvan koko äärettömästä maailmanavaruudesta, jota fantasiassa voimme katsella yhtä vaivattomasti kuin jos silmiemme edessä olisi fyysillinen kuva tai kuvio mustalla taululla tai selkeä geometrinen malli. Tämän kokonaiskuvan ideaalisessa rakenteessa käyvät myös eukliidisen geometrian lauselmat ilmeisiksi, joskin ne, kuten esimerkiksi parallelliaksioma, ulottavat väitteensä koskemaan »rajattoman kaukaisia» avaruuden osia, joista meillä ei voi olla mitään »välitöntä» fyysillistä kokemusta ja joihin empiirisen koeteltavuuden vaatimus ei siis välittömästi kanna. Sillä jos kohta empiirikko lähimmästä ympäristöstään voikin osoittaa hyväksyttäviä, havaittavia »suoran» malleja, esim. valonsäteitä, ei hän pysty seuraamaan niitä rajattoman kauas avaruuteen muulla tavoin kuin ajatuksissaan, eikä hän niin muodoin voi kokemuksesta tietää miten ne käyttäytyvät näköpiirin tuolla puolen. Kuinka siis on ymmärrettävissä, että ideaalisen näkemyksen valossa geometriset mielikuvamme säilyttävät erittäin korkea-asteisen selvyytensä ja tarkkuutensa silloinkin kun ne liikkuvat havaintomaailman ulkopuolella?

Tähän voidaan vastata seuraavaa:

1) »Empiirinen todellisuus» on moniselitteinen. Mutta kaikki *käsitteenmuodostus* on pohjimmiltaan *moniselitteisen saattamista yksiselitteiseksi.* Sekä havaintojen alueella että loogisessa ajattelussa tämä tapahtuu *samastamisen* ja *idealisoinnin* tietä, osaksi jo tietoisuuden alapuolella, niin myös käytännön elämässä ja esitieteellisissä yhteyksissä sekä siitä asteittain aina eksaktin tutkimuksen subtiileimpiin tietoisiin konstruktioihin. Näkemysavaruutta voi pitää tällaisen alitajuisen psyykkisen prosessin tuloksena.

2) Moninaisuudesta yksikäsitteisyyteen voidaan päästä usealla eri tavalla. Kun on kysymyksessä yksiselitteisen kuvan, mallin tai kuvauksen muodostaminen, on suuntaa antavana psyyken ja ajatuksen taipumus tai »veto» hahmoihin ja struktuureihin, jotka ovat *yksinkertaisia* ja *harmonisia.* Jos on valittava kahden eri kuvan välillä, omaksutaan se joka hahmoltaan ja rakenteeltaan on yksinkertaisempi. Tätä periaatetta Ernst Mach on nimittänyt käsitteenmuodostuksen säästäväisyy-

denvaatimukseksi eli ekonomisuuden vaatimukseksi. Kuta kauemmaksi käytännöllisen elämän yhteyksistä asetumme, kuta korkeammalle eksaktin tieteen konstruktioihin etenemme, sitä selvemmin käy ilmi tämän prinsiipin *esteettinen* luonne. Jos tältä kannalta tarkastelemme eukliidista näkemysavaruutta, niin huomaamme, että muihin, epäeukliidisiin avaruuksiin verrattuna se kokonaisstruktuuriltaan juuri on suhteellisen yksinkertainen. Tällaiseen vertailuun ei Kantin aikoina ollut mahdollisuuksia, mutta meillä on keinot siihen, niiden edistysaskelien ansiosta, joita geometrinen tutkimus viimeisten sadan vuoden kuluessa on tehnyt.

* * *

Tällöin ajattelen lähinnä ns. epäeukliidista alkeisgeometriaa, jonka viime vuosisadan puolivälissä keksivät Lobatschevski ja Bolyai, löytö, joka on aatehistorian merkillisimpiä tapahtumia. Alkeisgeometrian tutkimuksen vanhan tradition mukaisesti ottivat nämä tutkijat juuri parallelliaksioman lähtökohdakseen. Mikä on sen looginen asema Euklideen systeemissä? Kaikki aikaisemmat yritykset todistaa parallelliaksioma muiden eukliidisten aksiomain avulla olivat ajautuneet karille, mutta tämänhän ei vielä tarvinnut merkitä etteikö todistus sittenkin olisi löydettävissä. Tällaisessa matemaattisessa selvittelyssä on tapana käyttää ns. epäsuoraa todistusmenetelmää: oletetaan että todistettava väite on väärä, ja näin saadusta antiteesistä yritetään teorian aksiomien avulla johtaa looginen ristiriita. Mikäli yritys onnistuu, tehdään johtopäätös: koska antiteesi johti ristiriitaan, on se hylättävä ja teesi, todistettava lause, näin ollen tunnustettava oikeaksi. Tämän yleisen todistusidean mukaisesti asettivat Bolyai ja Lobatschevski juuri parallelliaksioman loogisen vastaväitteen (»suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee useita sen kanssa yhdensuuntaisia suoria») antiteesiksi ja ryhtyivät johtamaan loogisia päätelmiä tästä antiteesistä sekä Euklideen muista aksiomeista. Näin saadut »seurauslauseet» muodostavat epäeukliidisen geometrian systeeman. Se poikkeaa Euklideen järjestelmästä, mutta vastoin odotuksia ei *sisäistä loogista ristiriitaisuutta* sen lauseiden kesken lainkaan ilmennyt. Niiden myöhempien oivallusten pohjalta, joihin nykyajan »aksiomaattisessa» tutkimuksessa on tultu, tiedämme nyt että epäeukliidista alkeisgeometriaa voidaan pitää loogisesti oikeana (sts. loogisesti ristiriidattomana) yhtä suurella varmuudella [1] kuin eukliidista.

Tähän ehkä sanotaan: »olkoon siis epäeukliidinen systeemi loogisesti virheetön niinkuin eukliidinenkin, mutta tästä huolimatta meidän luonnollinen geometrinen näkemyksemme vastaa juuri Euklideen systeemiä, eikä se jätä sijaa epäeukliidisen geometrian eriskummallisille väitteille».

---

[1] Tämän väitteen täsmällinen merkitys on: jos olisi mahdollista osoittaa looginen ristiriita epäeukliidisessa geometriassa, niin voitaisiin välittömästi osoittaa vastaava ristiriita myös Euklideen systeemissä, ja päin vastoin.

Tämän vastaväitteen lähempi analyysi osoittaa seuraavaa. Mitä ensin geometristen lauseiden koeteltavuuteen tulee, on minun toistettava mitä edellä on sanottu: »empiirinen todellisuus» on tietyissä rajoissa epämääräinen, eikä kokeellista verifikaatiota absoluuttisella tarkkuudella voi suorittaa. Nyt puheena olevissa geometrisissa yhteyksissä tilanne on aivan samanlainen kuin edellä mainittu, jolloin oli kysymys kannanotosta Newtonin ja Einsteinin teoriain välillä. Sillä myös eukliidisen ja epäeukliidisen geometrian järjestelmiin nähden vallitsee se omituisuus, että niiden lausumat ovat miltei yhtäpitäviä, kun kyseessä on »pienet kuviot». Euklideen mukaan on esim. kolmion kulmien summa yhtä kuin 180°, Lobatschevskin mukaan taas aina pienempi kuin 180°. Mutta poikkeama, ns. kulmadefekti, on suhteellisesti pienillä kolmioilla pieni ja jää lopulta, hyvin pienissä kuvioissa, havaintokynnyksen alapuolelle. Vasta kun mennään hyvin suuriin kolmioihin tulee defekti huomattavaksi, mutta tällöinhän voi olla kysymys jo niin valtavista kosmisista etäisyyksistä, että *suoranainen* mittaaminen ei lainkaan ole mahdollista. Kun me siis maanpinnalla, esim. geodeettisissa mittauksissa, määräämme kolmion kulmat »tähystämällä», ja hienoimpiakin mittauskojeita käyttäen tällöin todella saamme kulmasummaksi 180°, kuten Euklideen oppi vaatii, niin tämä havainto ei sulje pois epäeukliidista geometriaa. Sillä voihan olla niin, että tämän järjestelmän vaatima poikkeama maanpäällisissä, kosmisia mittoja käyttäen »äärettömän pienissä» etäisyyksissä kertakaikkiaan on niin mitätön, että se jää virherajojen sisäpuolelle. [1]

Jättäkäämme siis kysymys noiden geometristen järjestelmien empiirisestä pätevyydestä sikseen ja tarkastakaamme sen sijaan ongelmaa »ideaalisen geometrisen näkemyksen» kannalta: olihan jo puhe siitä, että se näyttää pakoittavan meidät omaksumaan juuri Euklideen opin ja siis hylkäämään epäeukliidiset käsitykset avaruuden luonteesta. Itse asiassa maallikko kai tuskin voi ajatella, että yleensä voisi olla muuta geometrista »näkemystä» kuin meihin juurtunut eukliidinen. Miten esim. havainnollisesti voisi kuvitella, että suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkisi enemmän kuin yksi sen suuntainen suora?

Mutta tämä käsitys on osoittautunut ennakkoluuloksi. Uudenaikainen geometrinen tutkimus (ennenkaikkea ns. aksiomaattinen koulu) on tälläkin suunnalla avannut uusia, odottamattomia perspektiivejä. Viime vuosisadan loppupuolella jouduttiin siten laatimaan ns. »epäeukliidisia malleja». Oikein ymmärrettyinä ne esittävät epäeukliidisen geometrian niin havainnollisesti, että nuo aluksi oudot lauseet esiintyvät yhtä ilmeisinä ja välittömästi vakuuttavina kuin »luonnolliset»

---

[1] Suuri saksalainen matematiikko Gauss suoritti noin sata vuotta sitten suuressa mittakaavassa tällaisen geodeettisen »tähystyskokeen» valosignaaleilla, ilmeisesti juuri tutkiakseen Euklideen järjestelmän empiiristä pätevyyttä. Tulos oli odotettu: kulmasumma oli 180°, niissä virherajoissa, joita tällaisissa mittauksissa pakostakin aina esiintyy.

eukliidisetkin totunnaisen eukliidisen avaruusnäkemyksen valossa. Erikoisen suggestiivisen ja yleiskatsauksellisen epäeukliidisen avaruuden mallin esitti suuri ranskalainen matemaatikko Henri Poincaré.

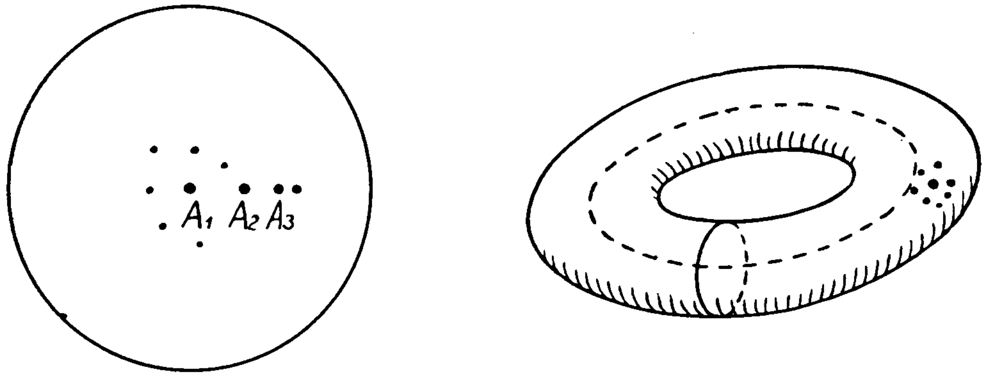
Juuri tällaisten »mallien» avulla me nykyisin voimme verrata keskenään Euklideen ja Lobatschevskin avaruuskäsityksiä, ja tuollainen vertailu osoittaa oikeutetuksi sen väitteen, minkä yllä olen esittänyt selitykseksi siitä, miksi luonnollinen »näkemys» suosii Euklideen järjestelmää. Molempien geometriojen lauseet pitävät likipitäen yhtä kun rajoitutaan hyvin pieniin paikallisiin alueisiin, mutta kun geometrinen näkemys ulotetaan käsittämään koko avaruutta, niin tämä täydentäminen tapahtuu (sekä loogillisesti että havainnollisesti) *yksinkertaisemmin* Euklideen tapaan kuin epäeukliidisesti.

* * *

Todisteeksi tämän väitteen pätevyydestä olisi välttämätöntä esittää jokin epäeukliidinen avaruusmalli, esim. Poincarén mukaan. Hänen konstruktionsa on itse asiassa helppotajuinen, se operoi ainoastaan Euklideen järjestelmän yksinkertaisilla käsitteillä, jotka ei-matemaatikkokin hyvin tuntee. Tila ei kuitenkaan salli ryhtyä tällaiseen yksityiskohtaiseen esittelyyn.

Kokonaan en kuitenkaan haluaisi sivuuttaa »mallikysymystä», ja sen vuoksi suoritan seuraavassa muutaman yksinkertaisen ajatuskokeen, siten hiukan höllentääkseni siteitä, jotka kiinnittävät näkemyksemme Euklideen ja Newtonin avaruudenkäsityksen suuntaan. Huomautin jo: ideaalisen avaruusnäkemyksen tunnusmerkkinä — ja sama koskee kaikkia »kokonaisvaltaisuuteen» pyrkiviä maailmankuvia tai ideologisia systeemejä, jotka haluavat alistaa olevaisuuden jonkin sektorin hallintaansa — on, psykologisessa katsannossa, että se luo *kokonaiskuvan,* jota tarkastelija tuntee voivansa hallita, niin sanoakseni yhdellä silmäyksellä, yleiskatsauksellisena silmänräpäyskuvana. Hän ikään kuin kohoaa todellisuuden *yli* ja katselee kuvaa ulkoapäin, ylhäältäpäin, kuten maantieteilijä tekee tarkastellessaan karttaa tai pienoismallia siitä maapallosta, jonka pinnalla hän elää.

Katsokaamme nyt tällä laillla avaruuden mallia, pientä miniatyyrimaailmaa, seuraavaan tapaan. Kuvittelemme pientä lasipalloa (joka sijaitsee meidän omassa, katselijain, avaruudessa); tämä sulkee sisäänsä joukon pieniä »taivaankappaleita», niiden joukossa kiertotähden, »maan», millä kuvitellut pienoisihmiset elävät. Ajatelkaamme edelleen, että lämpötila pallon sisällä on suhteellisesti korkea pallon keskustassa ja että se jatkuvasti, rajattomasti laskee kun lähestytään pallon pintaa. Jos pienoismaailman materia noudattaa samantapaisia lakeja kuin oma aineellinen maailmamme, niin seuraa tästä, että sen »kiinteät kappaleet» liikkuessaan tuota rajapintaa kohti supistuvat ja muuttuvat tilavuudeltaan häviävän pieniksi, kun lähestytään pallon pintaa. Näin käy silloin fingeerattujen pienoisolentojen omien ruumiidenkin ja samoin myös heidän metrimittojensa; siitä johtuen he eivät itse lainkaan huomaa tuota supistumista. Katsomme nyt pistejonoa A_1, A_2, . . .



Kuva 1

(kuva 1, vasemmalla), jotka sijaitsevat pallon säteellä ja jotka *pienoismaailman* mittojen mukaan seuraavat toisiaan yhtä suurin välein. Meidän, ulkopuolisten tarkastelijoiden silmissä nuo välit pienenemistään pienenevät, niiden lukumäärä on ääretön, ja ne ovat sitä tiheämmässä, mitä lähemmäksi ne tulevat pallonpintaa, jota ne eivät kuitenkaan koskaan saavuta. Tuo rajapinta edustaa siis pienoismaailmassa »äärettömän kaukaista», jonne ei mikään »fysikaalinen signaali» yllä, sen edetessä keskustasta ulospäin.

Minkälaiseksi muodostunee nyt tällaisen kuvitellun maailman asukkaiden avaruudennäkemys? Ei tarvitse pitkälle pohtia asiaa havaitakseen, että heidän käsityksensä pienoisavaruudestaan ei lainkaan poikkeaisi omasta käsityksestämme meidän omasta äärettömästä avaruudestamme. He harjoittaisivat omaa rajoitettua geometriaansa ja fysiikkaansa, lainkaan aavistamatta että koko heidän universuminsa on vain pieni murto-osa laajemmasta maailmanavaruudesta, jonka olemassaolosta heillä ei vajavaisin kyvyin varustettuina olisi mitään aavistusta.

Mutta mitenhän lienee meidän »todellisen» avaruutemme laita? Ehkä uuri me olemme tuollaisia vajaakykyisiä, rajoitettuja olentoja, suljettuja maailmaan, joka sisältyy osana johonkin laajempaan avaruuteen. Tätä ajatusta luonnontieteellä (tähtitieteellä ja kosmologialla) nykyisin ei ole aihetta sen vakavammin ottaa huomioon, mutta olisi toisaalta lyhytnäköistä torjua se periaatteellisena mahdottomuutena tai jonkinlaisena hullunkurisena päähänpistona.

* * *

Mutta palatkaamme hetkeksi vielä kuviteltuun pallomaiseen maailmanavaruuteen. Näimme, että sen hypoteettiset asukkaat muodostaisivat itselleen avaruusnäkemyksen, joka olisi vallan samanlainen kuin omamme. Nyt muunnan hiukan tuota maailmanmallia. Ajattelen jälleen avaruutemme suljettua osaa, jota tällä kertaa ei rajoita pallonpinta vaan ns. torus, rengaspinta, auton pyöränrenkaan muotoinen (kuvio 1, oikealla; sen pisteet osoittavat kuviteltuja »taivaankappaleita»). Kuten aikaisemmassa tapauksessa, niin tämän »rengasmaailmankin» sisällä oletamme lämpötilan rajatta alenevan, kun sen sisäpuolelta lähestytään renkaan rajapintaa. Siten tässäkin pienoismaailmassa voitaisiin havaita samanlaista supistumista kuin pallomallissa, kappaleen liikkuessa rajapintaa kohti. Tämä pinta esittäisi sen vuoksi rengasavaruuden asukkaille jälleen »äärettömän kaukaisen» osaa.

Sitävastoin rengasmaailman geometrinen struktuuri poikkeaa aikaisemman kuvitelmamme pallomaailmasta seuraavassa suhteessa. »Eukliidisessä» avaruudessa, samoin kuin ensimmäisessä pallomallissakin, voidaan jokainen *suljettu* viiva avaruuden sisällä jatkuvasti supistaa pisteeksi. Torusavaruudessa näin ei enää aina ole laita. Tarkastakaamme näet suljettua käyrää, silmukkaa, jota kuvion pisteviiva osoittaa; kuvittelemme havainnollisuuden vuoksi että se olisi tehty jostakin kimmoisasta, kumimaisesta aineesta, jota voidaan jatkuvasti mielinmäärin venyttää ja supistaa. Miten silmukkaa näin käsitelläänkin (kuitenkaan sitä repimättä poikki), niin ilmeisesti sitä ei renkaan sisällä voi supistaa siten, että se lopulta joutuisi sijaitsemaan jonkin annetun pisteen lähimmässä, pienessä ympäristössä toruksen sisällä — päinvastoin kuin pallomallissa, missä tuollainen supistaminen aina on mahdollinen. Käyttämällä sanontaa, joka on tavallinen siinä uudenaikaisessa geometriantutkimuksen haarassa, missä tutkitaan juuri jatkuvien deformatioiden suhteen muuttumattomia, invariantteja avaruuden ominaisuuksia, sanotaan, että näillä kahdella avaruusmallilla on erilainen *topologinen* rakenne.

Koetamme nyt asettua hypoteettisen rengasmaailman asukkaan tilaan, joka elää erään kiertotähden, rengasmaailman »maan» pinnalla. Minkälaiseksi hänen avaruuskäsityksensä muodostunee? Saisiko hän vihiä rengasavaruuden »rengasmaisuudesta» (joka meille, ulkopuolisille tarkastelijoille, on evidentti) ja tulisiko hänen avaruuskäsityksensä yllämainitussa »topologisessa» suhteessa siis poikkeamaan omastamme? Tähän kysymykseen ei ilman muuta voi vastata. Vastauksen laatu tulee riippumaan siitä, mitä oletamme hypoteettisten olioiden fysikaalisten kokemusten laajuudesta.

Olettakaamme hetkeksi tässä suhteessa seuraavaa. Rengasmaailman materia, sen planeetat, tähdet, nebuloosat, sijaitkoot »maan» ympäristössä, joka verrattuna koko renkaan tilavuuteen on suhteellisen pieni, kuten kuviossa on osoitettu (tähtiä osoittavat pisteet ovat kuvion oikealla puolella ja ne voidaan sulkea pieneen palloon, joka vuorostaan on renkaan sisäpuolella). Tällä edellytyksellä rengasmaailman tähtitieteilijät, jotka »maan» pinnalla eläen yrittävät tutkia avaruuden luonnetta, varmaankin muodostaisivat aivan samanlaisen avaruuden kuvan kuin me teemme omassa avaruudessamme: hekin »näkisivät» avaruuden Euklideen tapaan. Eihän heillä olisi mitään aihetta ajatella, että avaruus täydennettynä kokonaiskuvaksi »taipuisi» renkaaksi, kuvion osoittamalla tavalla; yksinkertaisuuden, säästäväisyyden yleisen periaatteen mukaan he epäilemättä suorittaisivat avaruuden »jatkamisen» juuri kuten me teemme. Eukliidinen topologinen struktuuri on yksinkertaisempi kuin rengasmaisen avaruuden, ja siitä syystä »näkemyskin» helpoimmin suorittaa ideaaliset konstruktionsa edellisen struktuurin mukaisella tavalla.

* * *

Myös edellinen, fingeerattua rengasmaailmaa ja sen asukkaita koskeva ajatuskoe soveltuu omaan avaruuteemme ja omaan avaruudenkäsitykseemme. Itse teossa tutkimus Einsteinin yleisen suhteellisuusteorian vaikutuksesta on joutunut perinpohjaisesti uudelleen arvioimaan kysymystä avaruutemme topologisesta ja metrisestä luonteesta. Einsteinin gravitaatioteorian mukaan maailmanavaruus topologisissa suhteissa ei ole eukliidinen, kuten Newton oli opettanut, se ei edes ole »ääretön», vaan se on »äärellinen» ja »suljettu», vaikkakin »rajaton».

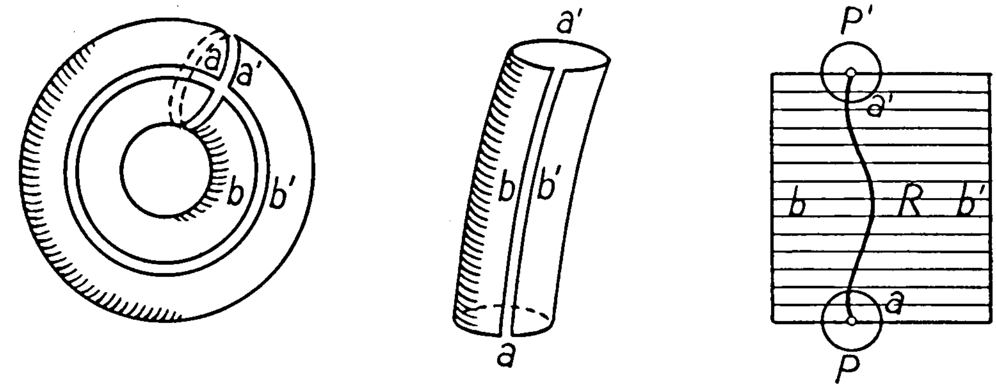
Tällaista puhetta maallikon ei varmaankaan ole miellyttävä kuunnella. Ajatuskokeen avulla yritän nyt selvitellä eräitä näkökohtia, jotka ehkä voivat edistää asian oikeaa ymmärtämistä.

Selittääkseen, miten voidaan käsittää suljettu, rajaton avaruus, on popularisoiva tieteellinen kirjallisuus (näin on Einsteinkin menetellyt eräissä helppotajuisiksi tarkoitetuissa suhteellisuusteorian esityksissä) vedonnut tällaisen avaruuden *kaksiulotteiseen* vastineeseen, nimittäin kolmiulotteisen pallon kaksiulotteiseen pintaan. Tämä pinta on äärellinen, suljettu, mutta sillä voidaan rajatta liikkua, pinta on rajaton. Jos nyt kuvittelemme pallonpinnalla liikkuvia kaksiulotteisia »pintaolioita», niin he juuri elävät avaruudessa (se on tällä kertaa: pinnalla), jonka topologinen luonne on analoginen sen kanssa mikä Einsteinin gravitaatioteorian mukaan kuuluu meidän avaruudellemme.

Mutta onhan oma avaruutemme kolmiulotteinen, ei kaksiulotteinen kuten pallonpinta. Miten siis voidaan kuvitella havainnollista *kolmi*ulotteista avaruusmallia, jossa vallitsisivat vastaavat olosuhteet kuin pallon pinnalla? Vaikeus siirryttäessä kahdesta ulottuvaisuudesta kolmeen on seuraava: kaksiulotteinen pallonpinta on meille välittömän havainnollisesti tajuttava, koska se on osana tutussa kolmiulotteisessa avaruudessamme. Analogisesti olisi siis kuviteltava kolmiulotteisen suljetun avaruuden sijaitsevan korkeamman, neliulotteisen avaruuden osana. Tällainen neliulotteinen avaruus voidaan kyllä matemaattisen analyysin keinoin täysin hallita, mutta välitöntä geometrista havaintoa meillä ei siitä ole. Sen vuoksi näyttää ehkä turhalta yrittää havainnollisesti käsittää puhetta suljetusta, äärellisestä *kolmi*ulotteisesta avaruudesta.

* * *

Näin ei kuitenkaan tarvitse olla, ja sitä myös seuraavat tarkastelut pyrkivät osoittamaan. Sopivaksi lähtökohdaksi otan tällöin aluksi kaksiulotteisen avaruus-



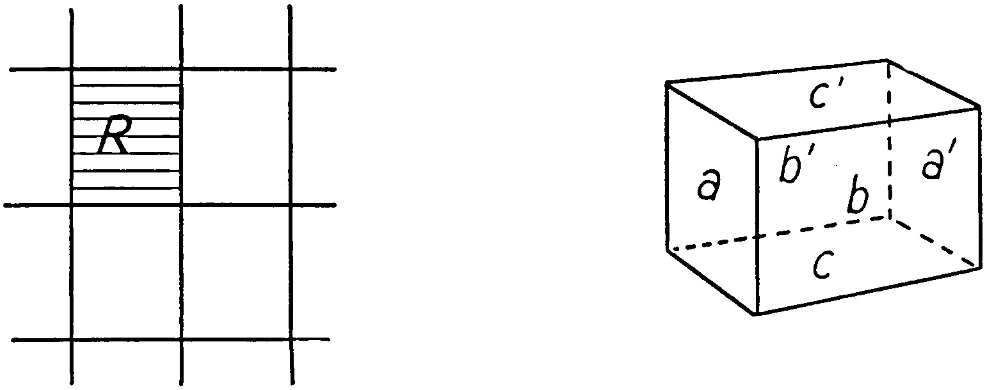
Kuva 2

mallin, mutta tällä kertaa en lähde pallon, vaan (mikä kysymykseni kannalta on tarkoituksenmukaisempaa) *rengaspinnasta*, mikä sekin on äärellinen, suljettu, mutta »rajaton», aivan kuin pallonpinta. Voidaksemme eläytyä kuviteltujen rengaspinnalla elävien pinta-olioiden geometrisiin käsityksiin, yritämme abstrahoida siitä, että rengaspinta on ympäröivän kolmiulotteisen avaruutemme osana, mistä hypoteettisilla pintaolioilla ei ole mitään havainnollista tietoa, koskapa heiltä puuttuu »kolmas ulottuvaisuus», joka heille on yhtä arvoituksellinen kuin neljäs dimensio meille.

Tätä tarkoitusta varten käytän menettelyä, joka topologisessa geometriantutkimuksessa näyttelee tärkeää osaa. Ajattelemme rengaspinnan leikatuksi auki pitkin »leveysympyrää» a, kuten kuvio 2 osoittaa. Siten muodostuu lieriömäinen pinta, jota rajoittaa kaksi ympyrää a ja a', vastaten leikkauksen a molempia reunoja (keskikuvio 2). Nyt leikataan lieriö edelleen auki pitkin emäviivaa b, jota rengaspinnalla vastaa »meridiaanin» eli »pituusympyrän» b kaksi reunaa (b ja b'). Näin aukileikattu lieriöpinta levitetään nyt tasoon, jolloin siitä muodostuu suorakulmion muotoinen »matto» R (kuvio 2, oikealla). Kaksi paria vastakkaisia sivuja (a, a' ja b, b') vastaavat siinä leveys- ja pituusympyrän kahta reunaa rengaspinnalla. Tämä suljettu pinta voidaan kääntäen jälleen muodostaa, niin että ensin »maton» sivuviivat a ja a', sitten sivuviivat b ja b' liimataan yhteen.

Täydennän tämän jälkeen vielä tasokuviota R siirtämällä sitä yhä uudelleen pystysuoraan ja vaakasuoraan suuntaan sivujen a ja b verran. Näin muodostuu tasoon verkko, jonka silmukat ovat R:n kanssa yhteneväisiä suorakulmioita (kuvio 3, vasemmalla).

Ajattelen nyt rengaspintaoliot siirretyiksi vastaavaan suorakulmioon. Tällainen olio matkustakoon nyt tuossa tasotetussa suorakulmioverkostossa. Lähteköön hän paikasta P sivulla a ja liikkukoon hän yli koko pinnan R kunnes hän saapuu pisteeseen P' vastakkaisella sivulla a' (kuvio 2). Olettakaamme nyt, että kaikki ne paikalliset, geometriset olosuhteet, mitkä hän tapaa tulopaikkansa P' lähiympäris-



Kuva 3

tössä, ovat täsmälleen samanlaiset kuin ne, mitkä hän havaitsi lähtöpaikan P ympäristössä, kun hän poistui sieltä. Miten hän silloin tulkitsee tämän kokemuksensa? Ilmeisesti hän ei voi ajatella muuta kuin että hän tullessaan P'-pisteeseen, on *palannut* lähtöpaikkaansa P. »Näkemyksessään» hän siten on identifioinut pisteet P ja P' ja niiden lähiympäristöt (joita pienet ympyrälevyt kuviossa 2 osoittavat). Vastaavan samastamisen suoritamme esim. seuraavassa tapauksessa: poistun hetkeksi salista, jossa nyt olen, palaan takaisin vähän myöhemmin ja havaitsen tällöin salissa vallitsevan täsmälleen saman järjestyksen kuin aikaisemmin lähtiessäni. Tämän kokemusteni invarianssin minä silloin niinsanoakseni projisioin ulkopuolelleni, näen siinä *salin* ominaisuuden ja sanon: olen palannut takaisin samaan paikkaan, josta äsken lähdin.

Jos nyt suorakulmioverkon matkustaja, joka tällä kertaa kulkekoon vaakasuoraan yli suorakulmion R, lähtien sivulta b ja saapuen vastaavaan pisteeseen sivulla b', kokee samanlaisen elämyksen (paikalliset olosuhteet sivulla b' ovat samat kuin sivulla b), niin hän samastaa myös sivut b ja b'. Näin on »suorakulmiomaailma» R sulkeutunut äärelliseksi, mutta »rajattomaksi» pinnaksi, jolla on rengaspinnan topologinen rakenne. Sillä juuri samalla tavalla, kuin me äsken liimaamalla yhteen sivut a ja a' sekä sivut b ja b' suorakulmiosta R muodostimme rengaspinnan, juuri samoin menettelee äskeinen matkustajamme: tosin hän ei tuota »yhteenliimaamista» suorita konkreettisena fyysisenä prosessina, vaan sen hän tekee »abstraktisesti», omassa havainnollisessa näkemyksessään.

Se mikä edellä ajatuskokeena on suoritettu kuvitellussa kaksidimensionaalisessa pintamaailmassa, sen me nyt vaikeuksitta voimme tehdä omassa kolmiulotteisessa eukliidisessä avaruudessamme. Tarkastan sitä varten suorakulmion R asemesta kolmiulotteista suorakulmaista särmiötä R, laatikon muotoista kappaletta, siis sellaista jota salimme edustaa. Merkitsen sen kahta vastakkaista seinäparia a, a' ja b, b', lattia olkoon c ja katto c' (kuvio 3, oikealla). Kuten suorakulmion tapauksessa, niin nytkin ajattelemme tämän salimme siirtyvän yhä uusiin asemiin leveys-, pituus- ja korkeussuuntaan. Avaruutemme täyttää tällöin kolmiulotteinen »saliverkko», jonka yhtenä soluna sali R on.

Nyt ajattelen, että salimme on hyvin suuri, niin että »näkökenttämme» ulottuu vain hyvin pieneen saliavaruuden-osaan; emme siis voi toiselta seinältä nähdä vastakkaista. Lähden nyt kulkemaan takaseinältä a salin poikki ja saavun jonkin ajan kuluttua salin vastakkaiselle seinälle a'. Jälleen kuvittelen, että siellä, katsoessani ympärilleni (taakseni saliin R, eteeni seinän a' toiselle puolelle, siellä aukenevaan saliin) tapaisin asiat täysin samassa järjestyksessä kuin mihin ne jätin lähtiessäni seinältä a. Sen mukaan mitä yllä on esitetty, samastan silloin a'-seinän a-seinän kanssa: käsitän tulleeni takaisin lähtöpaikkaani. Kuvitelkaamme nyt, että samankaltainen paikanilmiöiden »jaksollisuus» eli »invarianssi» vallitsisi myös seinien b ja b' lähiympäristöissä ja samoin pystysuoraan suuntaan, lattian c ja katon c' välillä. Silloin joudun niihin nähden toimittamaan vastaavan samastuksen: identifioin keskenään sivupinnat a ja a', samoin sivupinnat b ja b' ja vielä sivupinnat c ja c'. Näin on saliavaruudesta R muodostunut äärellinen, mutta »rajaton» kolmiulotteinen avaruus. Tässä meillä on havainnollinen malli »maailmanavaruudesta», jolla tosin ei ole aivan sama topologinen (»sfäärinen») rakenne kuin se, minkä Einstein olettaa vallitsevan »todellista» avaruuttamme, mutta jolla kuitenkin on juuri ne ominaisuudet (»äärellinen», »suljettu», »rajaton»), joiden havainnollista sisällystä edellä olen tahtonut selvittää. [1]

* * *

Kun edellisessä esityksessäni on ollut puhe erilaisista avaruudenkäsityksistä, niin olen kiinnittänyt päähuomion asian havainnolliseen puoleen, siis siihen, mitkä avaruuden toisaalta »empiiriset» toisaalta »geometrisnäkemykselliset» ominaisuudet ovat. Syrjemmälle sen sijaan on jäänyt avaruuden käsityksiin liittyvä matemaattis-looginen problematiikka, vaikka sitäkin pakosta jossain määrin olen joutunut sivuamaan. Itse asiassa onkin niin, että geometria luonnontieteenä ja geometria »puhtaana» matemaattisena teoriana kohta kohdalta kietoutuvat toisiinsa monimutkaisella ja vaikeasti tajuttavalla tavalla. Vaikka niitä siis ei tarkoin voi irroittaa tai erottaa toisistaan, voi ehkä väittää, että tutkimuksen edetessä rajankäynti näiden molempien puolien välillä kuitenkin on saanut yhä selvemmät piirteet. Todellista läpimurtoa yhtä hyvin matemaattisessa kuin tietoteoreettisessa suhteessa merkitsivät tässä yhteydessä ne uudet oivallukset, joihin moderni aksiomaattinen perustutkimus on johtanut; ensi sijassa on tällöin mainittava Hilbertin

[1] Einsteinin opin pohjalta on kosmologiassa viime aikoina kehitetty joukko uusia teorioja. Niiden yhteisenä piirteenä on, että yleisen suhteellisuusteorian edellyttämä avaruus, jonka Einstein oletti stabiiliksi, mittasuhteiltaan muuttumattomaksi, tietyistä syistä katsotaan muuttuvaiseksi, siten että avaruus joka suuntaan jatkuvasti laajenee.

uraa uurtavat tutkimukset geometrian perusteista, vuosisadan vaihteessa. Edeltävä kausi, erikoisesti epäeukliidisen alkeisgeometrian keksiminen, oli valmistanut maaperää niille oivalluksille, jotka tällöin saivat selkeän muodon.

Tämä merkitsi myös kumousta geometriaan liittyvien »näkemysten» alueella. Aksiomaattisina, ankarassa mielessä matemaattisina systeemeinä esim. alkeisgeometrian järjestelmät (Euklideen, Lobatschevskin jne.) kyllä edelleenkin käsittelevät sellaisia »geometrisia» olioita kuin »piste», »suora» jne., sekä niiden välisiä suhteita (»piste on suoralla», »kahden suoran yhdensuuntaisuus» jne.), mutta geometrian järjestelmän loogisen, matemaattisen pätevyyden kannalta ei enää ole lainkaan tärkeää tai oleellista, että ne havainnollisesti tai näkemyksellisesti varustetaan »geometrisilla kvaliteeteilla»; ei siis tarvitse ajatella pistettä »pistemäiseksi», ei suoraa »suoruuden näkemyksen» mukaisesti suoraksi, vaan nämä geometriset objektit saattavat nyt merkitä mitä abstraktisia »olioita» hyvänsä. Samoin geometriset suhteet nyt, paljon yleisemmin, käsitetään loogisiksi relaatioiksi, joihin ei enää liitetä mitään olennaisesti geometrisia havainnollisia laatuja. Niin pian kuin on asetettu näitä perusolioita ja perussuhteita säännöstelevät perussäännöt (»aksiomat»), on teoria kiinnitetty, ja matemaattisen deduktion tehtävänä on tältä pohjalta kehittää järjestelmän lauseet (»teoreemat»), jotka eksplisiittisessä muodossa osoittavat, mitä annettuun teoriaan (sen aksiomajärjestelmään) implisiittisesti sisältyy.

Vain tältä abstraktiselta pohjalta lähtien on mahdollista selvästi hallita geometrian käsitteellinen, looginen struktuuri. Tämä prosessi tosin on tapahtunut niin sanoakseni geometristen käsitteiden ja siis myös »luonnollisen», olennaisesti geometrisen avaruusnäkemyksen kustannuksella. Mutta sekä tietoteoreettiselta että teorian käytännöllisten sovellutusten kannalta on merkillistä, että tuo alkumenetys teorian eräissä myöhemmissä vaiheissa tulee runsaasti korvatuksi. Sillä vasta sen jälkeen kun geometria on tiivistetty loogisesti täysin läpivalaistun abstraktisen teorian muotoon, voidaan sen sisältämiä oivalluksia *vapaasti* käyttää ns. sovellutuksissa. Kun siinä esiintyville käsitteille jälleen annetaan konkreettisia tulkintoja, niin näitä vastineita voi löytää hyvin monelta alueelta, eikä ainoastaan alkuperäisen geometrisen havaintomaailman piiristä, josta teoria kyllä alkuaan oli lähtöisin. Niin se tieto, mikä on koottuna johonkin geometriseen, *loogiseen* järjestelmään, sopivasti »uudelleen tulkittuna» voi johtaa arvaamattomiin uusiin oivalluksiin, sellaisissakin yhteyksissä, joihin sinänsä, kun ne välittömästi tai havainnollisesti koetaan, aluksi ei ole voitu liittää minkäänlaisia »geometrisia» laatuja. Näin on meidän vuosisadallamme yllättävästi tapahtunut nimenomaan fysiikan alalla; tämän tieteen viimeaikaista valtavaa kehitystä voidaankin lyhyesti luonnehtia sanonnalla, että fysiikka yhä suuremmassa laajuudessa on »muuttumassa geometriaksi».

* * *