

*K. Herra Professori
Hj. Tällqvist
Kunnioittaen
Tekijä*

ENSIMMÄISEN LAJIN
ELLIPTISEN INTEGRALIN KÄÄNTEIS-
FUNKTION YKSIKÄSITTEISYYS

VILHO VÄISÄLÄ

HELSINKI 1917

ENSIMMÄISEN LAJIN
ELLIPTISEN INTEGRALIN KÄÄNTEIS-
FUNKTION YKSIKÄSITTEISYYS

VILHO VÄISÄLÄ

*Suomen Aleksanterin-Yliopiston Filosofisen Tiedekunnan suostumuksella
esitetään tämä väitöskirja toukokuun 26 päivänä 1917 k:lo 10 e.p.p.
julkisesti tarkastettavaksi juridisessa oppisalissa.*

HELSINKI 1917

Joensuun yliopisto
Matematiikan laitos

HELSINKI 1917
KIRJAPAINO-OSAKEYHTIÖ SANA

Seuraavassa esitetään erilaisia menettelytapoja, joita on käytetty ensimmäisen lajin elliptisen integralin käänteisfunktion koko tasossa olemassaolon, yksikäsitteisyyden ja rationali-
luonteisuuden todistamiseksi. Tarkoituksena on ollut saada todistukset ajatuksellisesti puhtaiksi, yksityiskohtaisiksi ja mahdollisimman sitoviksi. Eri keinoja niissä käytettyihin periaatteisiin nähden on vertailtu toisiinsa. — Viittaukset koskevat yksinomaan täällä saatavana olevaa kirjallisuutta, jonka tähden kirjallisuusluettelo on hyvin puutteellinen.

Arvoisalle opettajalleni professori ERNST LINDELÖF'ille lausun hartaan kiitokseni aiheen valinnasta sekä työn kestäessä saamastani vapumattomasta ohjauksesta.

Tekijä.

Johdanto.

Riemannin pinnan funktioista ja integraleista.

1. Funktio

$$s = \sqrt{f(z)},$$

jossa $f(z)$ on 3. tahi 4. asteen polynomi, jonka juuret ovat keskenään erisuuret, on yksikäsitteinen nelikiertopisteisellä, kaksilehtisellä Riemannin pinnalla. Kiertopisteitä ovat $f(z)$:n nollapisteet, sekä 3. asteen tapauksessa myös ∞ .

Etteivät nämä molemmat tapaukset oleellisesti eroa toisistaan, sen huomaa kuvaamalla vastaavat Riemannin pinnat stereografisen projektion kautta kaksinkertaiselle pallolle, tahi palauttamalla toisen tapauksen toiseksi linearimuunnoksen avulla. Siksi seuraavassa tarkastelemme vain sitä tapausta, jolloin $f(z)$ on 4. asteen polynomi.

2. *Riemannin pinnan rationalifunktiolla* tarkotamme z :n ja s :n rationalifunktiota. Jokainen tällainen funktio voidaan kirjoittaa muotoon

$$(1) \quad R(z, s) = \frac{P_1(z) + s P_2(z)}{P_3(z)},$$

jossa P_1, P_2, P_3 ovat z :n polynomeja ilman yhteistä juurta. Riemannin pinnan pisteen merkinä käytetään (z, s) , jolloin samalla kohdalla toisessa lehdessä oleva piste on $(z, -s)$.

Saadaksemme Riemannin pinnan erilaisten pisteiden käsitteilyn keskenään yhdenmuotoiseksi, kuvaamme aina tutkittavan pisteen ympäristön kääntäen yksikäsitteisesti yksinkertaisesti peitetylle alueelle origon ympäristöön. Kuvauksen suorittaa

- 1° tavallisessa pisteessä (z_0, s_0) muunnos $t = z - z_0$,
 2° kiertopisteessä a „ $t = \sqrt{z-a}$,
 3° äärettömyyspisteessä „ $t = \frac{1}{z}$.

(3)

Muuttujaa t nimitetään vastaavaan pisteeseen kuuluvaksi Riemannin pinnan säännöllistäjäksi.

(4)

Nyt määrittelemme:

Funktio sanotaan säännölliseksi eräässä Riemannin pinnan pisteessä, jos se siihen kuuluvan säännöllistäjän funktiona on t -tason origossa säännöllinen analyttinen funktio. Samoin sanotaan piste n -kertaiseksi nolla- tahi napapisteeksi aina sen mukaan, onko origo vastaavan säännöllistäjän funktiolla n -kertaisena nolla- vaiko napapisteenä.

kie
ku
nä
yl
sa

Tämä määritelmä soveltuu siten kaikkiin Riemannin pinnan pisteisiin.

ju
t-

Esitämme heti s :n ja lausekkeen $s \frac{dt}{dz}$ säännöllistäjän potenssisarjoina. Olkoon

$$\begin{aligned}
 s^2 = f(z) &= a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4 \\
 &= a_0 (z - a_0) (z - a_1) (z - a_2) (z - a_3).
 \end{aligned}$$

s
e
n

Saamme silloin eri tapauksissa seuraavat kehitelmät:

$$1^\circ \quad z - z_0 = t, \quad \frac{dz}{dt} = 1,$$

$$(3) \quad s = s_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} t + \dots \right),$$

$$(4) \quad s \frac{dt}{dz} = s_0 (1 + [t]);$$

$$2^\circ \quad z - a = t^2, \quad \frac{dz}{dt} = 2t,$$

$$(3) \quad s = t \sqrt{f'(a)} \left(1 + \frac{1}{4} \frac{f''(a)}{f'(a)} t^2 + \dots \right),$$

$$(4) \quad s \frac{dt}{dz} = \frac{1}{2} \sqrt{f'(a)} (1 + [t^2]);$$

$$3^{\circ} \quad z = t^{-1}, \quad \frac{dz}{dt} = -t^{-2},$$

$$(3) \quad s = t^{-2} \sqrt{a_0} \left(1 + \frac{2a_1}{a_0} t + \dots \right),$$

$$(4) \quad s \frac{dt}{dz} = -\sqrt{a_0} (1 + [t]).$$

sillä on tämän mukaan neljä yksinkertaista nollapistettä, nim. kiertopisteet, ja kaksi kaksinkertaista napapistettä, nim. pinnan kummankin lehden ∞ . Riemannin pinnan pisteen merkitsemiseen nähden lisäämme tässä, että kiertopiste merkitään joko $(a, 0)$ tahi lyhyesti a , ja että ∞ -pisteen merkinä käytetään; tarkottaessamme määrättyä pinnan lehteä, $(\infty, \sqrt{a_0})$, jossa $\sqrt{a_0}$ on raja-arvo

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{s}{z^2}$$

juuri siinä lehdessä, joka on kysymyksessä. — Lauseke $s \frac{dt}{dz}$ on t -tason origossa aina säännöllinen ja $\neq 0$.

3. Kun rationalifunktion lausekkeessa (1) eri tapauksissa suoritetaan sarjakehitelmä t :n potenssien mukaan, niin huomataan, että Riemannin pinnan rationalifunktiolla on vain äärellinen määrä erikoispisteitä ja ovat ne kaikki napoja.

Tämän käänteisväittämä on myös voimassa:

Jokainen funktio, joka on yksikäsitteinen Riemannin pinnalla ja jonka kaikki erikoispisteet ovat napoja, on pinnan rationalifunktio.

Sillä jos v on tällainen funktio, niin on sillä, tarkastettuna z -tasossa, kaksi eri haaraa v_1 ja v_2 . Funktio

$$\varphi = v_1 + v_2$$

on silloin z :n yksikäsitteinen funktio, mutta funktio $v_1 - v_2$ kaksiarvoinen ja pariton, samoin kuin s . Funktio

$$\psi = \frac{v_1 - v_2}{s}$$

on niin ollen z :n yksikäsitteinen funktio. Sarjakehitelmän avulla huomataan, että ainoat mahdolliset φ :n ja ψ :n erikoispisteet ovat

napoja. Siis ovat φ ja ψ tunnetun väittämän mukaan z :n rationalifunktioita. Ratkaisemalla edellä olevat yhtälöt esim. v_1 :n suhteen saadaan

$$v_1 = \frac{1}{2} \left(\varphi(z) + s \psi(z) \right),$$

joka määritelmän mukaan on pinnan rationalifunktio.

Pinnan rationalifunktion (*kokonais-*)kertaluvulla tarkotamme sen kaikkien napapisteiden kertalukujen summaa.

Rationalifunktiolla on yhtä monta nollapistettä kuin napapistettä. Yleisesti: Rationalifunktio saa jokaisen arvon niin monta kertaa kuin sen kertaluku ilmaisee.

Olkoon $R(z, s)$ pinnan rationalifunktio. Väittämän todistus palautetaan vastaavaan yksinkertaisen tason väittämään tarkastelemalla funktiota

$$r(z) = R(z, s) R(z, -s).$$

Tämä todistetaan z :n rationalifunktioksi samoin kuin $v_1 + v_2$ edellisessä väittämässä.

Olkoon R :llä Riemannin pinnan tavallisessa pisteessä (z_0, s_0) tahi ∞ -pisteessä sarjakehitelmä

$$R(z, s) = a_0 t^m (1 + a_1 t + \dots), \quad a_0 \neq 0.$$

Aina sen mukaan, onko kertaluku m positiivinen, nolla vai negatiivinen, on piste (z_0, s_0) R :n nolla-, neutrali- tahi napapiste. Olkoon samaten pisteessä $(z_0, -s_0)$

$$R(z, s) = b_0 t^n (1 + b_1 t + \dots), \quad b_0 \neq 0.$$

Näistä sarjoista saadaan

$$r(z) = a_0 b_0 t^{m+n} (1 + c_1 t + \dots), \quad a_0 b_0 \neq 0,$$

mikä osoittaa, että r :n kertaluku pisteessä z_0 on sama kuin pisteissä (z_0, s_0) ja $(z_0, -s_0)$ olevain R :n kertalukujen summa.

Kiertopisteessä a olkoon

$$R(z, s) = a_0 t^m (1 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots), \quad a_0 \neq 0, \quad t = \sqrt{z - a}.$$

Tästä saadaan

$$R(z, -s) = a_0 (-t)^m (1 - a_1 t + a_2 t^2 - \dots)$$

ja edelleen

$$r(z) = (-1)^m a_0^2 (z - \alpha)^m [1 + (2a_2 - a_1^2)(z - \alpha) + \dots].$$

r :n kertaluku on siis kiertopisteessä sama kuin R :n.

Näistä seikoista johtuu, että R :n kaikkien Riemannin pinnan pisteisiin kuuluvien kertalukujen summa, joka on sama kuin nolla- ja napapisteiden kertalukujen erotus, on yhtä suuri kuin r :n kertalukujen summa z -tasolla, joka summa on nolla.

Seurauksena tästä väittämästä saadaan että *kaikkialla äärellinen rationalifunktio on vakio.*

4. Riemannin pinnalla ei ole olemassa ensimmäisen kertaluvun rationalifunktiota.

Tämän perusväittämän todistusta varten tarvitsemme seuraavan napapisteitä koskevan apuväittämän:

Olkkoon

$$R = \frac{P_1 + s P_2}{P_3}$$

Riemannin pinnan rationalifunktio, jossa polynomeilla P_1, P_2, P_3 ei ole yhteistä nollapistettä.

Jos Riemannin pinnan tavallinen piste on P_3 :n k -kertainen nollapiste, niin johtuu siitä ainakin yksi k -kertainen napa R :lle.

Jos kiertopiste on P_3 :n k -kertainen nollapiste, niin on se $2k$ -tahi $(2k - 1)$ -kertainen R :n napa.

Kun P_1 :n, P_2 :n ja P_3 :n asteluvut ovat k_1, k_2 ja k_3 , ja kun n merkitsee suurempaa luvuista k_1 ja $k_2 + 2$, niin on ainakin toinen Riemannin pinnan ∞ -piste R :n $(n - k_3)$ -kertainen napa, jos $n > k_3$.

1° P_3 :n k -kertainen nollapiste on z_0 , joka ei ole kiertopiste. Ellei kumpikaan z_0 :ssa olevista pinnan pisteistä (z_0, s_0) ja $(z_0, -s_0)$ olisi R :n k -kertainen napa, niin olisi R :n osottaja molemmissa nolla:

$$P_1(z_0) + s_0 P_2(z_0) = 0.$$

$$P_1(z_0) - s_0 P_2(z_0) = 0.$$

Koska $s_0 \neq 0$, niin olisi $P_1(z_0) = P_2(z_0) = 0$. Mutta silloin olisikin polynomeilla P_1, P_2, P_3 yhteinen nollapiste z_0 vastoin olettamusta.

2° Jos kiertopiste a on k -kertainen polynomin P_3 nollapiste ε -tasossa, niin Riemannin pinnan kiertopisteenä on se $2k$ -kertainen nollapiste. Jos osottaja tässä pisteessä on $\neq 0$, niin on siinä R :llä $2k$ -kertainen napa. Jos sitävastoin

$$P_1(a) + s(a) P_2(a) = 0,$$

niin on, koska $s(a) = 0$, myös $P_1(a) = 0$ ja siis $P_2(a) \neq 0$. Tulolla $s P_2$ on niin ollen 1-kertainen nollapiste a :ssa, kun taas P_1 :llä on 2-kertainen. R :n osottajalla on siten piste a 1-kertaisena nollapisteenä. Koska se oli nimittäjän $2k$ -kertainen nollapiste, niin on se R :n $(2k - 1)$ -kertainen napa.

3° Polynomien P_1, P_2, P_3 asteluvut ilmaisevat, kuinka monikertainen napa kullakin polynomilla on ∞ :ssä. Koska s :llä on Riemannin pinnan kumpaisessakin ∞ -pisteessä 2-kertainen napa, niin on niissä $s P_2$:lla $(k_2 + 2)$ -kertainen napa. Jos k_1 ja $k_2 + 2$ ovat erisuuret, niin olkoon suurempi niistä n . Osottajalla on silloin kummassakin ∞ -pisteessä n -kertainen napa. Jos $k_1 = k_2 + 2 = n$, niin olkoot ensimmäiset termit P_1 :n ja $s P_2$:n sarjakehitelmissä pinnan ∞ -pisteissä az^n ja $\pm bz^n$, jossa merkki erottaa pinnan eri lehdet sekä a ja b ovat $\neq 0$. R :n lausekkeen osottajan kehitelmän ensimmäinen termi on siis eri lehdissä

$$(a + b)z^n \text{ ja } (a - b)z^n.$$

Koska a ja b ovat $\neq 0$, niin ainakin toinen luvuista $a + b$ ja $a - b$ on $\neq 0$, josta seuraa, että ainakin toinen ∞ on osottajan n -kertainen napa.

Jos nyt $n > k_3$, niin on ainakin toisessa pinnan ∞ -pisteessä R :llä napa, ja on sen kertaluku $n - k_3$.

Tämän apuväittämän nojalla todistamme nyt pääväittämän epäsuorasti. Oletamme siis, että on olemassa 1. kertaluvun rationalifunktio Riemannin pinnalla, ja kirjoitamme sen muotoon

$$R = \frac{P_1 + s P_2}{P_3}.$$

Ensiksi huomautamme, ettei P_2 ole identtisesti nolla. Jos

näet P_2 olisi nolla, niin olisi R :llä, z :n rationalifunktiona, ainakin yksi napapiste z -tasossa, ja Riemannin pinnalla siis vähintään kaksi.

Jos nyt R :n ainoa napa on äärellinen piste, niin apuväittämän kahden ensimmäisen osan mukaan se on P_3 :n ainoa nollapiste, vieläpä yksinkertainen, joten P_3 :n asteluku $= 1$. Koska sen lisäksi P_2 on eri suuri kuin nolla, niin apuväittämän viimeisen osan mukaan on R :llä ∞ :ssä toinen napapiste, vastoin olettamusta.

Jos R :n napapiste on Riemannin pinnan jommankumman lehden ∞ -piste, niin apuväittämän kahden ensimmäisen osan mukaan on P_3 vakio, joten sen asteluku on $= 0$. Koska vielä P_2 on $\neq 0$, niin on R :llä apuväittämän viimeisen osan mukaan toisessa pinnan ∞ -pisteessä ainakin 2-kertainen napa, mikä taas on vastoin olettamusta. Väittäminen on siis todistettu.

5. Funktio $R(z, s) = z$ on, Riemannin pinnalla katsottuna, toisen kertaluvun rationalifunktio, sillä pinnan kumpikin ∞ -piste on sen yksinkertainen napa ja kaikkialla muualla se on säännöllinen. Toisen kertaluvun rationalifunktioita on siis olemassa. Tarkastelemme niistä sellaisia, joilla on *kaksi yksinkertaista napapistettä*.

Jos on olemassa sellainen 2. kertaluvun rationalifunktio,

$$\Psi_{(b, \beta)}^{(a, \alpha)}(z, s) = \frac{P_1 + s P_2}{P_3},$$

jonka napapistet ovat kaksi Riemannin pinnan tavallista äärellistä pistettä (a, α) ja (b, β) , jossa $a \neq b$, niin täyttää se seuraavat ehdot:

A. Edellisen n :n apuväittämän ensimmäisen osan mukaan on

$$P_3 = (z - a)(z - b).$$

B. Saman väittämän viimeisen osan mukaan on P_1 :n asteluku korkeintaan 2 ja P_2 on vakio, joka on $\neq 0$. Ψ on siis muotoa

$$(5) \quad \Psi = g \frac{A_1 z + A_2 + s}{(z - a)(z - b)} + A_0.$$

C. Koska pisteet $(a, -a)$ ja $(b, -\beta)$ ovat Ψ :n säännöllisiä pisteitä, niin Ψ :n osottaja on niissä nolla:

(7)

$$\begin{aligned} A_1 a + A_2 - a &= 0, \\ A_1 b + A_2 - \beta &= 0, \end{aligned}$$

N
merkit
pysy

mistä seuraa

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a - \beta}{a - b}, \\ A_2 &= \frac{a\beta - ba}{a - b}. \end{aligned}$$

Kun nyt A_1 :lle ja A_2 :lle annetaan nämä arvot, niin esittää lauseke (5) sellaista 2. kertaluvun rationalifunktiota, jonka yksinkertaiset navat ovat (a, a) ja (b, β) , olkoot g ja A_0 mitkä vakiot tahansa, kun vain $g \neq 0$.

(a_j, C

Kehitämme Ψ :n sarjaksi napapisteiden ympäristössä. Saamme

$$\text{pisteessä } (a, a): \Psi = \frac{2ga}{a-b} \cdot \frac{1}{t} + \text{säännöll. funktio},$$

$$\text{,, } (b, \beta): \Psi = -\frac{2g\beta}{a-b} \cdot \frac{1}{t} + \text{säännöll. funktio},$$

piste
raja
koh
(a,
ten
Sae

jossa t on vastaava säännöllistäjä (n:o 2). Kun vakiolle g annamme arvon

$$g = \frac{1}{2}(a - b),$$

niin sarjoiksi tulee

(8)

$$\text{pisteessä } (a, a): \Psi = \frac{a}{t} + \text{säänn. funktio},$$

(6)

$$\text{,, } (b, \beta): \Psi = -\frac{\beta}{t} + \text{säänn. funktio},$$

Ra
po

ja Ψ :n lausekkeeksi saadaan

$$\Psi = \frac{(a - \beta)z + (a\beta - ba) + (a - b)s}{2(z - a)(z - b)} + A_0,$$

jo
ot

joka voidaan kirjoittaa muotoon

Ψ :n säännöllisiä

$$(7) \quad \Psi_{(b,\beta)}^{(a,a)} = \frac{a+s}{2(z-a)} - \frac{\beta+s}{2(z-b)} + A_0,$$

Nyt tarkastelemme, missä määrin saatu funktio säilyttää merkityksensä, kun napapisteet saavat erikoisia arvoja kuitenkin pysyen Riemannin pinnalla eri pisteinä. Pidämme ensin $A_0=0$.

1° Kun (b, β) menee pisteeseen $(a, -a)$, niin saadaan (7):stä:

$$\Psi_{(a,-a)}^{(a,a)} = \frac{a}{z-a}.$$

2° Kun (b, β) on kiertopiste $(a_i, 0)$, niin

$$\Psi_{a_i}^{(a,a)} = \frac{a+s}{2(z-a)} - \frac{s}{2(z-a_i)}.$$

3° Jos vielä toinen napapiste (a, a) menee kiertopisteeseen $(a_j, 0)$, niin on

$$\Psi_{a_i}^{a_j} = \frac{s}{2} \left(\frac{1}{z-a_j} - \frac{1}{z-a_i} \right).$$

4° Jäljellä on tapaus, jolloin toinen tahi molemmat napapisteet menevät äärettömyyteen. Tällöin emme (7):stä saa mitään rajafunktiota, siihen kun tulisi äärettömiä vakioita. Tämä epäkohta kuitenkin poistuu, kun A_0 :lle annamme sopivan, pisteistä (a, a) , (b, β) riippuvan arvon. Kehitämme sitä varten Ψ :n b :n potenssisarjaksi siinä ∞ -pisteessä, $(\infty, \sqrt{a_0})$, johon (b, β) menee. Saadaan

$$(8) \quad \Psi = \frac{a+s}{2(z-a)} + \frac{\beta}{2b} + \frac{\beta}{2b^2}z + A_0 + \left[\frac{1}{b} \right]:$$

Rajafunktion lausekkeeseen tuleva ääretön vakio on $\frac{\beta}{2b}$. Tämä poistuu, kun A_0 :aan otetaan termi

$$-\frac{\beta}{2(b-\lambda)},$$

jossa λ on aina oleva $\neq b$. Pisteessä (a, a) tähden tulee A_0 :aan ottaa termi

$$\frac{a}{2(a-\lambda)}.$$

Olkoon siis

$$A_0 = \frac{a}{2(a-\lambda)} - \frac{\beta}{2(b-\lambda)},$$

jolloin

$$(9) \quad \Psi_{(b,\beta)}^{(a,a)} = \frac{1}{2} \left(\frac{a+s}{z-a} + \frac{a}{a-\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\beta+s}{z-b} + \frac{\beta}{b-\lambda} \right),$$

jossa $\lambda \neq a, b$. Tästä saadaan erikoistapauksissa 1°, 2°, 3° vakio-termiä vaille samat funktiot, mitkä saatiin, kun A_0 oli = 0.

Kun nyt annamme (b,β) :n mennä pisteeseen $(\infty, \sqrt{a_0})$, niin saadaan sarjasta (8)

$$\Psi_{(\infty, \sqrt{a_0})}^{(a,a)} = \frac{1}{2} \left(\frac{a+s}{z-a} + \frac{a}{a-\lambda} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{a_0} (z-\lambda).$$

5° Kun vielä $(a,a) = (\infty, -\sqrt{a_0})$, niin saadaan

$$\Psi_{(\infty, \sqrt{a_0})}^{(\infty, -\sqrt{a_0})} = \sqrt{a_0} (z-\lambda).$$

Kaikkien saatujen funktioiden huomaamme olevan vaadittunlaisia, kun suoritamme sarjakehitelmät erilaisissa pisteissä. Napapisteissä saadaan yleisen tapauksen sarjain (6) lisäksi seuraavat kehitelmät erikoistapauksissa:

$$1^\circ \text{ pisteessä } (a, -a): \Psi_{(a,-a)}^{(a,a)} = \frac{a}{t},$$

$$2^\circ \quad \text{,,} \quad a_i : \Psi_{a_i}^{(a,a)} = -\frac{1}{2} \sqrt{f'(a_i)} \cdot \frac{1}{t} + \text{säänn. funktio},$$

$$(10) \quad 3^\circ \quad \text{,,} \quad a_j : \Psi_{a_j}^{a_j} = \frac{1}{2} \sqrt{f'(a_j)} \cdot \frac{1}{t} + \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad ,$$

$$4^\circ \quad \text{,,} \quad (\infty, \sqrt{a_0}): \Psi_{(\infty, \sqrt{a_0})}^{(a,a)} = \frac{\sqrt{a_0}}{t} + \quad \text{,,} \quad \text{,,} \quad ,$$

$$5^\circ \quad \text{,,} \quad (\infty, -\sqrt{a_0}): \Psi_{(\infty, \sqrt{a_0})}^{(\infty, -\sqrt{a_0})} = \frac{\sqrt{a_0}}{t} - \lambda \sqrt{a_0}.$$

6. Nyt tutkimme, miten integroimista koskevat lausekkeet soveltuvat Riemannin pinnalle.

Olkoon $\varphi(z, s)$ pisteen (a, a) ympäristössä yksikäsitteinen funktio. Integraali

$$(11) \quad I = \int \varphi(z, s) dz$$

saa, kun se lausutaan tähän pisteeseen kuuluvan säännöllistävän funktiona, muodon

$$(11)' \quad I = \int \varphi(z, s) \frac{dz}{dt} dt.$$

Funktion $\varphi(z, s)$ residyllä pisteessä (a, a) tarkotetaan lauseketta

$$\frac{1}{2\pi i} \int \varphi(z, s) dz,$$

missä integraali on ulotettu pitkin pinnalla sulkeutuvaa käyrää pisteen (a, a) ympäri kerran positiivisen suuntaan.

Määritelmästä seuraa, että φ :n residy pisteessä (a, a) on yhtä kuin funktion $\varphi \frac{dz}{dt}$ residy pisteessä $t = 0$.

Lauseke (11)' osoittaa, että integraalin rationaliluonteisella osalla on pisteessä (a, a) $(n-1)$ -kertainen napapiste, jos funktiolla $\varphi \frac{dz}{dt}$ on t -tason origossa n -kertainen napa. Kun otamme huomioon,

että tulo $s \frac{dz}{dt}$ on (4):n mukaan origossa aina säännöllinen ja $\neq 0$,

niin saamme sillä kertoa funktion $\varphi \frac{dz}{dt}$, ilman että tämän kertaluku pisteessä (a, a) muuttuu. Siis:

Integralin (11) rationaliluonteisella osalla on pisteessä (a, a) $(n-1)$ -kertainen napapiste, jos funktiolla $s \cdot \varphi$ on siinä n -kertainen napa. Sitäpaitsi on integralilla siinä logaritminen erikoisuus, jos φ :n residy ei ole nolla. Jos funktion $s \cdot \varphi$ napa on yksinkertainen,

niin on integralin erikoisuus siinä puhtaasti logaritminen. Säännöllinen on integrali tässä pisteessä ainoastaan siinä tapauksessa, että $s \cdot \varphi$ on siinä säännöllinen.

Viimeisen lauseen nojalla saadaan Cauchy'n integraliväittämä sovitetuksi Riemannin pinnalle seuraavan muotoisena:

Olkoon S eräs Riemannin pinnan alue ja $f(z, s)$ siinä yksikäsitteinen funktio. Riittävä ehto siihen, että integrali

$$\int_C f(z, s) dz$$

suoritettuna pitkin S :n koko reunaa olisi nolla, on se, että funktio $s \cdot f(z, s)$ on alueessa S säännöllinen ja sen reunalla jatkuva.

Tästä johdumme samoin kuin yleisessä funktioteoriassa lauselman:

Olkoon T mielivaltainen yhdesti yhtenäinen Riemannin pinnan alue. Jos funktio $s \cdot f(z, s)$ on T :ssä yksikäsitteinen, säännöllinen funktio, niin riippuu T :ssä olevaa tietä myöten suoritettun integralin

$$I = \int_{(z_0, s_0)}^{(z, s)} f(z, s) dz$$

arvo yksinomaan integroimisrajoista eikä ollenkaan integroimistiestä.

Residyväittäjä on Riemannin pinnalla sama kuin yksinkertaisella tasolla.

7. Riemannin pinnan rationalifunktion integraleja

$$I = \int R(z, s) dz$$

sanotaan elliptisiksi integraleiksi. Ne jaetaan erikoispisteittensä mukaan kolmeen lajiin:

I lajin integrali on jokaisessa pinnan pisteessä säännöllinen;

II lajin integralin kaikki erikoispisteet ovat napoja;

III lajin integralilla on logaritmisia erikoisuuksia.

Seuraavassa tarkastelemme vain I ja III lajin n. s. elementarisia integraleja.

I lajin
jokaisc
funktio
samall
vakio:

joten

(12)

Yllä
män

erik
ja (

erä
fun

joi
N:
te

Olkoon

$$u = \int R(z, s) dz$$

I lajin integrali, jos niitä on olemassa. Koska u on säännöllinen jokaisessa pinnan pisteessä, niin edellisen n:on mukaan on myös funktio $s \cdot R$ jokaisessa pinnan pisteessä säännöllinen. Koska $s \cdot R$ samalla on pinnan rationalifunktio, niin on se n:on 3 mukaan vakio:

$$s \cdot R = c, R = \frac{c}{s},$$

joten

$$u = \int \frac{c}{s} dz$$

I lajin elementariseksi integraaliksi sanomme integraalia

$$(12) \quad u = \int_{(z_0, s_0)}^{(z, s)} \frac{dz}{s}$$

Yllä esitetystä seuraa, että jokainen muu I lajin integrali on tämän linearifunktio.

III lajin integraalia sanotaan elementariseksi, jos sen ainoat erikoisuudet ovat kaksi puhtaasti logaritmista erikoispistettä (a, α) ja (b, β) . Olkoon

$$\Omega_{(b, \beta)}^{(a, \alpha)} = \int R(z, s) dz$$

eräs tällainen integrali. N:on 6 mukaan voimme päätellä, että funktio $s \cdot R$ on rationalifunktio

$$s \cdot R = \Psi_{(b, \beta)}^{(a, \alpha)},$$

jonka erikoispisteet ovat kaksi yksinkertaista napaa (a, α) ja (b, β) . N:ossa 5 olemme sellaisen muodostaneet kaikkia eri tapauksia varten. Saamme siis:

$$\begin{aligned}
 \Omega_{(b, \beta)}^{(a, a)} &= \int_{(z_0, s_0)}^{(z, s)} \frac{\Psi_{(b, \beta)}^{(a, a)}}{s} dz \\
 (13) \quad &= \int_{(z_0, s_0)}^{(z, s)} \frac{dz}{2s} \left\{ \left(\frac{a+s}{z-a} + \frac{a}{a-\lambda} \right) - \left(\frac{\beta+s}{z-b} + \frac{\beta}{b-\lambda} \right) \right\}.
 \end{aligned}$$

Tämä on se III lajin elliptinen integrali, jota seuraavassa tarvitsemme.

Kehitämme saadun integralin säännöllistäjän potenssisarjaksi erikoispisteiden ympäristössä. Säännöllistäjän funktiona on

$$\Omega = \int \frac{\Psi}{s} \frac{dz}{dt} dt = \int \frac{\Psi}{s \frac{dz}{dt}} dt.$$

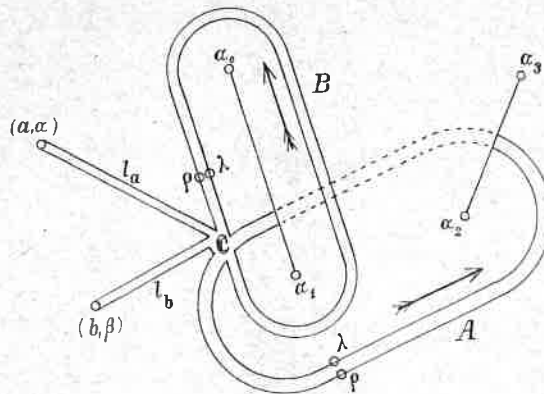
Ψ :n sarjain (6) ja (10) ja lausekkeen $s \frac{dt}{dz}$ sarjain (4) mukaan huomataan, että, olkoonpa napapisteillä mikä erikoinen asema tahansa, niin on joka tapauksessa

$$\begin{aligned}
 (14) \quad &\text{pisteessä } (a, a): \Omega = \log t + \text{säännöllinen funktio;} \\
 &\text{,, } (b, \beta): \Omega = -\log t + \text{,, } \text{,, }
 \end{aligned}$$

kun t on vastaava säännöllistäjä. Ω :n integrandin residyt ovat siis erikoispisteissä vastaavasti $+1$ ja -1 .

8. Riemannin pintamme ei ole yhdesti yhtenäinen. Jos näet tehdään esim. kiertopisteet a_0 ja a_1 kiertävä suljettu leikkaus B (kuv. 1), niin se ei palota pintaa, joka täten on saanut kaksi eri reunakäyrää, nim. leikkauksen B molemmat reunat. Nämä voimme sentähden yhdistää poikkileikkauksella A , ilman että pinnan yhtenäisyys lakkaa, mutta jokainen A :n ja B :n lisäksi tehty poikkileikkaus jo palottelee pinnan.

Leikkaukset A ja B tekevät alkuperäisen useammasti (3:sti) yhtenäisen Riemannin pinnan F yhdestiyhtenäiseksi pinnaksi F' .



Kuv. 1.

Annamme leikkauksille määrätyn positiivisen suunnan ja sanomme leikkauksen vasemmaksi ja oikeaksi reunaksi tähän suuntaan kuljettaessa vastaavasti vasemmalla ja oikealla olevaa reunaa. Merkitsemme vasemmalla reunalla olevan pisteen λ :lla ja oikealla edellistä vastapäätä olevan ρ :lla. Määrätään esim. B :n suunta mielivaltaisesti ja sen jälkeen A :n suunta siten, että A kulkee B :n yllä sen vasemmalta puolelta oikealle (kuv. 1). Integralit

$$\int_A \text{ ja } \int_B$$

merkitkööt integraalia suoritettuna pitkin leikkausta näin määrättyyn suuntaan.

9. Olkoon
$$I = \int R(z, s) dz$$

yleinen elliptinen integrali. Kun rationalifunktion $s \cdot R(z, s)$ napapisteet yhdistetään esim. A :n ja B :n leikkauspisteeseen c leikkauksilla l , jotka eivät leikkaa toisiaan eivätkä A :ta ja B :tä (kuv. 1), niin siten leikatulla yhdestiyhtenäisellä pinnalla (F'') on $s \cdot R$ säännöllinen yksikäsitteinen funktio. Ehto, jolla integraalin arvo on integroimistiestä riippumaton (n:o 6), on siis täytetty, joten jokaisen integraalin I haara on yksikäsitteinen pinnalla F'' .

Integraalin eri haarat eroavat toisistaan vakioilla, joita sanotaan integraalin jaksomoduleiksi.

Tämä johtuu suorastaan siitä, että eri haarain derivaatat ovat samassa pisteessä yhtä suuret.

Tästä seuraa, että *integralin saman haaran arvot leikkauksilla toisiaan vastapäätä olevissa pisteissä λ ja q eroavat toisistaan myös jaksomoduleilla*. Kun näet kysymyksenalaisesta haarasta, *alkuhaarasta I , mennään toiseen I' siten, että (z, s) kulkee jonkun leikkauksen L yli vasemmalta reunalta oikealle, niin edellisen mukaan on*

$$I'(z, s) - I(z, s) = M ,$$

jossa M on eräs jaksomoduli. Tämä yhtälö on voimassa erikokoisesti L :n oikealla reunalla:

$$I'(q) - I(q) = M .$$

Mutta koska $I'(q) = I(\lambda)$, niin saadaan tästä

$$(15) \quad I(\lambda) - I(q) = M ,$$

niinkuin väitettiin. *Lukua M sanotaan leikkaukseen L kuuluvaksi jaksomoduliksi.*

Integrandin napapisteen johdosta tehdyllä leikkauksella l on I :n jaksomoduli $= \pm 2\pi i \times R$:n residy kysymyksenalaisessa navassa. (Merkki riippuu siitä, miten leikkauksen vasen ja oikea reuna määritellään).

Leikkaukseen A kuuluvan jaksomodulin M_1 saamme, kun pisteet λ ja q menevät A :n ja B :n leikkauspisteeseen. $I(\lambda) - I(q)$ on silloin integrali suoritettuna q :sta λ :aan B :tä pitkin negatiiviseen suuntaan. B :hen kuuluva jaksomoduli M_3 taas on integrali suoritettuna A :ta pitkin positiiviseen suuntaan. Näin saamme yhtälöt

$$(16) \quad \begin{aligned} M_1 &= - \int_B R dz , \\ M_3 &= \int_A R dz . \end{aligned}$$

10. Koska I lajin integralissa (12) $s \times$ integrandi on vakio, niin on „tiestäriippumattomuusehto“ (n:o 6) täytetty koko Riemanin pinnalla, joten saamme lauseelman:

I lajin elliptinen integrali on yksikäsitteinen jokaisessa Riemannin pinnan yhdesti yhtenäisessä alueessa ja erikoisesti A :n ja B :n kautta leikatulla pinnalla F' .

Olkoot integraalin (12) jaksomodulit A :lla ja B :llä vastaavasti $2\omega_1$ ja $2\omega_3$. Edellisen n :on mukaan vallitsevat sillbin yhtälöt (15) ja (16), joista saadaan

$$(17) \quad A\text{:lla:} \quad 2\omega_1 = - \int_B \frac{dz}{s} = - \int_B du ,$$

$$B\text{:llä:} \quad 2\omega_3 = \int_A \frac{dz}{s} = \int_A du ,$$

ja

$$(18) \quad \begin{aligned} A\text{:lla:} \quad u(\lambda) &= u(\varrho) + 2\omega_1 , \\ B\text{:llä:} \quad u(\lambda) &= u(\varrho) + 2\omega_3 . \end{aligned}$$

Sanotaan kuljettavan leikkauksen yli positiiviseen suuntaan, kun mennään vasemmalta reunalta oikealle, ja päinvastoin negatiiviseen. Tämän ja yhtälöiden (18) nojalla saadaan lauselema:

Kun (z, s) on kulkenut yhteensä k_1 kertaa A :n poikki ¹⁾ ja k_3 kertaa B :n poikki ja sitten liikkuu leikatulla pinnalla F' , niin siten saatu integraalin (12) haara u_{k_1, k_3} toteuttaa yhtälön

$$(19) \quad u_{k_1, k_3}(z, s) = u(z, s) + 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3 ,$$

jossa $u(z, s)$ on integraalin alkuhaara. Kaikki pisteeseen (z, s) kuuluvat integraalin arvot saadaan tästä kaavasta antamalla k_1 :lle ja k_3 :lle kaikki mahdolliset kokonaisarvot $0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Arvoja (19), jotka eroavat toisistaan jaksomodulien kokonaisilla monikerroilla, sanotaan keskenänsä *kongruenttisiksi*, ja merkitään lyhyesti

$$u_{k_1, k_3} \equiv u .$$

I lajin elliptisen integraalin jaksomoduleista ei kumpikukaan ole nolla.

Jos ensiksi molemmat jaksomodulit olisivat nollia, niin olisi u yksikäsitteinen leikkaamattomalla Riemannin pinnalla ja ollen

¹⁾ k_1 on positiivisten ja negatiivisten ylikulkujen lukumäärän erotus, samoin k_3 .

sen lisäksi kaikkialla äärellinen olisi se n:ön 3 mukaan vakio. Koska u kuitenkin ei ole vakio, niin eivät siis molemmat jakso-modulit ole nollia. Jos sitten vain toinen, esim. $2\omega_1$, olisi nolla, niin olisi funktio

$$e^{\frac{\pi i}{\omega_3} u}$$

yksikäsitteinen leikkaamattomalla Riemannin pinnalla ja lisäksi kaikkialla äärellinen. Tämä funktio olisi niinmuodoin vakio, ja siis myös u . Jakso-moduli $2\omega_1$ ei siis ole nolla, ja samoin osote-taan, ettei myöskään $2\omega_3$ ole nolla.

11. Kehitetään I lajin integrali (12) ja sen käänteisfunktio sarjaksi eri tapauksissa. Olkoon (z_0, s_0) mielivaltainen Riemannin pinnan piste ja t siihen kuuluva säännöllistäjä. Koska integrali u on pisteessä (z_0, s_0) säännöllinen pinnan funktio, joka merkitsee sitä, että se säännöllistäjän funktiona on origossa säännöllinen analyttinen funktio (n:o 2), niin voidaan se kehittää potenssisarjaksi:

$$u - u_0 = c_1 t + c_2 t^2 + \dots,$$

jossa u_0 on pisteeseen (z_0, s_0) kuuluva integralin arvo. Koska c_1 on yhtä kuin derivaatan

$$\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz} \frac{dz}{dt} = \frac{1}{s \frac{dz}{dt}}$$

arvo, kun $t = 0$, niin on (4):n mukaan $c_1 \neq 0$, ja sarja voidaan siis kääntää, jolloin saadaan

$$t = d_1(u - u_0) + d_2(u - u_0)^2 + \dots$$

Sarjain kertoimet saadaan derivoimalla. Laskemme kaksi ensimmäistä kerrointa siinä tapauksessa, jolloin (z_0, s_0) on Riemannin pinnan tavallinen, äärellinen piste. Silloin on

$$z - z_0 = t, \quad \frac{dz}{dt} = 1,$$

joten kaikki derivaatat t :n suhteen ovat samat kuin z :n suhteen. Saadaan:

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{\sqrt{f(z)}}, \quad \frac{dz}{du} = \sqrt{f(z)},$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} = -\frac{1}{2} \frac{f'(z)}{(\sqrt{f(z)})^3}, \quad \frac{d^2z}{du^2} = \frac{d\sqrt{f(z)}}{dz} \frac{dz}{du} = \frac{1}{2} f'(z).$$

Kertoimiksi saadaan siten

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{f(z_0)}}, \quad d_1 = \sqrt{f(z_0)},$$

$$c_2 = -\frac{1}{4} \frac{f'(z_0)}{(\sqrt{f(z_0)})^3}, \quad d_2 = \frac{1}{4} f'(z_0).$$

Samalla tavalla voidaan kertoimet muissakin tapauksissa laskea. Joka tapauksessa ne riippuvat vain pisteestä (z_0, s_0) , eivätkä ollenkaan kysymyksenalaisesta integraalin haarasta. Täten johdutaan seuraaviin sarjoihin.

1° z_0 on tavallinen äärellinen piste, jolloin $z - z_0 = t$:

$$(20) \quad u - u_0 = \frac{1}{\sqrt{f(z_0)}} (z - z_0) \left\{ 1 - \frac{1}{4} \frac{f'(z_0)}{f(z_0)} (z - z_0) + \dots \right\},$$

$$(20a) \quad z - z_0 = \sqrt{f(z_0)} (u - u_0) + \frac{1}{4} f'(z_0) (u - u_0)^2 + \dots;$$

2° z_0 on kiertopiste a_r , jolloin $z - a_r = t^2$:

$$(21) \quad u - u_0 = \frac{2}{\sqrt{f'(a_r)}} t \left\{ 1 - \frac{1}{12} \frac{f''(a_r)}{f'(a_r)} t^2 + \dots \right\},$$

$$(21a) \quad z - a_r = \frac{1}{4} f'(a_r) (u - u_0)^2 + \frac{1}{96} f'(a_r) f''(a_r) (u - u_0)^4 + \dots;$$

3° z_0 on ääretön, jolloin $z = t^{-1}$:

$$(22) \quad u - u_0 = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} t \left\{ 1 - \frac{a_1}{a_0} t + \dots \right\},$$

$$(22a) \quad z = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{1}{u - u_0} - \frac{a_1}{a_0} + B_1 (u - u_0) + \dots$$

Näistä sarjoista voimme lukea seuraavan lauseelman:

I lajin elliptisen integralin käänteisfunktio on jokaisessa pisteessä, jossa se on olemassa, yksikäsitteinen analyyttinen funktio, jolla, ellei se ole säännöllinen, on kysymyksenalaisessa pisteessä yksinkertainen napa erikoisuutena.

Ensimmäisen lajin elliptisen integralin käänteisfunktion yksikäsitteisyyden todistuksia.

I. Algebrallisten funktioiden ja integralien teoriaan perustuva todistus.

12. Yhden todistuksen I lajin integralin käänteisfunktion yksikäsitteisyydelle saamme edellä suoritettujen tarkastelujen nojalla, kun niihin lisäämme vielä seuraavat lauseet.

Olkoot I lajin integralin (12) jaksomodulit A:lla ja B:llä $2\omega_1$ ja $2\omega_3$ sekä III lajin integralin (13) $2\xi_1$ ja $2\xi_3$. Näiden välillä vallitsee yhtälö

$$(23) \quad \omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1 = \frac{\pi i}{2} \left\{ u(a, \alpha) - u(b, \beta) \right\},$$

jossa $u(a, \alpha)$ ja $u(b, \beta)$ ovat integralin (12) saman haaran arvot III lajin integralin logaritmisissa navoissa.

III lajin integralin jaksomoduleihin nähden vallitsevat yleiset yhtälöt (15) ja (16). Siis on

$$A:lla: \quad \Omega(\lambda) - \Omega(\rho) = 2\xi_1 = - \int_B d\Omega,$$

$$B:llä: \quad \Omega(\lambda) - \Omega(\rho) = 2\xi_3 = \int_A d\Omega.$$

Todistaaksemme yhtälön (23) suoritamme integralin

$$I = \int u d\Omega = \int u \frac{d\Omega}{dz} dz$$

alueen F' reunaa pitkin positiiviseen suuntaan sekä sovellutamme siihen residyyväittämää. Koska u on säännöllinen koko Riemannin pinnalla, niin ovat integrandin erikoispisteet samat kuin $\frac{d\Omega}{dz}$:n,

jotka ovat Ω :n molemmat logaritmiset navat (a, α) ja (b, β) . Voimme otaksua leikkaukset tehdyiksi siten, ettei kumpikaan mainituista pisteistä sijaitse niillä. Integroimalla saamme silloin

$$\begin{aligned} I &= \int_A u(\lambda) d\Omega + \int_B u(\lambda) d\Omega - \int_A u(\varrho) d\Omega - \int_B u(\varrho) d\Omega = \\ &= \int_A \{u(\lambda) - u(\varrho)\} d\Omega + \int_B \{u(\lambda) - u(\varrho)\} d\Omega = \\ &= 2\omega_1 \int_A d\Omega + 2\omega_3 \int_B d\Omega = 4(\omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1). \end{aligned}$$

Toiselta puolen on tämä integrali residyväittämän mukaan yhtä suuri kuin integrandin $u \frac{d\Omega}{dz}$ kaikkien residyitten summa kerrottuna $2\pi i$ llä. Integrandin erikoispisteissä, (a, α) ja (b, β) , ovat $\frac{d\Omega}{dz}$:n residyt vast. $+1$ ja -1 (ks. 14). Koska u on kaikkialla säännöllinen, niin ovat integrandin $u \frac{d\Omega}{dz}$ residyt $u(a, \alpha)$ ja $-u(b, \beta)$, joten

$$I = 2\pi i \{u(a, \alpha) - u(b, \beta)\}.$$

Näin olemme saaneet esille yhtälön (23), jossa molemmat integraalin arvot ovat samaan haaraan kuuluvia.

Yleisestä funktioteoriasta tarvitsemme seuraavan konformikuvausta koskevan väittämän:

Olkkoon S yhden yksinkertaisen, suljetun käyrän C rajoittama alue ja $u = f(z)$ S :n sisällä yksikäsitteinen ja säännöllinen analyttinen funktio sekä reunalla äärellinen ja jatkuva. Jos $f(z)$ kuvaa C :n yksinkertaiseksi, suljetuksi käyväksi Γ , niin kuvaa se alueen S kääntäen yksikäsitteisesti ja sisäpisteissä konformisesti käyrän Γ sisäpuolella olevaan alueeseen Σ .

Tämän todistus nojautuu argumentin variatiosääntöön:

Jos alueessa S yksikäsitteinen, rationali- ja irrationaalilukujen analyyttinen funktio $f(z)$ on S :n reunalla äärellinen ja jatkuva sekä $\neq 0$, niin on $f(z)$:n S :ssä olevien nolla- ja napapisteiden lukumäärän erotus

$$N - M = \frac{1}{2\pi} \Delta_C \arg f(z),$$

jossa $\Delta_C \arg f(z)$ merkitsee $f(z)$:n argumentin (=vaihekulman) muutosta z :n kiertäessä S :n ympäri reunaa C pitkin yhden kerran positiiviseen suuntaan, ja jossa jokainen n -kertainen piste on laskettu n :ksi yksinkertaiseksi. Jos $f(z)$ on säännöllinen S :ssä, niin saadaan tällä tavalla sen nollapisteiden lukumäärä.

Nämä väittämät pitävät paikkansa myös Riemannin pinnalla. Jälkimmäisen pätevyys huomataan palottelemalla Riemannin pinnalla oleva alue S siten, että siitä ensin otetaan erilleen kierto- ja äärettömyyspisteiden ympäristöt, ja sitten jällel jäävä alue jaetaan yksinkertaisesti peitettyihin osiin. Argumentin variatio S :n ympäri kierrettäessä on yhtä suuri kuin kaikkien osien ympäri kierrettäessä saatujen variatioiden summa. Mutta näihin osiin nähden pitää argumentin variatiosääntö paikkansa: kierto- ja äärettömyyspisteiden ympäristöissä nolla- ja napapisteiden kertalukujen määritelmän nojalla (n:o 2), muissa osissa yleisen funktioteorian mukaan. — Konformikuvausväittämä todistetaan sitten argumentin variatiosäännön avulla, aivan samoin kuin yleisessä funktioteoriassa. Kuvauksen konformisuus kuitenkin lakkaa kiertopisteissä.

13. Yksikäsitteisyystodistuksen kulku on pääpiirteissään seuraava:

Osoitetaan, että integrali ei saa kongruenttisia arvoja eri pisteissä Riemannin pinnalla F . Vastakohtaisessa tapauksessa näet voitaisiin III lajin integraalin avulla todistaa, että olisi olemassa 1. kertaluvun rationalifunktio F :llä, vastoin n:o:aa 4. Tästä sekä n:o:n 10 viimeisestä väittämästä seuraa, että F :n reunan kuvaksi u -tasossa tulee yksinkertainen, suljettu käyrä, jonka rajottamaan alueeseen P leikattu pinta F' kääntäen yksikäsitteisesti kuvautuu. P todistetaan sitten käyräviivaiseksi suunnikkaaksi. Tämän jälkeen johdetaan muutamia yleisiä väittämiä käyräviivaisista suunnikkaista. Niiden ja integraalin jaksollisuuden avulla jatketaan saatu kuvaus koko u -tasoon, jolloin ilmenee, että integraalin (12)

käänteisfunktio on olemassa koko tasossa yksikäsitteisenä analyyttisenä funktiona, joka lopuksi todistetaan 2. kertaluvun elliptiseksi funktioksi.

14. Todistamme siis väittämän:

Ensimmäisen lajin elliptinen integraali ei saa Riemannin pinnan eri pisteissä keskenänsä kongruenttisia arvoja.

Antiteesi: Integraali u saa F :n eri pisteissä (a, a) ja (b, β) keskenänsä kongruenttiset arvot $u(a, a)$ ja $u(b, \beta)$, joten

$$u(a, a) - u(b, \beta) = 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3,$$

jossa k_1 ja k_3 ovat kokonaislukuja. Teemme pinnan leikkaukset niin, ettei kumpikaan pisteistä (a, a) , (b, β) ole niillä, sekä olemme, että $u(a, a)$ ja $u(b, \beta)$ ovat integralin saman haaran arvoja.

Koska $(a, a) \neq (b, \beta)$, niin on olemassa sellainen III lajin integraali $\Omega_{(b, \beta)}^{(a, a)}$, jonka logaritmiset navat ovat (a, a) ja (b, β) (ks. 13). Kun sen jaksomodulit A :lla ja B :llä ovat $2\xi_1$ ja $2\xi_3$, niin n :on 12 mukaan on näiden ja u :n jaksomodulien välillä olemassa yhtälö (23), josta antiteesin nojalla saadaan

$$(24) \quad \omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1 = \pi i (k_1 \omega_1 + k_3 \omega_3).$$

Nyt muodostamme funktion

$$R(z, s) = e^{\Omega_{(b, \beta)}^{(a, a)} - \frac{\xi_1 + k_3 \pi i}{\omega_1} u}$$

ja väitämme, että tämä on Riemannin pinnan ensimmäisen kertaluvun rationalifunktio, jos kerran antiteesi on oikea.

Todistaaksemme sen osoitamme ensin, että R on yksikäsitteinen Riemannin pinnalla. N :on 9 mukaan on Ω yksikäsitteinen sillä leikatulla pinnalla F'' , joka saadaan F' :stä leikkauksien l_a ja l_b avulla (kuv. 1). Koska u on jo F' :llä yksikäsitteinen, niin on R yksikäsitteinen ainakin F'' :llä. l_a :lla ja l_b :llä ovat Ω :n ja siis myös R :n lausekkeen koko eksponentin jaksomodulit $\pm 2\pi i$ (ks. n :o 9 sekä (14)), joten itse R :n arvot näillä leikkauksilla toisiaan

vastapäätä olevissa pisteissä ovat yhtäsuuret. R on niin ollen yksikäsitteinen myös F' :llä. Leikkauksella A on R :n eksponentin jaksomoduli

$$2 \xi_1 - \frac{\xi_1 + k_3 \pi i}{\omega_1} 2 \omega_1 = -2 k_3 \pi i.$$

B :llä se on

$$2 \xi_3 - \frac{\xi_1 + k_3 \pi i}{\omega_1} 2 \omega_3 = \frac{2}{\omega_1} \left(\omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1 - k_3 \pi i \omega_3 \right),$$

joka antiteesistä saadun yhtälön (24) kautta antaa $2 k_1 \pi i$. Koska R :n eksponentin jaksomodulit A :lla ja B :llä ovat $2 \pi i$:n kokonaisia monikertoja, niin R itse on niihin nähden yksikäsitteinen. R on siis yksikäsitteinen leikkaamattomalla Riemannin pinnalla.

Toinen tehtävä on todistaa, että R :n ainoana erikoispisteenä Riemannin pinnalla on yksinkertainen napa. Koska R :n eksponentti on säännöllinen kaikkialla muualla paitsi pisteissä (a, a) ja (b, β) , niin ovat nämä ainoat mahdolliset R :n erikoisuudet. Ω :n sarjakehitelmän (14) avulla saadaan näissä pisteissä R :lle esitysmuodot, joista suorastaan ilmenee, että piste (a, a) on R :n yksinkertainen nollapiste ja (b, β) sen yksinkertainen napa.

Koska R on pinnan yksikäsitteinen funktio, jolla on yksi ainoa yksinkertainen napa erikoispisteenä, niin on se n:ossa 3 (siv. 3) todistetun väittämän ja rationalifunktion kertaluvun määritelmän (siv. 4) mukaan pinnan ensimmäisen kertaluvun rationalifunktio. Mutta nyt olemme tulleetkin ristiriitaan, sillä n:on 4 mukaan ei pinnalla F ole olemassa 1. kertaluvun rationalifunktiota. Antiteesi, josta läksimme, on niinmuodoin väärä ja väitys oikea.

15. Koska integraali (12) on yksikäsitteinen F' :llä, niin kuvautuu F' :n reuna sen kautta suljetuksi käyräksi. Edellisen n:on ja n:on 10 viimeisen väittämän avulla todistamme siihen nähden seuraavan:

F' :n reunan kuvakäyrä on yksinkertainen, s. o., ei leikkaa eikä sivua itseään, joten se rajoittaa äärellisen, yhdesti yhtenäisen alueen.

Jos näet mainittu käyrä kohtaisi itseään, niin kohtaamispistettä vastaisi (ainakin) kaksi eri pistettä F' :n reunalla. Jos nämä pisteet olisivat eri pisteitä leikkaamattomalla pinnalla, niin saisi integrali keskenänsä kongruenttiset (tässä erikoisesti samat) arvot kahdessa eri pisteessä, vastoin n:oa 14. Jos pisteet olisivat identtiset leikkaamattomalla pinnalla, jolloin ne olisivat kaksi toisiaan vastapäätä olevaa leikkauksen pistettä λ ja ϱ , niin olisi $u(\lambda) = u(\varrho)$ eli vastaava jaksomoduli nolla. Tämä taas on vastoin n:on 10 viimeistä väittämää.

Koska nyt F' :n reunan kuvakäyrä on yksinkertainen (ja äärellinen) suljettu käyrä, niin rajottaa se äärellisen yhdestiyhtenäisen alueen, jonka seuraavassa merkitsemme P :llä.

Koska kysymyksenalainen integralin haara on yksikäsitteinen ja säännöllinen F' :llä sekä kuvaa F' :n reunan yhdestiyhtenäisen alueen P rajottavaksi käyräksi, niin n:ossa 12 esitetyn konformikuvausta koskevan lauseelman mukaan F' kuvautuu kääntäen yksikäsitteisesti alueeseen P .

Näin olemme saaneet integralin käänteisfunktion tunnetuksi alueessa P , jossa se on yksikäsitteinen. Sen erikoispisteet P :ssä ovat kaksi yksinkertaista napapistettä, vastaten Riemannin pinnan kummankin lehden äärettömyyttä.

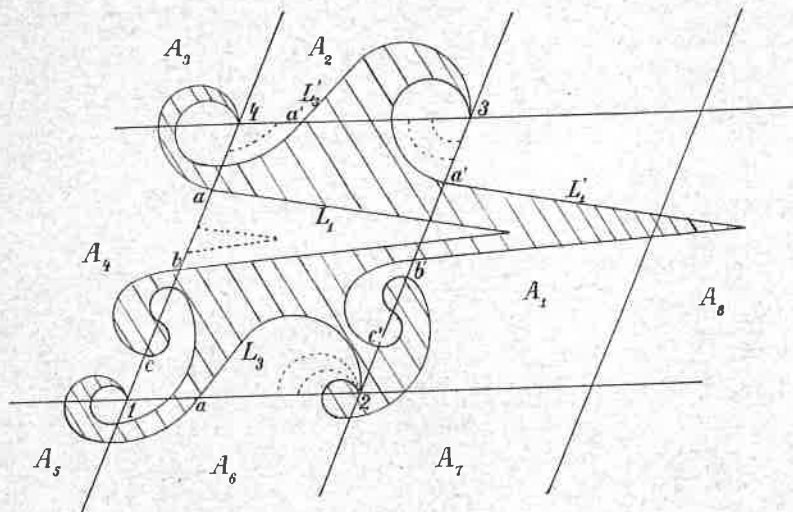
16. Tarkastelemme nyt lähemmin P :n muotoa. Sen reuna on kokoonpantu neljästä osasta, jotka vastaavat Riemannin pinnan A - ja B -leikkausten λ - ja ϱ -reunoja. Kun F' :n ympäri kierretään positiiviseen suuntaan, niin kuljetaan sen reuna järjestyksessä B_ϱ ($= B$:n ϱ -reuna), A_λ , B_λ , A_ϱ . Olkoot vastaavat P :n reunan osat L_3 , L'_1 , L'_3 , L_1 , jotka siis P :n ympäri positiiviseen suuntaan kierrettäessä seuraavat toisiaan tässä järjestyksessä. Koska toisiaan vastapäätä olevissa leikkauksen pisteissä λ ja ϱ on

$$A\text{:lla: } u(\lambda) = u(\varrho) + 2\omega_1,$$

$$B\text{:llä: } u(\lambda) = u(\varrho) + 2\omega_3,$$

niin saadaan L'_1 ja L'_3 vastaavasti L_1 :sta ja L_3 :stä siirtämällä näitä yhdensuuntaisesti itsensä kanssa vektoreilla $2\omega_1$ ja $2\omega_3$.

P on siis käyräviivainen suunnikas (kuv. 2). Sen kärkipisteet, s. o. käyräin L päätepisteet, olkoot 1, 2, 3, 4, lähtien L_1 :n ja L_3 :n yhtymäpisteestä, P :n ympäri positiiviseen suuntaan kiertäen. Silloin on vektori $12 = 2\omega_1$ ja vektori $14 = 2\omega_3$.



Kuv. 2.

Todistamme nyt, että suhde $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ei ole reallinen¹⁾, s. o., että

¹⁾ Tämä voidaan todistaa käyttämällä hyväksi n:ön 14 väittämää, vaikka ilman sitäkin toimeen tullaan kuten yllä näemme. N:ossa 10 on osoitettu, ettei kumpikaan jaksomoduli ole nolla. Samaa menettelyä käyttämällä todistamme nyt ensin, ettei suhde $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ole reallinen rationaliluku.

Jos näet olisi

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \frac{m}{n},$$

jossa m ja n ovat kokonaislukuja, niin olisi funktio

$$R = e^{\frac{n\pi i}{\omega_1} u}$$

säännöllinen ja yksikäsitteinen koko Riemannin pinnalla F ja sellaisena vakio, josta seuraisi, että myös u olisi vakio. — R :n yksikäsitteisyys johtuu siitä, että sen lausekkeen eksponentin jaksomodulit ovat $2\pi i$:n monikertoja.

Jos sitten $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ olisi reallinen irrationaliluku, niin voisimme löytää itseis-

janat 12, 23, 34, 41 rajoittavat (suoraviivaisen) suunnikkaan A . Se tulee todistetuksi sillä, kun osoitamme, että P :n ja A :n pinta-alat ovat yhtäsuuret.

Ajattelemme P :n pinta-alan integroiduksi esim. kiinteästä pisteestä P :n reunalle piirretyn radiusvektorin avulla. Aina kun radiusvektori kiertää positiiviseen suuntaan, on sen piirtämän pinnan lisäys positiivinen ja päinvastaisessa suunnassa negatiivinen. P :n pinta-ala on yhtä suuri kuin näiden kaikkien lisäyksien summa, kun radiusvektorin toinen päätepiste, u , on kiertänyt P :n ympäri reunaan pitkin kerran positiiviseen suuntaan. Tämän lisäksi saamme antaa u :n kulkea mitä muita käyriä pitkin tahansa edestakaisin, jolloin radiusvektori piirtää saman pinnan sekä positiiviseen että negatiiviseen suuntaan, ja vastaavat termit siis summasta häviävät.

Lähteköön nyt radiusvektorin liikkuva päätepiste u pisteestä 1 kiertämään P :n ympäri positiiviseen suuntaan. Ensimmäiseksi kulkee se käyrää L_3 pitkin. Olkoon a pistettä 1 lähinnä oleva janan 12 ja käyrän L_3 leikkauspiste (kuv. 2). L_3 :n kaari 1 a ja jana a 1 muodostavat yksinkertaisen, suljetun käyrän, joka siis rajoittaa erään alueen (1 a). Kulkekoon u pisteeseen a tultuansa janan a 1 edestakaisin, jolloin se on kiertänyt alueen (1 a) sekä piirtänyt janan 1 a tässä suunnassa. Saatu (1 a):n pinta on positiivinen tahi

arvolleen kuinka pieniä jaksomoduleja $2\omega = 2k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2$ tahansa. Tämän avulla johdumme n:o: 14 kanssa ristiriitaan.

Kun nim. z_0 on pinnan tavallinen piste, niin on integraali (12) z_0 :ssa säännöllinen funktio, jonka derivaatta on siinä $\neq 0$. Sientähden kuvaa integraali z_0 :n jonkun ympäristön c kääntäen yksikäsitteisesti vastaavan pisteen u_0 ympäristöön C . Olkoon ε pienin väli C :n reunalta u_0 :aan. Valitsemme nyt sellaisen jaksomodulin 2ω , että

$$|2\omega| < \varepsilon,$$

jolloin piste $u_0 + 2\omega$ on C :ssä. Sitä vastaa niin ollen määrätty c :ssä oleva piste z_1 , joka on $\neq z_0$. Integraali (12) saisi siis eri pisteissä z_0 ja z_1 keskenään kongruenttiset arvot vastoin n:o: 14.

Koska $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ ei ole realinen rationaliluku eikä myös irrationaliluku, niin on se kompleksinen.

negatiivinen riippuen siitä, kiersikö u sen positiiviseen vaiko negatiiviseen suuntaan.

Ellei a ole jo piste 2, niin olkoon b se a :ta lähinnä oleva piste, jossa jäljellä oleva L_3 :n kaari $a2$ leikkaa janan $a2$. Kun u kaartaa ab pitkin on tullut b :hen, niin kulkekoon se sitten edestakaisin janan ba , jolloin u on kiertänyt alueen (ab) sekä piirtänyt janan ab . Tähänastinen integroimistulos on siis alueiden $(1a)$ ja (ab) summa $+$ se alue, jonka radiusvektori piirtää, kun u kulkee janan $1b$.

Näin jatkamme integrointia eteenpäin, kunnes tullaan L_3 :n toiseen päätepisteeseen 2. Sitten annetaan u :n kulkea edelleen käyrää L_1 pitkin ja menetellään sen ja janan 23 kanssa aivan kuin edellä L_3 :n ja janan 12 kanssa, j. n. e. Kun u on kiertänyt P :n ympäri, niin on saatu tulokseksi koko P :n pinta-ala, joka siis on $=$ alueiden $(1a)$, (ab) , $\dots$ summa $+$ se pinta, jonka radiusvektori piirtää, kun u kulkee jانات 12, 23, 34, 41, s. o. suunnikkaan A ala. Osotamme nyt, että summa

$$(1a) + (ab) + \dots + (e1) = 0.$$

Olkoon (ab) joku selitetyllä tavalla saatu alue. Saadaksemme määrätyn tapauksen oletamme, että se on saatu käyrää L_1 pitkin integroitaessa. Koska käyrä L_1 saadaan L_1 :stä yhdensuuntaissiirron kautta, niin vastaa kaartaa ab sen kanssa yhteneväinen kaari $a'b'$ käyrällä L_1 . Pisteet a' ja b' ovat janalla 23, sillä tämä jana saadaan saman yhdensuuntaissiirron kautta janasta 14, jolla a ja b ovat. L_1 ei leikkaa janaa 23 välillä $a'b'$, sillä jos se leikkaisi, niin kongruenttisuudesta seuraisi, että myös L_1 leikkaisi janaa 14 välillä ab vastoin olettamusta. Kaari $a'b'$ ja jana $a'b'$ rajoittavat niin ollen erään alueen $(a'b')$, joka on yhteneväinen alueen (ab) kanssa. Jos u kiertäessään P :n ympäri positiiviseen suuntaan kulkee L_1 :llä suunnassa ab , niin kulkee se L_1 :llä suunnassa $b'a'$. Tästä seuraa, että integroitaessa saadut alueet (ab) ja $(b'a')$ ovat vastakkaismerkkiset. Äsken huomattiin, että ne ovat keskenään yhtäsuuret, joten

$$(ab) + (b'a') = 0.$$

P :n pinnan integralissa esiintyvät apualueet hävittävät siis parittain toisensa ja niiden summa on niin ollen nolla. Mutta silloin onkin $P = A$, kuten väitimme.

17. Siirrämme A :n yhdensuuntaissiirrolla mielivaltaiseen uuteen asentoon A' ja osotamme, miten P voidaan palottelemalla muuntaa A' :ksi. Sitä varten jaamme koko tason kongruenttisten suunnikkaiden verkkoon, jossa A' on yhtenä suunnikkaana. Ne suorat, jotka jaon toimittavat, palottelevat P :n äärelliseen määrään osia, kun P :n reuna on säännöllinen. Siirrämme ne A' :n kanssa kongruenttiset suunnikkaat $A'_1, A'_2, \dots, A'_n$, joissa P :n osia on, yhdensuuntaissiirrolla A' :n päälle (vrt. kuv. 2). *Silloin peittyy A' aukottomasti ja yksinkertaisesti P :n osilla, eli P on muunnettu A' :ksi.*

Ensin todistamme, että peittyminen on aukoton. Jos A' :han jäisi aukko, niin sen A' :n sisällä olevana rajana olisi joku P :n reunan osa joko alkuperäisessä tai muunnetussa asennossaan. Olkoon $a_0 b_0$ samaan käyrään L_1, L'_1, L_3, L'_3 , kuuluva pala siitä, jolloin oletamme, että aukko on $a_0 b_0$:n oikealla puolella. Jos $a_0 b_0$ oli muunnettu, niin olkoon ab sen alkuperäinen asento. Tätä kaarta vastaa P :n vastakkaisella sivulla sen kanssa kongruenttinen kaari $a'b'$. Koska ab :n oikea puoli ei kuulu P :hen, niin $a'b'$:n oikea puoli kuuluu. Kun muunnos toimitetaan, niin menee myös $a'b'$ asentoon $a_0 b_0$, koska se oli ab :n kanssa kongruenttinen. Tästä seuraa, että $a_0 b_0$:n oikea puoli kuuluukin P :hen, mikä ristiriita näyttää, että antiteesi on väärä.

Koska A' peittyy aukottomasti P :n osilla ja koska A' :n ja P :n pinta-alat ovat yhtäsuuret, niin on peittyminen myös yksinkertainen.

Suoritetun muunnoksen avulla todistetaan seuraava väittämä:

P :ssä ei ole muita keskenään kongruenttisia pisteitä kuin vastakkaisten sivujen vastinpisteet.

On selvää, että tämä pitää paikkansa suoraviivaiseen suunnikkaaseen A' nähden.

Jos nyt P :ssä olisi kaksi keskenään kongruenttista pistettä u ja $\bar{u}$, jotka eivät ole vastakkaisten sivujen vastinpisteitä, niin annamme A' :lle sellaisen asennon, että u joutuu sen sisään, sekä

muunnamme P :n esitetyllä tavalla A' :ksi. Silloin lankeaa $\bar{u}$ pisteeseen u .

Jos u on P :n sisäpiste, niin voidaan sen ympäri piirtää ympyrä c , joka on kokonaan sekä P :ssä että A' :ssa. Koska $\bar{u}$ menee muunnoksessa pisteeseen u , niin tulee sen ympäristöstä joku P :n osa c :n päälle, jolloin A' peittyisi siltä kohdalta kaksinkertaisesti, vastoin muunnoksen ominaisuuksia. Sentähden u ei ole P :n sisällä.

Jos u on P :n reunalla, niin vastaa sitä P :n vastakkaisella sivulla kongruenttinen piste u' , joka olettamuksen mukaan on $\neq \bar{u}$. Muunnoksessa menee myös u' pisteeseen u . Kun ab on P :n reunan kaari, jolla u on, niin vastaa sitä kongruenttinen kaari $a'b'$, jolla u' on. Jos ab :n vasen puoli kuuluu P :hen, niin $a'b'$:n oikea puoli kuuluu siihen myös. Kun u' siirretään yhdensuuntaissiirrolla u :hun, niin joutuu $a'b'$ kaaren ab päälle ja joku A' :ssa oleva u :n ympäristö c peittyy P :n osilla. Kun sitten vielä $\bar{u}$ siirretään pisteeseen u , niin tulee senkin ympäristöstä joku P :n osa c :n päälle, jolloin A' taas peittyisi kaksinkertaisesti. Täten on väittämä todistettu.

18. Nyt suoritamme noissa 15 saadun kuvauksen jatkamisen koko u -tasoon. Annamme Riemannin pinnan pisteen (z, s) kulkea yhteensä k_1 kertaa A -leikkauksen poikki ja k_2 kertaa B :n poikki ja sen jälkeen liikkua leikatulla pinnalla F' (menemättä enää leikkausten yli). Saamme silloin (19):n mukaan integraalin u seuraavan haaran:

$$u_{k_1, k_2}(z, s) = u(z, s) + 2k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2.$$

Tämän haaran välittämä F' :n kuva P_{k_1, k_2} saadaan siis siirtämällä P :tä vektorin $2k_1\omega_1 + 2k_2\omega_2$ verran.

Kun kokonaisille luvuille k_1, k_2 annamme kaikki mahdolliset arvot, niin tulee koko u -taso yksinkertaisesti ja aukottomasti peitetyksi F' :n kuvilla.

Ellei peittyminen olisi yksinkertainen, niin voisimme löytää sellaisen pisteen u , joka olisi yhtäaikaa kahden eri suunnikkaan P_{k_1, k_2} ja P_{l_1, l_2} sisäpiste. Siirrämme P_{l_1, l_2} :n yhdensuuntaissiirrolla

P_{k_1, k_3} :n päälle. Silloin joutuu u suunnikkaassa P_{k_1, k_3} olevaan kongruenttiseen pisteeseensä u' . P_{k_1, k_3} :ssa olisi siten kaksi keskenään kongruenttista sisäpistettä u ja u' , joka edellisen n:n mukaan on mahdotonta. u -taso peittyy siis yksinkertaisesti.

Peittymisen aukottomuuden todistamista varten jaamme u -tason suoraviivaisten suunnikkaiden verkkoon, jossa A on yhtenä suunnikkaana. Olkoon A_{k_1, k_3} se verkon suunnikas, joka saadaan siirtämällä A :ta jaksomodulilla $2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3$. On selvää, että P_{k_1, k_3} voidaan muuntaa A_{k_1, k_3} :ksi aivan samoin kuin P suunnikkaaksi A .

Jos nyt u -tasoon jäisi aukko, s. o. alue, joka ei kuulu yhteenkään suunnikkaista P , niin erotamme tästä alueesta sellaisen osan c , joka on kokonaan jossakin suunnikkaassa A_{k_1, k_3} . Kun P_{k_1, k_3} muunnetaan A_{k_1, k_3} :ksi, niin peittyy myös c suunnikkaan P_{k_1, k_3} osilla. Olkoon A_{l_1, l_3} suunnikas, jossa oleva alue b menee muunnettaessa c :hen, ja b :n muunnettu asento olkoon b' , joka silloin saadaan siirtämällä b :tä vektorin $2(k_1 - l_1)\omega_1 + 2(k_3 - l_3)\omega_3$ verran. Kun suunnikasta P_{k_1, k_3} , johon b kuuluu, siirretään tällä samalla vektorilla, niin saadaan suunnikas $P_{2k_1 - l_1, 2k_3 - l_3}$, jossa siis b' on. Täten ainakin osa c :tä kuuluu suunnikkaisiin P . u -tason peittyminen on niin ollen myös aukoton.

19. Koska u -taso, (z, s) :n vapaasti liikkuesssa leikkaamattomalla Riemannin pinnalla, peittyy aukottomasti ja yksinkertaisesti integralin (12) arvoilla, niin johtuu tästä päinvastoin, että *Riemannin pinnan piste (z, s) on u :n yksikäsitteinen funktio, joka on olemassa koko tasossa.*

Merkitsemme saadun käänteisfunktion

$$z = \varphi(u).$$

Koska

$$u_{k_1, k_3}(z, s) = u(z, s) + 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3 = u(z, s) + 2\omega,$$

niin on kääntäen

$$z = \varphi(u_{k_1, k_3}) = \varphi(u + 2\omega) = \varphi(u),$$

josta nähdään, että $\varphi(u)$ on kaksijaksoinen funktio, jonka alku-

jaksot ovat $2\omega_1$ ja $2\omega_3$. Huomautimme, että alueessa P on $\varphi(u)$:lla kaksi yksinkertaista napapistettä. Samoin on myös P_{k_1, k_2} :ssa. Jos nyt alueiden P_{k_1, k_2} asemesta ajattelemme u -tason tavallisella tavalla jaetuksi suoraviivaisiin jaksosuunnikkaisiin, niin on käänteisfunktiolla jokaisessa jaksosuunnikkaassa] kaksi yksinkertaista napapistettä. Koska $\varphi(u)$ muutoin on äärellisyydessä säännöllinen, niin saamme lopuksi:

I lajin elliptisen integraalin

$$u = \int_{(z_0, s_0)}^{(z, s)} \frac{dz}{s}$$

käänteisfunktio

$$z = \varphi(u)$$

on toisen kertaluvun elliptinen funktio, jonka alkujaksot ovat integraalin jaksomodulit $2\omega_1$ ja $2\omega_3$.

20. Palaamme vielä suoritettuun todistukseen tarkastellaksemme sen pääkohtia. Sen voimme jakaa kolmeen osaan: 1° Todistetaan, että yhdesti yhtenäiseksi leikatun Riemannin pinnan F' reunan kuvaksi u -tasossa tulee yksinkertainen, suljettu käyrä; 2° Tämän käyrän rajottamaan alueeseen kuvautuu F' kääntäen yksikäsitteisesti; 3° Kuvaus jatketaan koko tasoon.

Ensimmäisessä osassa muodostaa koko todistuksen painopisteen n:ossa 14 asetetun väittämän epäsuora todistus, jossa I ja III lajin integralien jaksomodulien välillä vallitsevan yhtälön (23) avulla johduttiin n:on 4 kanssa ristiriitaiseen tulokseen. Käytetyt apuneuvot ovat yksityistä laatua. — Kun n:on 14 väittämä sekä n:on 10 viimeinen väittämä, jotka yhdessä sisältävät sen, ettei integraali saa F' :n kahdessa eri pisteessä samaa arvoa, on todistettu, niin seuraa siitä ja integraalin haaran yksikäsitteisyydestä ilman muuta, että F' :n reunan kuvakäyrä on yksinkertainen, suljettu käyrä, joka siis rajottaa erään alueen P .

Nyt tulee, todistuksen toisessa osassa, kysymykseen tärkeä yleinen periaate nim. *argumentin variatiosääntö*, josta konformi-

kuvausta koskeva väittämä (n:o 12) johtuu. Tämän mukaan kuvautuu F' kääntäen yksikäsitteisesti P :hen.

Se seikka, että P on (käyräviivainen) *suunnikas* tulee kysymykseen vasta todistuksen viimeisessä osassa, kuvauksen jatkamisessa. Tästä on puhtaasti geometrisena seurauksena ensiksi, ettei suhde $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ole realiluku, ja toiseksi, että u -taso peittyy aukottomasti ja yksinkertaisesti, kun P :tä siirrellään kaikilla jaksomoduleilla. Integralin *jaksollisuudesta* taas johtuu, että mielivaltaisen haaran välittämä F' :n kuva saadaan siirtämällä P :tä vastaavalla jaksomodulilla. Samoin on siitä seurauksena myös P :n suunnikkaanmuotoisuus.

21. Tekijä on tavannut tämän todistuksen kahdessa teoksessa, ensin APPEL'in ja GOURSAT'n,¹⁾ sitten L. MAURER'in²⁾ käyttämänä.

APPEL ja GOURSAT, saatuansa F' :n reunan kuvatuksi yksinkertaiseksi, suljetuksi käyräksi, todistavat integralimuodossa olevan argumentin variatiosäännön avulla, että F' todella kuvautuu kääntäen yksikäsitteisesti mainitun käyrän rajottamaan alueeseen. Tämän kohdan jättää MAURER perustelematta, vaikka sillä on niin oleellinen merkitys.

Kuvauksen jatkamisessa ei kumpikaan selitä u -tason aukottomaa ja yksinkertaista peittymistä. Tosin tämä seikka on ilmeinen, mutta ei kuitenkaan itsestään täysin selvä, kun otetaan huomioon, miten monimutkainen P :n reunakäyrä voi olla, vaikkakin käytetään vain säännöllisiä käyriä. Sentähden on tekijä tämän asian yksityiskohtaisesti käsitellyt.

¹⁾ APPEL et GOURSAT, *Theorie des fonctions algébriques et leurs intégrales*, Paris 1895, §§ 201—202.

²⁾ DURÈGE und MAURER, *Theorie der elliptischen Functionen*, V Auflage, Leipzig 1908, §§ 41, 44.

II. Yhteenlaskuväittämään perustuva todistus.

22. N:ossa 5 muodostettiin 2. kertaluvun rationalifunktio, jonka napapisteet olivat edeltäpäin annetut. Koska siihen saadaan lisätä mielivaltainen vakio, niin voidaan vielä toinen nollapisteistä ottaa mielivaltaisesti. Mutta silloin onkin jäljellä oleva nollapiste jo täysin määrätty.

Ellei näin olisi, niin voisimme nimittäin muodostaa kaksi 2. kertaluvun rationalifunktiota, joilla olisi yksi nollapiste ja molemmat navat samat, mutta toiset nollapisteet eri pisteitä, jolloin näiden funktioiden osamäärä selvästi olisi ensimmäisen kertaluvun rationalifunktio, jota ei ole olemassa (n:o 4). Sentähden *toisen kertaluvun rationalifunktion nolla- ja napapisteet toteuttavat erään yhtälön, jonka kautta jokainen näistä neljästä pisteestä on yksikäsitteisesti määrätty toisten funktiona.*

Seuraavassa näytämme, että tämä yhtälö voidaan muodostaa kahdella tavalla: algebrallisella ja transcendenttisella. Edellisestä saadaan tulokseksi, että neljäs mainituista nolla- ja napapisteistä on kolmen muun rationalifunktio. Jälkimmäisen menettelyn kautta taas huomataan, että niiden arvojen summa, jotka ensimmäisen lajin elliptinen integraali saa 2. kertaluvun rationalifunktion nollapisteissä, on yhtä suuri kuin niiden arvojen summa, jotka se saa napapisteissä (olettamalla, että integraalin haarat valitaan sopivasti). Tällöin on tultu ensimmäisen lajin elliptisen integraalin yhteenlaskuväittämään.

Saadun yhteenlaskuväittämän avulla jatketaan sitten eräs integraalin käänteisfunktion elementti koko tasoon, jolloin huomataan käänteisfunktion olevan yksikäsitteisen ja äärellisyydessä rationaliluonteisen.

23. Olkoon $R(z, s)$ 2. kertaluvun rationalifunktio sekä (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) sen nollapisteet, (z_3, s_3) ja (z_4, s_4) sen napapisteet, jotka kaikki oletamme Riemannin pinnan äärellisiksi, tavallisiksi pisteiksi. N:on 5 mukaan on R muotoa

$$R(z, s) = \frac{c_1 z^2 + c_2 z + c_3 + c_4 s}{(z - z_3)(z - z_4)}.$$

Koska (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) ovat R :n nollapisteet, niin on osottaja niissä nolla. Koska sen lisäksi pisteet (z_3, s_3) ja (z_4, s_4) ovat R :n säännöllisiä pisteitä ja kun nimittäjä niissä on nolla, niin on osottajakin niissä nolla. Näin saadaan yhtälöt

$$(25) \quad \begin{aligned} c_1 z_1^2 + c_2 z_1 + c_3 + c_4 s_1 &= 0 \\ c_1 z_2^2 + c_2 z_2 + c_3 + c_4 s_2 &= 0 \\ c_1 z_3^2 + c_2 z_3 + c_3 - c_4 s_3 &= 0 \\ c_1 z_4^2 + c_2 z_4 + c_3 - c_4 s_4 &= 0. \end{aligned}$$

Kertoimille c tulee tästä nollasta eroavat ratkaisut ainoastaan silloin, kun yhtälöiden determinantti on nolla. Tarkastetun funktion nolla- ja napapisteet toteuttavat siten yhtälön ¹⁾

$$\begin{vmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 & s_1 \\ z_2^2 & z_2 & 1 & s_2 \\ z_3^2 & z_3 & 1 & -s_3 \\ z_4^2 & z_4 & 1 & -s_4 \end{vmatrix} = 0.$$

Tästä ei kuitenkaan ilman muuta huomaa, että yksi piste on kolmen muun rationalifunktio. Lisäksi tarvitaan Riemannin pinnan määräävä yhtälö (2), jonka jokainen pinnan piste toteuttaa:

$$(2) \quad s^2 = a_0 z^4 + 4 a_1 z^3 + 6 a_2 z^2 + 4 a_3 z + a_4.$$

Yhtälöistä (25) johtuu, että kaikki neljä pistettä toteuttavat yhtälön

$$(25a) \quad c_4^2 s^2 = (c_1 z^2 + c_2 z + c_3)^2.$$

Kun näistä eliminoidaan pois s , niin saadaan 4. asteen yhtälö

$$(26) \quad (c_1^2 - a_0 c_4^2) z^4 + (2 c_1 c_2 - 4 a_1 c_4^2) z^3 + (c_2^2 + 2 c_1 c_3 - 6 a_2 c_4^2) z^2 + (2 c_2 c_3 - 4 a_3 c_4^2) z + (c_3^2 - a_4 c_4^2) = 0,$$

jonka juuret ovat z_1, z_2, z_3, z_4 . Juurien summalle tulee siis arvo

$$z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = -\frac{2 c_1 c_2 - 4 a_1 c_4^2}{c_1^2 - a_0 c_4^2},$$

¹⁾ Vrt. DURÈGE und MAURER, *Theorie der elliptischen Functionen*, V Aufl., Leipzig 1908, §§ 24–25.

josta seuraa

$$(27) \quad z_4 = -(z_1 + z_2 + z_3) - \frac{2c_1c_2 - 4a_1c_4^2}{c_1^2 - a_0c_4^2}.$$

Kertoimien suhteet lasketaan kolmesta ensimmäisestä yhtälöstä (25):

$$(28) \quad c_1 : c_2 : c_3 : c_4 = \begin{vmatrix} z_1^2 & z_1 & 1 & s_1 \\ z_2^2 & z_2 & 1 & s_2 \\ z_3^2 & z_3 & 1 & -s_3 \end{vmatrix}.$$

Kun pisteet (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) ovat F :n eri pisteitä, niin on aina joku tämän matriisin determinantti $\neq 0$. Jos nim. z_1, z_2 ja z_3 ovat keskenään eri suuret, niin on ensimmäinen, c_4 :ää vastaava determinantti $\neq 0$. Jos näistä kaksi, esim. z_1 ja z_2 , ovat yhtäsuuret, niin on ensimmäinen determinantti $= 0$, mutta viimeinen on $\neq 0$. Sillä silloin on $s_2 = -s_1$ ja viimeiseksi determinantiksi tulee $2s_1(z_2 - z_3) \neq 0$.

Viimeinen yhtälö (25) antaa s_4 :n arvon:

$$(29) \quad s_4 = \frac{c_1}{c_4} z_4^2 + \frac{c_2}{c_4} z_4 + \frac{c_3}{c_4}.$$

Yhtälöiden (27—29) kautta on (z_4, s_4) lausuttu pisteiden (z_1, s_1) , (z_2, s_2) , (z_3, s_3) rationalifunktiona.¹⁾ Ne lausuvat 2. kertaluvun rationalifunktion olemassaolon välttämättömän ehdon. Päinvastoin tämä ehto myös riittää eli, jos yhtälöt (27—29) ovat toteutetut, niin on olemassa 2. kertaluvun rationalifunktio, jonka nollapisteen ovat (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) sekä napapisteen (z_3, s_3) ja (z_4, s_4) .

Tämän todistamista varten on ensin osoitettava, että lukupari (z_4, s_4) esittää Riemannin pinnan pistettä, s. o. toteuttaa yhtälön (2). Yhtälöiden (28) nojalla toteutuu kolme ensimmäistä yhtälöistä (25). Niin ollen pisteet (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) , jotka F :n pisteinä toteuttavat yhtälön (2), toteuttavat myös yhtälön (25a). z_1, z_2 ja z_3 ovat sentähden yhtälön (26) kolme juurta ja sen neljäs juuri on (27):n mukaan z_4 . Koska sen lisäksi (z_4, s_4) yhtälön (29) nojalla

¹⁾ Vrt. APPEL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et leurs intégrales*, Paris 1895, § 195.

toteuttaa yhtälön (25a), niin huomataan, laskemalla yhteen yhtälöt (25a) ja (26), että (z_4, s_4) toteuttaa myös F :n yhtälön (2). Tämän jälkeen on yhtälöiden (25) mukaan selvää, että kertoimien (28) avulla muodostetulla funktiolla R on vaaditut ominaisuudet.

24. Nyt haemme saman välttämättömän ja riittävän ehdon transcendenttista tietä. Apuna käytämme Riemannin pinnan III lajin integralia.¹⁾

Funktio $\log R(z, s)$ tulee R :n nolapisteessä äärettömäksi niinkuin $\log t$ ja napapisteessä niinkuin $-\log t$, kun t on vastaava säännöllistäjä. N:on 7 mukaan ovat olemassa III lajin integralit $\Omega_{(z_3, s_3)}^{(z_1, s_1)}$ ja $\Omega_{(z_4, s_4)}^{(z_2, s_2)}$, jotka logaritmisissa navoissa (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) tulevat äärettömiksi kuten $\log t$ sekä navoissa (z_3, s_3) ja (z_4, s_4) kuten $-\log t$. Näistä seikoista johtuu, että funktio

$$U(z, s) = \log R - (\Omega_{(z_3, s_3)}^{(z_1, s_1)} + \Omega_{(z_4, s_4)}^{(z_2, s_2)})$$

on säännöllinen pisteissä (z_i, s_i) ($i = 1, 2, 3, 4$). Koska $\log R$ ja funktiot Ω ovat kaikkialla munalla säännöllisiä, niin on U säännöllinen koko Riemannin pinnalla, ja kun lisäksi sen derivaatta on pinnan rationalifunktio, niin on se ensimmäisen lajin elliptinen integrali ja sellaisena integralin

$$(30) \quad u = \int \frac{dz}{s}$$

linearifunktio:

$$U = \lambda u + \mu.$$

Teeimme Riemannin pinnan leikkaukset A ja B siten, etteivät ne kulje pisteiden (z_i, s_i) kautta. Olkoot integralien $\Omega_{(z_3, s_3)}^{(z_1, s_1)}$ ja $\Omega_{(z_4, s_4)}^{(z_2, s_2)}$ jaksomodulit vast.

$$A\text{:lla:} \quad 2 \xi_1 \quad \text{ja} \quad 2 \xi_1',$$

$$B\text{:llä:} \quad 2 \xi_3 \quad \text{ja} \quad 2 \xi_3'.$$

Koska $\log R$:n jaksomodulit ovat $2\pi i$:n monikertoja, niin määrää-

¹⁾ Vrt. DURÈGE und MAURER, *Théorie der elliptischen Functionen*, § 41.

mällä U :n jaksomodulit sen molemmista lausekkeista saadaan yhtälöt

$$\begin{aligned} 2 \lambda \omega_1 &= -2 \xi_1 - 2 \xi_1' - 2 k_3 \pi i, \\ 2 \lambda \omega_3 &= -2 \xi_3 - 2 \xi_3' + 2 k_1 \pi i, \end{aligned}$$

joista eliminoimalla λ johtuu

$$2 (\omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1) + 2 (\omega_1 \xi_3' - \omega_3 \xi_1') - \pi i (2 k_1 \omega_1 + 2 k_3 \omega_3) = 0.$$

Mutta yhtälön (23) mukaan on

$$\begin{aligned} 2 (\omega_1 \xi_3 - \omega_3 \xi_1) &= \pi i [u(z_1, s_1) - u(z_3, s_3)], \\ 2 (\omega_1 \xi_3' - \omega_3 \xi_1') &= \pi i [u(z_2, s_2) - u(z_4, s_4)]. \end{aligned}$$

Näiden avulla tulee edellisestä

$$(31) \quad u(z_1, s_1) + u(z_2, s_2) = u(z_3, s_3) + u(z_4, s_4) + 2 k_1 \omega_1 + 2 k_3 \omega_3,$$

jossa k_1 ja k_3 ovat kokonaislukuja sekä u :n arvot integralin *samaan* haaraan kuuluvia.

Tämän yhtälön toteuttavat niinmuodoin *jokaisen* 2. kertaluvun rationalifunktion nolla- ja napapisteet. Päinvastoin on tämän toteutuminen 2. kertaluvun funktion olemassaolon *riittävä* ehto. Voidaan näet yhtälön (31) nojalla helposti osottaa, että funktio

$$R(z, s) = e^{\Omega_{(z_3, s_3)}^{(z_1, s_1)} + \Omega_{(z_4, s_4)}^{(z_2, s_2)} - \frac{\xi_1 + \xi_1' + k_3 \pi i}{\omega_1} u}$$

on rationalifunktio, jonka nollapisteet ovat (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) sekä napapisteet (z_3, s_3) ja (z_4, s_4) (vrt. n:o 14).

Koska nyt yhtälö (31) toiselta puolen ja yhtälöt (27—29) toiselta lausuvat saman välttämättömän ja riittävän ehdon, niin ovat ne täysin yhtäpitävät ja siis *yhtälö* (31) *määrittää* pisteen (z_4, s_4) *pisteiden* (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) *rationalifunktiona, joka on annettu yhtälöiden* (27—29) *kautta*.

25. Yhtälössä (31) riippuu vakion $2 k_1 \omega_1 + 2 k_3 \omega_3$ arvo leikkausten asennosta sekä pisteistä (z_i, s_i) .

Kun rajotamme pisteiden (z_1, s_1) (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) *liikkumisen tarpeeksi pieneen ympyrään* K_2 , *jota* F' :n *reuna ei leikkaa, niin silloin on*

$$2 k_1 \omega_1 + 2 k_3 \omega_3 = 0.$$

Tämän todistamiseksi tarvitsemme seuraavan apuväittämän:

Pisteiden (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) lähestyessä rajanaan samaa pistettä (z_0, s_0) , yhtälön (31) kautta määrätty piste (z_4, s_4) lähenee myös sitä.

Koska (z_4, s_4) edellisen n:ön mukaan on yhtälöiden (27—29) määräämä toisten pisteiden rationalifunktio, niin tulee apuväittämä todistetuksi, kun osoitamme, että yhtälöistä (27—29) saadaan (z_4, s_4) :lle raja-arvo (z_0, s_0) . Oletamme, että (z_0, s_0) ei ole ääretön eikä kiertopiste.

Kun matriisiin (28) toinen rivi vähennetään ensimmäisestä ja jaetaan $(z_1 - z_2)$:lla, niin saadaan

$$(32) \quad c_1 : c_2 : c_3 : c_4 = \begin{vmatrix} z_1 + z_2, & 1, & 0, & a \\ z_2^2, & z_2, & 1, & s_2 \\ z_3^2, & z_3, & 1, & -s_3 \end{vmatrix},$$

jossa

$$a = \frac{s_1 - s_2}{z_1 - z_2}.$$

Koska s :llä pisteen (z_0, s_0) ympäristössä on jatkuva derivaatta, niin voidaan piirtää sellainen (z_0, s_0) -keskinen ympyrä Y , että $|a|$ on pienempi kuin äärellinen vakio M , kun z_1 ja z_2 ovat Y :ssä. Ottamalla itse determinantit suhdeluvuiksi saamme (32):sta:

$$(33) \quad \begin{aligned} c_1 &= -(s_2 + s_3) + a(z_2 - z_3), \\ c_2 &= (z_1 + z_2)(s_2 + s_3) - a(z_2^2 - z_3^2), \\ c_4 &= (z_2 - z_3)(z_3 - z_1). \end{aligned}$$

z_4 :n lausekkeesta (27) saadaan näiden arvojen avulla

$$z_4 = -(z_1 + z_2 + z_3) + 2 \frac{(z_1 + z_2)(s_2 + s_3)^2 + [z_2 - z_3]}{(s_2 + s_3)^2 + [z_2 - z_3]},$$

jossa $[z_2 - z_3]$ merkitsee $(z_2 - z_3)$:n kanssa häviävää funktiota, kun vain z_1 ja z_2 ovat Y :ssä. Koska $s_0 \neq 0$, niin tästä yhtälöstä suoraan näkee, että $\lim z_4 = z_0$, kun (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) yhtyvät pisteeseen (z_0, s_0) .

Hakiessamme s_4 :n raja-arvoa käytämme yhtälöiden (28—29)

asemesta niiden kanssa yhtäpitäviä yhtälöitä (25). Kun niistä toinen yhtälö vähennetään ensimmäisestä ja saatu yhtälö jaetaan $(z_1 - z_2)$:lla, sekä kolmas neljännestä ja jaetaan $(z_4 - z_3)$:lla, niin tulee:

$$\begin{aligned} c_1(z_1 + z_2) + c_2 + c_4 a &= 0, \\ c_1(z_3 + z_4) + c_2 - c_4 \beta &= 0, \end{aligned}$$

jossa

$$(34) \quad \beta = \frac{s_4 - s_3}{z_4 - z_3}.$$

Näistä saadaan edelleen

$$c_1(z_4 + z_3 - z_2 - z_1) = c_4(a + \beta).$$

Kun tähän sijoitetaan z_4 :n arvo (27), niin tulee:

$$-2c_1 \frac{c_1[c_1(z_1 + z_2) + c_2] - c_4^2[a_0(z_1 + z_2) + 2a_1]}{c_1^2 - a_0c_4^2} = c_4(a + \beta).$$

(33):n avulla saadaan $c_1(z_1 + z_2) + c_2 = -ac_4$, jolloin yhtälön molemmat jäsenet voidaan jakaa c_4 :llä. Tällä tavalla nähdään, että, kun pisteet (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) ovat eräässä pisteen (z_0, s_0) ympäristössä, β :lle edellisestä yhtälöstä tuleva arvo voidaan kirjoittaa muotoon

$$\beta = -a + 2c_1 \frac{a c_1 + [z_2 - z_3]}{c_1^2 - [z_2 - z_3]} = a + [z_2 - z_3].$$

(34):n mukaan on silloin

$$s_4 = s_3 + (z_4 - z_3)(a + [z_2 - z_3]),$$

mistä käy ilmi, että s_4 lähenee raja-arvoa s_0 , kun mainitut kolme pistettä yhtyvät pisteeseen (z_0, s_0) . Apuväittäjä on täten todistettu.

Pääväitteen todistamista varten oletamme, ettei (z_0, s_0) ole pinnan leikkauksilla. Olkoon K_1 sellainen (z_0, s_0) -keskinen ympyrä, jota F' :n reuna ei leikkaa ja joka ei sisällä yhtään kiertopistettä. (z_4, s_4) :n jatkuvaisuuden tähden voidaan piirtää K_1 :n sisään sellainen samakeskinen ympyrä K_2 , että pisteiden (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) ollessa siinä, (z_4, s_4) on ympyrässä K_1 . Koska vakio $2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3$ yhtälössä (31) muuttuu vain silloin, kun joku pisteistä (z_i, s_i) kulkee leikkausten yli, ja koska olettamuksen mukaan

leikkaukset ovat kokonaan K_1 :n ja K_2 :n ulkopuolella, niin $2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3$ pysyy muuttumatta, kun pisteet (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) liikkuvat miten tahansa ympyrässä K_2 .

Nyt annamme pisteiden (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) mennä pisteeseen (z_0, s_0) , jolloin apuväittämän mukaan myös (z_4, s_4) menee siihen. Koska yhtälössä (31) kaikki integralin arvot ovat samaan haaraan kuuluvia, niin tulevat ne pisteessä (z_0, s_0) keskenään yhtäsuuriksi, josta seuraa, että

$$2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3 = 0,$$

mikä oli todistettava.

Tämän nojalla saadaan (31):stä yhtälö

$$u(z_1, s_1) + u(z_2, s_2) = u(z_3, s_3) + u(z_4, s_4),$$

joka siis varmaan toteutuu integralin (30) saman haaran arvoilla, kun pisteet (z_1, s_1) , (z_2, s_2) ja (z_3, s_3) ovat K_2 :ssa ja kun (z_4, s_4) toteuttaa yhtälöt (27—29). Otamme integralin (30) alarajaksi pisteen (z_0, s_0) ja annamme pisteen (z_3, s_3) yhtyä siihen. Käytämme tästä lähtien sitä integralin haaraa (alkuhaara), joka alarajassa tulee nolllaksi. Kun vielä merkitsemme (z_4, s_4) :n asemesta (z, s) , niin edellisen n:on viimeisessä lauseessa esitetty ensimmäisen lajin elliptisen integralin yhteenlaskuväittäjä saa seuraavan muodon:

Kun (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) ovat ympyrässä K_2 , niin yhtälö

$$(35) \quad u(z_1, s_1) + u(z_2, s_2) = u(z, s),$$

jossa u merkitsee integralin

$$(36) \quad u = \int_{(z_0, s_0)}^{(z, s)} \frac{dz}{s}$$

alkuhaaraa, määrää pisteen (z, s) pisteiden (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) rationalifunktiona, joka on annettu seuraavien yhtälöiden kautta:

$$(37) \quad z = -(z_1 + z_2 + z_0) - \frac{2c_1c_2 - 4a_1c_4^2}{c_1^2 - a_0c_4^2},$$

$$s = \frac{c_1}{c_4} z^2 + \frac{c_2}{c_4} z + \frac{c_3}{c_4},$$

$$(38) \quad c_1 : c_2 : c_3 : c_4 = \begin{vmatrix} z_1 + z_2 & 1 & 0 & \frac{s_1 - s_2}{z_1 - z_2} \\ z_2^2 & z_2 & 1 & s_2 \\ z_0^2 & z_0 & 1 & -s_0 \end{vmatrix}.$$

Piste (z, s) on ympyrässä K_1 .

Olemme tässä matriisiin (28) asemesta ottaneet sen kanssa yhtäpitävän matriisin (32) voidaksemme suorastaan mennä rajatapaukseen $(z_1, s_1) = (z_2, s_2)$.

26. Yhteenlaskuväittämän nojalla todistamme, että integraalin (36) käänteisfunktio on olemassa koko tasossa yksikäsitteisenä rationaliluonteisena funktiona. Sitä varten määrittelemme käänteisfunktion ensin yhden pisteen ympäristössä.

Koska alaraja (z_0, s_0) , jossa integraalin alkuhaara saa arvon 0, on F' :n tavallinen piste, niin on siinä integraalin derivaatta $\neq 0$. Tunnetun funktioteoreettisen lauselman mukaan voidaan sentähden määrätä sellainen pisteen (z_0, s_0) ympäristö C , joka integraalin alkuhaaran kautta kuvautuu kääntäen yksikäsitteisesti erääseen u -tason origon ympäristöön C . Tämän konformikuvauksen kautta on integraalin (36) käänteisfunktio

$$z = \varphi(u)$$

määritelty alueessa C , jossa se on yksikäsitteinen ja säännöllinen.

Koska $\frac{du}{dz} = \frac{1}{s}$, niin on

$$s = \varphi'(u).$$

27. Näin saatuun käänteisfunktioon sovellutamme nyt yhteenlaskuväittämää. Sitä varten merkitsenme

$$u_1 = u(z_1, s_1) \quad \text{ja} \quad u_2 = u(z_2, s_2).$$

Kun (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) ovat K_2 :ssa, niin yhteenlaskuväittämän mukaan saadaan yhtälöstä

$$u_1 + u_2 = u(z, s)$$

määräytyksi (z, s) , joka silloin on K_1 :ssä. Nämä yhtälöt voimme kääntää, jos u_1, u_2 ja $u_1 + u_2$ ovat C :ssä, jolloin tulee:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi(u_1), & s_1 &= \varphi'(u_1), \\ z_2 &= \varphi(u_2), & s_2 &= \varphi'(u_2), \\ z &= \varphi(u_1 + u_2), & s &= \varphi'(u_1 + u_2). \end{aligned}$$

Rajotamme nyt u_1 :n ja u_2 :n liikkumisen sellaiseen C :ssä olevaan origokeskiseen ympyrään C_0 , että ensiksi piste $u_1 + u_2$ on C :ssä, toiseksi pisteet (z_1, s_1) ja (z_2, s_2) ovat K_2 :ssa ja kolmanneksi piste (z, s) on K_1 :ssä. Silloin yhteenlaskuväittämän mukaan ovat $\varphi(u_1 + u_2)$ ja $\varphi'(u_1 + u_2)$ argumenttien $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\varphi'(u_1)$ ja $\varphi'(u_2)$ rationalifunktioita.

Tästä saadaan erikoisesti $\varphi(2u)$:n arvo lausutuksi $\varphi(u)$:n ja $\varphi'(u)$:n kautta, kun annetaan u_1 :n ja u_2 :n yhtyä arvoon u . Tällöin yhtyy piste (z_1, s_1) pisteeseen (z_2, s_2) ja saamme

$$\lim_{u_1=u_2=u} \frac{s_1 - s_2}{z_1 - z_2} = \lim \frac{\varphi'(u_1) - \varphi'(u_2)}{\varphi(u_1) - \varphi(u_2)} = \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)}.$$

Kun nyt otamme huomioon, että $z_0 = \varphi(0)$ ja $s_0 = \varphi'(0)$, niin edellinen yhtälöistä (37) antaa $\varphi(2u)$:n arvoksi

$$\varphi(2u) = -2\varphi(u) - \varphi(0) - \frac{2c_1c_2 - 4a_1c_4^2}{c_1^2 - a_0c_4^2},$$

jossa (38):n mukaan

$$c_1 : c_2 : c_3 : c_4 = \begin{vmatrix} 2\varphi(u), & 1, & 0, & \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} \\ \varphi^2(u), & \varphi(u), & 1, & \varphi'(u) \\ \varphi^2(0), & \varphi(0), & 1, & -\varphi'(0) \end{vmatrix}.$$

$\varphi(2u)$ on $\varphi(u)$:n ja $\varphi'(u)$:n rationalifunktio, sillä matriisissa esiintyvä toinen derivaatta $\varphi''(u)$ on $\varphi(u)$:n rationalifunktio. On näet (2):n mukaan

$$[\varphi'(u)]^2 = f(\varphi(u)),$$

josta derivoimalla tulee

$$\varphi''(u) = \frac{1}{2} f'(\varphi(u)) .$$

Merkitsemme lyhyesti

$$\varphi(2u) = R(\varphi(u), \varphi'(u)) ,$$

josta

$$(39) \quad \varphi(u) = R\left(\varphi\left(\frac{u}{2}\right), \varphi'\left(\frac{u}{2}\right)\right) .$$

Tähän muotoon saatetun yhteenlaskuväittämän nojalla jatkamme $\varphi(u)$:n ympyrästä C_0 koko tasoon.

28. Yhtälö (39) on voimassa toistaiseksi ympyrässä C_0 , jonka säde olkoon r . Koska yhtälön oikea jäsen R on φ :n ja φ' :n rationalifunktio ja koska $\varphi\left(\frac{u}{2}\right)$ ja $\varphi'\left(\frac{u}{2}\right)$ ovat yksikäsitteiset ja rationaliluonteiset (vieläpä säännölliset), kun $\left|\frac{u}{2}\right| < r$ eli $|u| < 2r$, niin on yhdistetty funktio $R(\varphi, \varphi')$ yksikäsitteinen ja rationaliluonteinen $2r$ -säteisessä ympyrässä C_1 . Koska R yhtälön (39) mukaan on C_0 :ssa identtinen $\varphi(u)$:n kanssa, niin voidaan $\varphi(u)$ jatkaa analyyttisesti ympyrään C_1 , jolloin (39):n oikea jäsen on $\varphi(u)$:n analyyttinen jatko. Siis on yhtälö (39) voimassa myös ympyrässä C_1 .

Mutta silloin sen oikea jäsen taas on $2 \cdot 2r$ -säteisessä ympyrässä C_2 yksikäsitteinen, rationaliluonteinen funktio, joka C_1 :ssä on identtinen $\varphi(u)$:n kanssa. $\varphi(u)$ voidaan näin ollen jatkaa analyyttisesti ympyrään C_2 , jolloin yhtälön (39) oikea jäsen on sen analyyttinen jatko. Yhtälö (39) on siis voimassa myös ympyrässä C_2 .

On selvää, että tällä tavalla saadaan $\varphi(u)$ jatketuksi koko tasoon. Voimme sentähden lausua seuraavan tuloksen:

Alkujaan C :ssä määritelty analyyttinen funktio $\varphi(u)$ on koko tasossa yksikäsitteinen ja äärellisyydessä rationaliluonteinen.

29. Väitämme, että $z = \varphi(u)$ on *integralin* (36) *käänteisfunktio*.

Olkoon annettu piste u' , johon kuuluva φ :n arvo $z' = \varphi(u')$ on luvuista $\infty, a_0, a_1, a_2, a_3$ eroava. Annamme u :n kulkea jatkuvasti origosta pisteeseen u' pitkin sellaista säännöllistä käyrää L , joka välttää kaikkia niitä pisteitä, joissa $\varphi(u)$ on joko ∞ tahi a_0, a_1, a_2, a_3 . Koska $\varphi(u)$ on rationaliluonteinen, niin on näitä pisteitä jokaisessa äärellisessä alueessa äärellinen määrä, jonka tähden niiden välttäminen on mahdollinen. Tällöin piirtää piste $z = \varphi(u)$ pisteiden z_0 ja z' välille z -tasoon säännöllisen käyrän L' , joka koko ajan pysyy äärellisyydessä eikä kulje kiertopisteiden kautta.

On todistettava, että integrali (36), jonka nyt merkitsemme $I(z)$:lla, suoritettuna z_0 :sta z' :aan käyrää L' pitkin on yhtä suuri kuin u' , kun s :n alkuarvona z_0 :ssa on s_0 .

Koska L' ei kulje kiertopisteiden kautta, niin voidaan se ympäröidä niin kaidalla alueella V' , ettei sen sisällä eikä reunalla ole yhtään kiertopistettä. (Jos V' jossakin kohden peittää useamman kertaan tason, niin muodostamme sen niistä kohdin Riemannin pinnaksi). Koska $\varphi(u)$ on jatkuva muualla paitsi napapisteissään, jotka käyrä L välttää, sekä yksikäsitteinen, niin voidaan L ympäröidä niin kapealla alueella V , että pisteet $z = \varphi(u)$ ovat alueessa V' , kun vain u on V :ssä.

Integrali $I(z)$ on alueessa V' yksikäsitteinen ja säännöllinen analyyttinen funktio. Koska edelleen $\varphi(u)$ on yksikäsitteinen ja säännöllinen alueessa V , jonka pisteet u kuvautuvat V' :n pisteiksi muunnoksen $z = \varphi(u)$ kautta, niin yhdistetty funktio $I(\varphi(u))$ on yksikäsitteinen ja säännöllinen V :ssä.

$\varphi(u)$ esittää integralin (36) käänteisfunktioita origon ympärillä olevassa alueessa C (ks. n:o 26). Yhtälö

$$u = I(\varphi(u))$$

toteutuu niin ollen origon ympäristössä. Mutta koska origo on alueessa V , niin yleisen funktioiden identtisyysperiaatteen mukaan on $I(\varphi(u))$ identtinen u :n kanssa koko alueessa V , joten erikoisesti

$$u' = I(\varphi(u')) = I(z').$$

Integralin (36) käänteisfunktio on siis yksikäsitteinen ja äärellisyydessä rationaliluuonteinen.

30. Suorittamamme todistuksen voimme jakaa kolmeen osaan: 1° Yhteenlaskuväittämän johto ja sen tarkastelu; 2° Käänteisfunktion määrittely pisteen ympäristössä ja yhteenlaskuväittämän sovellutus siihen; 3° Analyyttinen jatkaminen.

Riippuen siitä, millä tavoin yhteenlaskuväittäjä johdetaan, saadaan koko todistuksen pääkohdalle, ensimmäiselle osalle, eri muotoja. Olemme valinneet käyttämämme menettelyn siksi, että se niin läheisesti liittyy edellisiin kehittelyihin, tahtomatta sillä sanoa, että tämä olisi yksinkertaisin ja vähimmillä edellytyksillä saatava johto.

Kun yhteenlaskuväittämän nojalla laajennetaan funktion $\varphi(u)$ merkitysaluetta, niin ei siinä tarvita varsinaista analyttisen jatkamisen perustusta, funktioiden identtisyysperiaatetta, sillä onhan kysymyksessä sellainen erikoistapaus, jolloin edeltäpäin tiedetään funktioiden identtisyys määrittelyalueittensa koko yhteisessä alueessa. Mutta tämä periaate tulee kuitenkin käytäntöön myöhemmin, kun todistetaan, että $\varphi(u)$ myöskin alkuperäisen määrittelyalueensa ulkopuolella esittää integraalin käänteisfunktioita.

Erikoisesti tahdomme huomauttaa, ettei jaksomodulien suhde tule ollenkaan kysymykseen koko todistuksessa. Kun on saatu näytetyksi, että käänteisfunktio on olemassa koko tasossa, niin seuraa siitä perästä päin, ettei jaksomodulien suhde ole reallinen (vrt. n:o 51).

Muutoin ovat edellä esitetyt yksikäsitteisyystodistukset pidettävät jossain määrin keinotekoisina, sillä tuleehan niissä kysymykseen siksi vaikeat yksityisluontoiset käsitteet kuin yhtälö (23) ja yhteenlaskuväittäjä, jotka saadaan vasta sitten, kun on pitkälle tutkittu algebrallisia funktioita ja integraleja, ja joiden löytäminen on enemmän tahi vähemmän sattuman varassa.

Siitä huolimatta on yhteenlaskuväittämän keino vanhin olevista todistuksista. Ensimmäinen elliptisen integraalin käänteis-

funktiota koskeva julkaisu on ABEL'in ¹⁾. Hän käytti käänteis-funktion saamiseksi juuri yhteenlaskuväittämää. Tosin ovat hänen uranuurtavat tutkimuksensa luonnollisesta syystä puutteelliset siinä kohden, että hän käsittelee vain sitä tapausta, jolloin neliö-juuren alla oleva polynomi on realinen, sillä hänen aikanaan oli kompleksisen integralin teoria vasta muodostumassa. ²⁾

WEIERSTRASS ³⁾ antoi yleisen päteyyden ABEL'in menettelylle sen kautta, että hän osoitti, miten annetun differentialiyhtälön ratkaisu saadaan pisteen ympäristössä potenssisarjana. Hänen keinonsa, jota hän mainitussa teoksessa käyttää hyperelliptisten integralien kääntämiseksi, mutta joka ilman muuta soveltuu myös elliptiseen tapaukseen, on pää-ajatuksessa edellä esitetty.

Vanhempaan historiaan nähden viittaamme G. MITTAG-LEFFLER'in ⁴⁾ ja A. KRAZER'in ⁵⁾ kirjoituksiin, joista edellinen yksityiskohtia myöten käsittelee ABEL'in ja WEIERSTRASS'in todistuksia.

¹⁾ N. H. ABEL, *Recherches sur les fonctions elliptiques* (Crelle T. 2., Heft 2, 1827, siv. 101).

²⁾ Tässä suhteessa yleisti myöhemmin ABEL'in menettelyn P. MANSION kirjoituksessaan *Sur la méthode d'Abel pour l'inversion de la première intégrale elliptique dans le cas où le module a une valeur imaginaire complexe*. (Acta Mathematica XXVII, 1903, siv. 353). Funktioteorian nykyiseltä kehityskannalta katsottuna lienee kuitenkin tämän todistuksen historiallinen merkitys suurempi kuin sen tieteellinen arvo.

³⁾ K. WEIERSTRASS, *Theorie der Abelschen Functionen* (Crelle 52. Band, 1856, siv. 285).

⁴⁾ G. MITTAG-LEFFLER, *En metod att komma i analytisk besittning af de elliptiska funktionerna*. Helsingfors, 1876.

⁵⁾ A. KRAZER, *Zur Geschichte des Umkehrproblems der Integrale*, Festrede an der Hochschule zu Karlsruhe am 18. Nov. 1908.

III. Analyyttisen jatkamisen keino.

31. Seuraavassa todistetaan integralin

$$(40) \quad u = \int \frac{dz}{s}$$

käänteisfunktion yksikäsitteisyys ja rationaliluonteisuus siten, että yksi potenssisarjana annettu käänteisfunktion elementti jatketaan potenssisarjain avulla koko u -tasoon. Tätä varten erotetaan Riemannin pinnasta pois sopivat kierto- ja äärettömyyspisteiden ympäristöt, jolloin jäljelle jäävä pinta olkoon T . Todistetaan sitten, että z_0 :n ollessa T :ssä voidaan määrätä sellainen vakinainen positiivinen luku ϱ , että z_0 :aa vastaavan pisteen u_0 ympäristössä kehitetty käänteisfunktion sarja suppenee ainakin ϱ -säteisessä ympyrässä. Käyttämällä apuna sädettä ϱ sekä kierto- ja äärettömyyspisteiden ympäristöjen kuva-alueita jatketaan sitten käänteisfunktio koko tasoon.

32. Tämän menettelytavan perustana on yleinen analyyttisen jatkamisen periaate, jonka lausumme seuraavassa muodossa:

Olkoon alueilla S_1 ja S_2 yhteisenä yhtenäinen alue (S_1, S_2) sekä $f_1(z)$ ja $f_2(z)$ näissä alueissa määritellyt yksikäsitteiset, rationaliluonteiset funktiot. Jos nämä ovat yhtäpitävät keskenänsä vaikka kuinka pienessä yhteisen alueen (S_1, S_2) osassa, niin ovat ne yhtäpitävät koko yhteisessä alueessa. Ellei S_1 :llä ja S_2 :lla ole muita yhteisiä alueita, niin funktiot määrittelevät S_1 :n ja S_2 :n peittämässä alueessa $S_1 + S_2$ yksikäsitteisen rationaliluonteisen funktion, joka S_1 :ssä yhtyy f_1 :een ja S_2 :ssa f_2 :een. Sanotaan, että f_1 ja f_2 ovat toistensa analyttiset jatkot.

Ajatelkaamme nyt, että jollakin tavalla on saatu tämän lauseelman ehdot täyttävissä alueissa S_1 ja S_2 määritellyksi vast. funktiot

$$z = \varphi_1(u), \quad z = \varphi_2(u),$$

jotka alueissa S_1 ja S_2 sekä niiden reunoilla ovat yksikäsitteiset ja rationaliluonteiset sekä esittävät niissä integralin (40) käänteis-

funktiota. Jos φ_1 :llä ja φ_2 :lla on sama arvo z_0 yhdessä ainoassa S_1 :n ja S_2 :n yhteisen alueen sisä- tahi reunapisteessä u_0 , niin seuraa jo siitä, että ne ovat identtiset koko siinä yhteisessä alueessa (S_1, S_2) , johon u_0 kuuluu. Sillä koska φ_1 ja φ_2 esittävät integralin (40) käänteisfunktiota, niin saa integrali pisteessä z_0 arvon u_0 , ja n:on 11 mukaan tulevat siis sekä φ_1 että φ_2 pisteen u_0 ympäristössä esitetyiksi sarjan (20 a) kautta, ollen siten identtiset, ei ainoastaan pisteessä u_0 , vaan myös sen ympäristössä, joten ne peruslauselman mukaan ovat identtiset koko alueessa (S_1, S_2) ja muodostavat toistensa analyttiset jatkot.

33. Nyt tahdomme tutkia annetun potenssisarjan käänteis-sarjan suppenemista. Jos funktio $f(z)$ on pisteessä z_0 säännöllinen ja jos $f'(z_0) \neq 0$, niin yleisen funktioteorian mukaan on tämän käänteisfunktio pisteen $u_0 = f(z_0)$ ympäristössä säännöllinen analyttinen funktio ja voidaan niin ollen kehittää u_0 :n ympäristössä suppenevaksi potenssisarjaksi. Määräämme alarajan tämän potenssisarjan suppenemissäteelle.

Muuttamalla merkintää kirjotamme tunnetun sarjan muotoon

$$(41) \quad u = f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0.$$

Tehtävän ratkaisemme kahdessa osassa. Ensin määräämme z -tassossa sellaisen origokeskisen ympyrän c , joka sarjan (41) kautta kuvautuu kääntäen yksikäsitteisesti erääseen u -tason origon ympäristöön C , jossa siis käänteisfunktio on u :n yksikäsitteinen, säännöllinen funktio. Käänteissarja suppenee siten ainakin siinä origokeskisessä ympyrässä, joka jää kokonaan alueeseen C . Tehtävän toinen osa on niinmuodoin hakea C :n reunan pienin etäisyys origosta.

Ympyrä c on määrättävä siten, että funktio u on siinä säännöllinen ja saa saman arvon yhdessä ainoassa pisteessä. Sentähden ensiksi c :n säde r on pienempi kuin sarjan (41) suppenemissäde ja toiseksi argumentin variatiosäännön (n:o 12) nojalla sellainen, että

$$\frac{1}{2\pi} \triangle_c \arg [f(z) - f(z_0)] = 1$$

olkoonpa z_0 mikä c :n sisällä oleva piste tahansa.

(41):n mukaan on

$$f(z) - f(z_0) = a_1(z - z_0) + a_2(z^2 - z_0^2) + \dots$$

Voimme kirjoittaa

$$z^n - z_0^n = (z - z_0) Z_n,$$

missä

$$Z_n = z^{n-1} + z^{n-2}z_0 + \dots + z_0^{n-1},$$

jolloin saamme

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)(a_1 + a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + \dots),$$

ja siis

$$\Delta_c \arg [f(z) - f(z_0)] = \Delta_c \arg (z - z_0) + \Delta_c \arg (a_1 + a_2 Z_2 + \dots).$$

Oikean jäsenen edellinen termi on $= 2\pi$, ja meidän on siis määrättävä r siten, että

$$\Delta_c \arg (a_1 + a_2 Z_2 + \dots) = 0.$$

Tämä tapahtuu varmaan, jos epäyhtälö

$$|a_1| > |a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + \dots|$$

on voimassa c -ympyrän kehällä.

Koska $|z_0| < r$, niin on

$$|Z_n| < n r^{n-1}.$$

Olkoon nyt

$R < \text{sarjan (41) suppenemissäde,}$

$M = \text{maks. } |f(z)|, \text{ kun } |z| = R.$

Silloin on

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n},$$

joten

$$|a_n Z_n| < M \frac{n r^{n-1}}{R^n}.$$

Jos $r < R$, niin saadaan peräkkäin:

$$\begin{aligned}
|a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + \dots| &\leq |a_2 Z_2| + |a_3 Z_3| + \dots \\
&< M \left(\frac{2r}{R^2} + \frac{3r^2}{R^3} + \dots \right) \\
&= \frac{M}{R} \left[\frac{1}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2} - 1 \right] = M \frac{r}{R} \frac{2 - \frac{r}{R}}{\left(1 - \frac{r}{R}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Määräämme nyt r :n arvon siten, että ensiksikin

$$r \leq \frac{R}{2},$$

jolloin edellisestä seuraa

$$|a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + \dots| < \frac{2Mr}{R(R-2r)},$$

ja että toiseksi

$$\frac{2Mr}{R(R-2r)} \leq |a_1|.$$

Nämä ehdot totenttava r :n arvo on

$$(42) \quad r = \frac{|a_1| R^2}{2(M + |a_1| R)}.$$

Kun z on näin määrättyllä r -säteisellä ympyrällä c ja z_0 sen sisällä, niin on

$$|a_2 Z_2 + a_3 Z_3 + \dots| < |a_1|,$$

josta voi päätätä, että

$$\Delta_c \arg(a_1 + a_2 Z_2 + \dots) = 0,$$

ja niinmuodoin

$$\frac{1}{2\pi} \Delta_c \arg[f(z) - f(z_0)] = 1.$$

c on siis vaadittu ympyrä.

Tehtävän toinen osa oli arvioida c :n kuva-alueen, C :n, reunan pienin etäisyys origosta, eli toisin sanoen funktion $u = f(z)$ itseisarvon alaraja c -ympyrän kehällä.

Aluksi voimme kirjoittaa

$$|u| \geq |a_1 z| - |a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots|.$$

Kun $|z| = r$, niin on

$$|a_n z^n| \leq M \left(\frac{r}{R}\right)^n$$

ja siis

$$|a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots| \leq M \left[\left(\frac{r}{R}\right)^2 + \left(\frac{r}{R}\right)^3 + \dots \right] = M \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - \frac{r}{R}},$$

mistä seuraa

$$|u| > |a_1| r - M \frac{\left(\frac{r}{R}\right)^2}{1 - \frac{r}{R}}.$$

Kun tässä r lle annetaan arvo (42), niin saadaan, että $|f(z)|$ on minimi c -ympyrän kehällä on $\geq q$, missä

$$(43) \quad q = \frac{|a_1|^2 R^2}{2(2M + |a_1|R)}.$$

Sarjan (41) käänteissarja suppenee siis ainakin q -säteisessä, origokeskisessä ympyrässä. Todellisuudessa se suppenee suuremmassakin ympyrässä, sillä r :ää arvioitaessa oli kahdessakin kohdassa ehdoton $<$ merkki, joka sallii r :n arvon suurennettavaksi, jolloin myös C :n reuna joka kohdaltaan siirtyy ulospäin. Käänteissarja suppenee siis myöskin q -säteisen ympyrän kehällä.

Koska $|a_1|$:n pienetessä q pienenee, niin voimme edellä saadut tulokset lausua seuraavasti:

Olkoon

$$u = a_1 z + a_2 z^2 + \dots, \quad a_1 \neq 0,$$

origokeskisessä ympyrässä suppeneva potenssisarja sekä

$$R < \text{sarjan suppenemissäde},$$

$$M \geq \text{maks. } |u|, \text{ kun } |z| = R,$$

$$g \leq |a_1|.$$

, C :n, reunan $u = f(z)$

Tämän sarjan käänteissarja

$$z = b_1 u + b_2 u^2 + \dots$$

suppenee silloin varmasti origokeskisessä ympyrässä, jonka säde on suurempi kuin

$$\varrho = \frac{g^2 R^2}{2(2M + gR)},$$

ja ϱ -säteinen ympyrä kuvautuu näiden sarjain kautta kehineen kääntäen yksikäsitteisesti erääseen z -tason origon ympäristöön.

34. Haemme nyt tämän nojalla sellaiset kierto- ja äärettömyyspisteiden ympärillä olevat alueet, jotka integralin (40) kautta kuvautuvat kääntäen yksikäsitteisesti eräisiin u -tason alueisiin.

Olkoon u_0 joku kiertopisteeseen a_r kuuluva integralin arvo. Vastaavaa integralin haaraa esittää a_r :n ympäristössä sarja (21):

$$u - u_0 = a_1 t + a_3 t^3 + \dots, \quad t = \sqrt{z - a_r}, \quad a_1 \neq 0.$$

Tämä suppenee, kun $|t| < |\sqrt{a_\mu - a_r}|$, jossa a_μ on a_r :tä likin kiertopiste. Edellisen n :on mukaan voidaan määrätä sellainen u_0 -keskinen ympyrä C_r , jossa (renna mukaan luettuna) tämän sarjan käänteissarja suppenee ja joka sarjain kautta kuvautuu kääntäen yksikäsitteisesti t -tason origon ympärille erääseen alueeseen c_r . Muunnos $z - a_r = t^2$ kuvaa taas c_r :n kääntäen yksikäsitteisesti Riemannin pinnalle pisteen a_r ympärillä olevaan alueeseen c_r . Integrali (40) sekä sen käänteisfunktion elementti (21a) kuvaavat siis kiertopisteen a_r ympäristön c_r kääntäen yksikäsitteisesti ympyrään C_r .

Olkoon sitten u_0 Riemannin pinnan jompaakumpaa äärettömyyttä vastaava integralin arvo, jolloin vastaavaa integralin haaraa tässä ∞ :ssä esittää sarja (22):

$$u - u_0 = b_1 t + b_2 t^2 + \dots, \quad t = z^{-1}, \quad b_1 \neq 0.$$

Edellisen n :on mukaan löytyy taas u -tasossa sellainen u_0 -keskinen ympyrä Γ_r , joka tämän sarjan kautta kuvautuu t -tason origon ympäristöön kääntäen yksikäsitteisesti. Muunnos $z = t^{-1}$ kuvaa

tämän alueen Riemannin pinnalle ulkopuolelle erästä käyrää γ_v , (jonka sisäpuolelle kaikki kiertopisteet jäävät). *Integrali* (40) ja sen käänteisfunktion elementti (22a) kuvaavat niinollen alueen γ_v , (joka merkitsee samannimisen käyrän ulkopuolta), kääntäen yksikäsitteisesti ympyrään Γ_r .

35. Leikkaamme Riemannin pinnasta pois täten määrättyt alueet $c_0, c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2$ (ks. n:o 31). Jäljelle jäävää pinnan osaa, joka on äärellinen alue, merkitsemme T :llä. Olkoon σ kiertopisteiden pienin etäisyys alueesta T .

Kun piste (z_0, s_0) on T :ssä tahi sen reunalla sekä u_0 siihen kuuluva integraalin arvo, niin vastaavaa integraalin haaraa z_0 :n ympäristössä esittävä sarja (20):

$$u - u_0 = a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

jossa

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{f(z_0)}},$$

suppenee ympyrässä, jonka säde on $\geq \sigma$.

Koska $|f(z)|$ on alueessa T äärellinen, niin on $|a_1|$:llä nollasta eroava minimiarvo g :

$$|a_1| \geq g > 0,$$

kun (z_0, s_0) on T :ssä tahi sen reunalla. Olkoon R määrätty positiivinen luku, joka täyttää ehdon $R < \sigma$, ja olkoon

$$G = \text{maks.} \left| \frac{1}{\sqrt{f(z)}} \right|$$

siinä laajennetussa alueessa, joka saadaan T :stä, kun siihen liitetään kiertopisteiden ympäristöistä ne pisteet, joiden etäisyys T :n reunasta on $\leq R$. Tämä maksimiarvo on varmasti äärellinen, koska R :n ollessa $< \sigma$ ei yksikään kiertopiste ole mainitussa alueessa. Jos kaavassa

$$u - u_0 = \int_{z_0}^z \frac{dz}{\sqrt{f(z)}}$$

suoritamme integroimisen pisteet z_0 ja z yhdistävää janaa pitkin, niin saamme siis, että

$$|u - u_0| \leq R G = M,$$

kun (z_0, s_0) on T :ssä tahi sen reunalla ja $|z - z_0| \leq R$.

Nyt voidaan sarjaan (20) ja sen käännteissarjaan (20a) soveluttaa n :on 33 tuloksia, riippumatta pisteen (z_0, s_0) paikasta, kun se vain on T :ssä tahi sen reunalla, jolloin saadaan seuraava lauselema:

Kun piste (z_0, s_0) on T :ssä tahi sen reunalla sekä u_0 sitä vastaava integraalin (40) arvo, ja kun σ , R , g ja G merkitsevät edellä määritettyjä lukuja, niin integraalin sarjakehitelmä pisteen z_0 ympäristössä:

$$u - u_0 = \frac{1}{\sqrt{f(z_0)}} (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 + \dots$$

suppenee ympyrässä, jonka säde on vähintään $= \sigma$, sekä sen käännteissarja

$$z - z_0 = \sqrt{f(z_0)} (u - u_0) + \frac{1}{4} f'(z_0) (u - u_0)^2 + \dots$$

siinä u_0 -keskisessä ympyrässä $C(u_0)$, jonka säde on

$$(44) \quad \varrho = \frac{g^2 R}{2(2G + g)},$$

vieläpä tämän ympyrän kehällä. Ympyrä $C(u_0)$ kuvautuu näiden sarjain kautta kääntäen yksikäsitteisesti eräseen z_0 :n ympäristöön $c(z_0)$.

36. Analyyttistä jatkamista varten peitämme z -tason neliöverkolla, jossa jokaisen neliön lävistäjä on $= \varrho$.

Olkoon (z_0, s_0) määrätty T :n piste ja u_0 yksi siihen kuuluvista integraalin arvoista. Merkitsemme A_0 :lla sen neliön, jossa u_0 on. Olkoot $A_1, A_2, \dots, A_8$ ne 8 peräkkäistä neliötä, jotka muodostavat A_0 :aa ympäröivän neliörenkaan, näitä ympäröivät neliöt olkoot järjestyksessä $A_9, A_{10}, \dots, A_{24}$ j.n.e. Edelleen merkitsemme $S_0 = A_0$ ja

$$S_{n+1} = S + A_{n+1} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Analyyttinen jatkaminen suoritetaan siten, että integralin käänteisfunktio määritellään ensin alueessa S_0 , jonka jälkeen sen merkitys laajennetaan alueeseen S_1 , siitä alueeseen S_2 j.n.e., joten siis edelliseen alueeseen aina liitetään yksi neliö A . Suoritamme todistuksen täydellisen induktion avulla.

Koska u_0 on pisteeseen (z_0, s_0) kuuluva integralin (40) arvo, niin integralin käänteisfunktioita, jonka merkitsemme $\varphi(u)$:lla, esittää u_0 :n ympäristössä sarja (20 a):

$$(45) \quad \varphi(u) = z_0 + \sqrt{f(z_0)} (u - u_0) + \frac{1}{4} f'(z_0) (u - u_0)^2 + \dots$$

Koska (z_0, s_0) olettamuksen mukaan on T :ssä, niin suppenee tämä sarja n :on 35 mukaan ainakin q -säteisessä ympyrässä $C(u_0)$ ja sen reunalla. Neliö A_0 jää kokonaan tämän ympyrän sisään, sillä A_0 :n lävistäjä on $= q$ ja ympyrän keskipiste u_0 on A_0 :ssa.

Integralin (40) käänteisfunktio $z = \varphi(u)$ on siten sarjan (45) kautta määritetty alueessa $S_0 = A_0$, jossa $\varphi(u)$ siis on yksikäsitteinen ja säännöllinen.

37. Todistamme sitten yhden mielivaltaisen askeleen suunnittelemassamme analyttisen jatkamisen ketjussa.

Oletamme siis, että integralin (40) käänteisfunktio $\varphi(u)$ on saatu määrättyksi yksikäsitteisenä, rationaliluonteisena funktiona alueessa S_n ja sen reunalla ja näytämme, että $\varphi(u)$ silloin on olemassa myös alueessa S_{n+1} ja että sillä siinä on äsken mainitut ominaisuudet.

Koska neliöillä A_n ja A_{n+1} on yhteinen sivu, niin on alueilla S_n ja A_{n+1} yhteinen reunan osa L , joka on yhtenäinen ja jonka muodostaa yksi, kaksi tahi kolme neliön A_{n+1} sivua.

Olkoon u_1 mielivaltainen L :n piste. Koska u_1 on alueen S_n reunalla, niin on käänteisfunktioilla siinä määrätty arvo $z_1 = \varphi(u_1)$. Erotamme kaksi tapausta:

A. Löytyy ainakin yksi L :n piste u_1 , jota vastaava piste z_1 on alueessa T tahi sen reunalla.

B. Kaikki pisteet $z_1 = \varphi(u_1)$ ovat T :n ulkopuolella, ja siis jossakin alueista $c_0, c_1, c_2, c_3, \gamma_1, \gamma_2$.

Tapaus A. Olkoon u_1 sellainen L :n piste, jota vastaava pinnan piste $z_1 = \varphi(u_1)$ on T :ssä tahi sen reunalla. Koska $\varphi(u)$ esittää alueessa S_n integralin (40) käänteisfunktioita, niin on u_1 eräs pisteeseen z_1 kuuluva integralin arvo. Tämän integralin haaran käänteisfunktioita esittää toiselta puolen n :on 11 mukaan sarja

$$(46) \quad z = z_1 + \sqrt{f'(z_1)}(u - u_1) + \frac{1}{4}f''(z_1)(u - u_1)^2 + \dots,$$

joka n :on 35 mukaan suppenee ainakin siinä ympyrässä $C(u_1)$, jolla on keskipiste u_1 ja säde ρ .

Olkoon Y se S_n :n ja $C(u_1)$:n yhteinen alue, jonka reunalla u_1 on. Koska u_1 on A_{n+1} :n piirillä ja $C(u_1)$:n säde on yhtä kuin A_{n+1} :n lävistäjä, niin A_{n+1} on kokonaan $C(u_1)$:ssä. Sentähden on myös alue $A_{n+1} + Y$ siinä ja sarja (46) esittää siis käänteisfunktioita erikoisesti tässä alueessa. Alueilla S_n ja $A_{n+1} + Y$ on yhteisenä yksi ainoa yhtenäinen alue Y . Koska $\varphi(u)$:lla ja sarjalla (46) on sama arvo z_1 alueen Y reunapisteessä u_1 , niin ne ovat n :on 32 mukaan identtiset koko alueessa Y ja siis käänteisfunktio $\varphi(u)$ voidaan jatkaa analyyttisesti yksikäsitteisenä, rationali-luonteisena funktiona alueeseen $S_{n+1} = S_n + A_{n+1}$, jolloin sarja (46) on $\varphi(u)$:n analyyttinen jatko.

Tapaus B. Ellei löydy yhtään L :n pistettä, jota $\varphi(u)$:n kautta vastaisi T :ssä tahi sen reunalla oleva piste, niin $\varphi(u)$ kuvaa L :n käyräksi l , joka kokonaan sijaitsee yhdessä alueista c_r, γ_i (kuv. 3). Olkoon u_1 määrätty L :n piste ja $z_1 = \varphi(u_1)$ sitä vastaava käänteisfunktion arvo. Erotamme kaksi alatapausta:

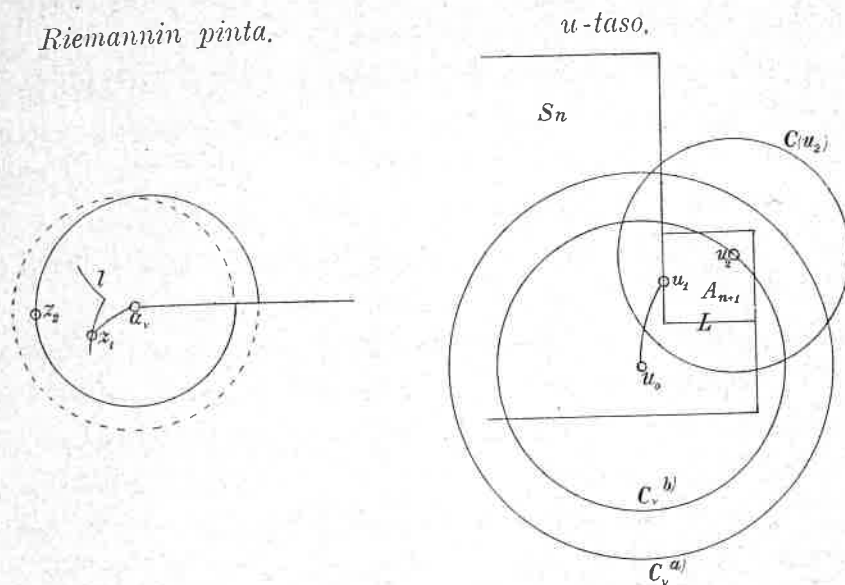
1° z_1 on kiertopisteen a_r ympäristössä c_r ,

2° z_1 on äärettömyyden ympäristössä γ_i .

Alatapaus 1°. Annamme z :n liikkua, c_r :ssä pysyen, jatkuvasti pisteestä z_1 kiertopisteeseen a_r (kuv. 3). Integraali muuttuu silloin arvosta u_1 erääseen arvoon u_0 . N :on 34 mukaan kuvaa integralin käänteisfunktion elementti (21 a):

$$(47) \quad z = a_r + \frac{1}{4}f''(a_r)(u - u_0)^2 + \dots$$

Riemannin pinta.



Kuv. 3.

u_0 -keskisen ympyrän C_v , kääntäen yksikäsitteisesti alueeseen c_r . joten (47) antaa käänteisfunktiolle pisteessä u_1 arvon z_1 samoin kuin $\varphi(u)$.

a) Olkoon Y se S_n :n ja C_v :n (kuviassa $C_v^{a)}$ yhteinen alue, johon u_1 kuuluu. Jos neliö A_{n+1} on kokonaan C_v :ssä, niin on myös alue $A_{n+1} + Y$ siinä, ja tällä alueella on S_n :n kanssa yhteisenä ainoastaan alue Y . Koska sarja (47) ja $\varphi(u)$ antavat pisteessä u_1 käänteisfunktiolle saman arvon z_1 , niin ne ovat n :on 32 mukaan identtiset koko Y :ssä ja $\varphi(u)$ tulee jatketuksi alueeseen $S_n + A_{n+1} = S_{n+1}$ rationaliluonteisena, yksikäsitteisenä funktiona.

b) Ellei A_{n+1} ole kokonaan C_v :ssä, niin leikkaa C_v :n kehä sitä (kuv. 3, $C_v^{b)}$. Olkoon u_2 joku piste A_{n+1} :ssä olevalla C_v :n kaarella. Tätä sarjan (47) kautta vastaava käänteisfunktion arvo z_2 on silloin c_v :n ja siis myös T :n reunalla. Sentähden käänteisfunktion sarjakehitelmä u_2 :n ympäristössä

$$(48) \quad z = z_2 + \sqrt{f(z_2)}(u - u_2) + \dots$$

suppenee n :on 35 mukaan ainakin ϱ -säteisessä ympyrässä $C(u_2)$, jonka sisälle nyt A_{n+1} kokonaan jää. Koska (47) ja (48) molem-

mat antavat käänteisfunktiolle saman arvon z_2 pisteessä u_2 , niin ovat ne n: on 32 mukaan identtiset siinä C_v :n ja $C(u_2)$:n yhteisessä alueessa, jossa u_2 on. Osan tästä alueesta muodostaa C_v :ssä oleva A_{n+1} :n osa, jonka reunalla piste u_1 on. Sentähden antaa sarja (48) erikoisesti tässä pisteessä käänteisfunktiolle saman arvon kuin sarja (47), eli arvon z_1 , joka on myös $\varphi(u)$:n arvo siinä.

Nyt voidaan jatkaa aivan kuin ennen: Olkoon Y se S_n :n ja $C(u_2)$:n yhteinen alue, johon u_1 kuuluu. Koska A_{n+1} on kokonaan $C(u_2)$:ssa, niin on myös alue $A_{n+1} + Y$ siinä, ja (48) esittää käänteisfunktiota erikoisesti tässä alueessa. Nyt on alueilla $A_{n+1} + Y$ ja S_n yhteisenä ainoastaan alue Y , jonka pisteessä u_1 sekä $\varphi(u)$ että sarja (48) kumpikin antaa käänteisfunktiolle saman arvon z_1 . Sentähden ovat ne identtiset Y :ssä ja määrittelevät alueessa $S_n + A_{n+1} = S_{n+1}$ yksikäsitteisen, rationaliluonteisen funktion, joka siinä esittää integralin käänteisfunktiota.

Alatapaus 2°. S_n :n ja A_{n+1} :n yhteinen reunan osa L on äärettömyyden ympärillä olevassa alueessa γ_i . Annamme z :n mennä z_1 :stä γ_i :ssä olevaan ∞ -pisteeseen. Integrali u on samalla kulkenut u_1 :stä erääseen pisteeseen u_0 . Silloin kuvautuu γ_i n: on 34 mukaan integralin (40) ja sen käänteisfunktion elementin (22a):

$$(49) \quad z = -\frac{1}{\sqrt{a_0}} \frac{1}{u - u_0} - \frac{a_1}{a_0} + \dots$$

kautta kääntäen yksikäsitteisesti u_0 -keskiseen ympyrään Γ_i . Sarja (49) antaa sentähden käänteisfunktiolle pisteessä u_1 arvon z_1 samoin kuin $\varphi(u)$. Kuten edellisessä alatapauksessa on tässäkin erotettava taas ne tapaukset, että A_{n+1} on kokonaan tahi vain osaksi Γ_i :ssä. Molempain tapausten käsittely on aivan sama kuin edellä.

Näin olemme saaneet tämän n: on alussa lausutun väittämän täydelleen todistetuksi.

38. Mutta tämä yhdessä n: on 36 kanssa ratkaiseekin asetetun käänteistehtävän. Sillä n: on 36 mukaan S_0 :ssa sarjan (45) kautta määritelty integralin (40) käänteisfunktio $\varphi(u)$ on siinä yksikäsit-

teinen ja säännöllinen analyttinen funktio, joka edellisen mukaan voidaan jatkaa käänteisfunktioita esittävänä yksikäsitteisenä ja rationaliluonteisena funktiona alueeseen S_1 , tästä alueeseen S_2 , siitä alueeseen S_3 j. n. e. Näin saamme lopuksi:

Integralin (40) käänteisfunktio on olemassa koko tasossa yksikäsitteisenä, äärellisyydessä rationaliluonteisena funktiona.

39. Esitetyssä todistuksessa yleinen analyttisen jatkamisen periaate yhdessä integraalin käänteissarjain suppenemissäteiden alarajan kanssa tekee mahdolliseksi annetun käänteisfunktion elementin merkityksen laajentamisen jokaiseen äärelliseen alueeseen. Tämä mitä yksinkertaisin menettely ei sisällä mitään asialle vieraita välineitä ja ajatuksia kuten kaksi ensin suoritettua todistusta. Se on peräisin E. PICARD'ilta,¹⁾ joka sen luennoillaan Sorbonnessa on ensi kertaa esittänyt. Edellä suoritettu todistus poikkeaa muutamissa vähäpätöisissä kohdissa PICARD'in menettelystä. Suppenemissäteiden alarajaa ja kierto- ja äärettömyyspisteiden ympäristöjen kuvausta vastaa hänellä näiden kanssa yhtäpitävä lauselema: *Jokaisen integraalin arvon ympäri voidaan piirtää kerta kaikkiaan määrättyllä säteellä ympyrä, jonka sisällä käänteisfunktio on yksikäsitteinen.*

Vuosi PICARD'in kirjoituksen ilmestymisen jälkeen julkaisi E. PHRAGMÉN²⁾ samaan ajatukseen perustuvan tutkimuksen laajemmasta tehtävästä, nim. algebrallisen differentiaaliyhtälön

$$F\left(u, \frac{du}{dz}\right) = 0$$

integroimisesta. BRIOT ja BOUQUET³⁾ olivat käsitelleet tätä diffe-

¹⁾ E. PICARD, *Sur l'inversion de l'intégrale elliptique et l'irréductibilité de ses périodes* (Bulletin des sciences mathématiques, T. XIV, 1890, 1. partie, siv. 107).

²⁾ E. PHRAGMÉN, *Zur Theorie der Differentialgleichung von Briot und Bouquet* (Öfversigt af K. Vetenskaps-Akademien's Föreläsningar 1891, N:o 9, Stockholm).

³⁾ BRIOT et BOUQUET, *Théorie des fonctions elliptiques*, Paris 1875, siv. 376.

rentialiyhtälöä, ja samalla I lajin elliptisen integralin kääntämistä, mutta tyytyivät ratkaisemaan sen vain pisteen ympäristössä, jonka I lajin elliptisessä integralissa suorittavat sarjat (20 a), (21 a), (22 a). Tästä yksinomaan ei kuitenkaan seuraa käänteisfunktion koko tasossa olemassaolo ja yksikäsitteisyys, vaan täytyy välttämättä käyttää apuna käänteissarjain suppenemissäteiden alarajaa tahi jotakin muuta välinettä, joka tekee mahdolliseksi siirtymisen pisteen ympäristöstä suureen alueeseen. Tässä onkin todistuksen ratkaiseva kohta.

Analyttisen jatkamisen keinoa käyttää myöhemmin K. BOEHM¹⁾ elliptisten funktioiden ja integralien oppikirjassaan.

IV. Konformikuvaustodistus.

40. Nyt esitettävässä todistuksessa osoitamme, että Riemannin pinta voidaan jakaa osiin, joista jokainen tulee I lajin elliptisen integralin kautta kuvatuksi kolmioon. Nämät kolmiot muodostavat yhdessä suunnikkaan, johon leikattu Riemannin pinta kääntäen yksikäsitteisesti kuvantuu. Menettely perustuu n:ossa 12 esitettyyn konformikuvausta koskevaan yleiseen lauselmaan.

Merkitsemme z -tasoon neliöjuuren

$$s = \sqrt{a_0(z - a_0)(z - a_1)(z - a_2)(z - a_3)}$$

neljä kiertopistettä a_0, a_1, a_2, a_3 . Voimme olettaa, ettei kolmea kiertopistettä ole samalla suoralla, sillä jos näin olisi, niin voisimme linearisen muunnoksen kautta palautua yleiseen tapaukseen. Olkoot a, b, c kolme mielivaltaista kiertopisteistä a_0, a_1, a_2, a_3 . Pisteiden a, b, c kautta kulkeva ympyrä jakaa z -tason kahteen alue-

¹⁾ KARL BOEHM, *Elliptische Funktionen*, II Teil, (Sammlung Schubert LXI), Leipzig 1910, siv. 45.

seen. Olkoon (d) niistä se, jossa neljäs kiertopiste, d , ei ole. To-
distamme väittämän:

Integraali

(50)

$$u = \int \frac{dz}{s}$$

*kuvaa alueen (d) kääntäen yksikäsitteisesti ja muualla paitsi pis-
teissä a, b, c konformisesti kolmiomaiseen, kaikkialla ulospäin ku-
peran käyrän rajoittamaan alueeseen $U(d)$. Pisteitä a, b, c vas-
taavissa pisteissä A, B, C muodostaa $U(d)$:n reuna sisäkulmat $\frac{\pi}{2}$.*

Huomaamme ensin, että integraali (50) on yksikäsitteinen ja
säännöllinen alueen (d) sisällä, koska (d) on yhdestiyhtenäinen
alue, jossa integrandi on yksikäsitteinen ja säännöllinen, ja että
integraali pysyy jatkuvana tämän alueen reunalla, vieläpä säännölli-
senä kaikkialla muualla paitsi kiertopisteissä a, b, c . On tutkittava,
minkälaiseksi käyräksi (d) :n reuna kuvautuu integralin kautta.

41. Edellisestä seuraa aluksi, että (d) :n reunan kuvakäyrä
on suljettu, sekä säännöllinen muualla paitsi pisteitä a, b, c vas-
taavissa pisteissä A, B, C . Seuraavassa oletamme pisteet a, b, c
merkityksi niin, että ne (d) :n ympäri positiiviseen suuntaan kul-
jettaessa kohdataan juuri tässä järjestyksessä.

Tarkastamme lähemmin kuvakäyrän tangentin kiertymistä
 z :n kulkiessa (d) :n reunakäyrää pitkin positiiviseen suuntaan. On
käsiteltävä erikseen käyrän säännölliset osat, nim. välit $AB, BC,$
 CA , ja erikseen epäsäännölliset pisteet A, B, C .

Olkoon siis z eräs (d) -alueen reunakäyrän piste, joka ei ole
kiertopiste, ja v se kulma, jonka reunakäyrän tangentti, piirrettynä
kulkusuuntaan, tässä pisteessä muodostaa positiivisen x -akselin
kanssa. Jos V on u -tasossa olevan kuvakäyrän vastaavan tange-
ntin suuntakulma, niin on silloin

$$V = v + \arg \frac{du}{dz}.$$

n kääntämistä,
iristössä, jonka
, (21 a), (22 a).
ktion koko ta-
littama ä käyt-
aa tahi jotakin
n pisteen ym-
sen ratkaiseva
työhemmin K.
irjassaan.

, että Rieman-
I lajin ellipti-
kolmiot muo-
ain pinta kään-
n:ossa 12 esi-
naan.

$a_3)$

t, ettei kolmea
, niin voisimme
ukseen. Olkoot
 t_2, a_3 . Pistei-
kahteen aluee-

mmulung Schubert

Koska

$$\frac{du}{dz} = \frac{1}{s},$$

niin saamme tästä:

$$(51) \quad V = v - \arg \sqrt{a_0} - \frac{1}{2} \left(\arg(z-a) + \arg(z-b) \right. \\ \left. + \arg(z-c) + \arg(z-d) \right).$$

Kun z alueen (d) reunaa pitkin siirtyy pisteeseen $z + \delta z$, niin toteuttavat vastaavat vaihekulmain muutokset yhtälön

$$(52) \quad \delta V = \delta v - \frac{1}{2} \left(\delta \arg(z-a) + \delta \arg(z-b) \right. \\ \left. + \delta \arg(z-c) + \delta \arg(z-d) \right).$$

Kun δz on ympyrän (abc) kehällä kiertopisteiden välisillä kaarilla, niin joka tapauksessa on (vrt. kuv. 4 ja 5)

$$\delta \arg(z-a) = \delta \arg(z-b) = \delta \arg(z-c) = \frac{1}{2} \delta \varphi,$$

jossa $\delta \varphi$ on kaarta δz vastaava keskuskulma. Koska ympyrän tangentin suuntakulman v muutos on

$$\delta v = \delta \varphi,$$

niin näistä saadaan (52):n mukaan

$$(53) \quad \delta V = \frac{1}{4} \delta \varphi - \frac{1}{2} \delta \arg(z-d).$$

Tahdomme tutkia δV :n merkkiä, jolloin on erotettavana kolme eri tapausta, riippuen d -pisteen paikasta.

Tapaus 1°. Piste d on ympyrän (abc) ulkopuolella (kuv. 4). Kun kaari δz on osa kaaresta EFG , niin on

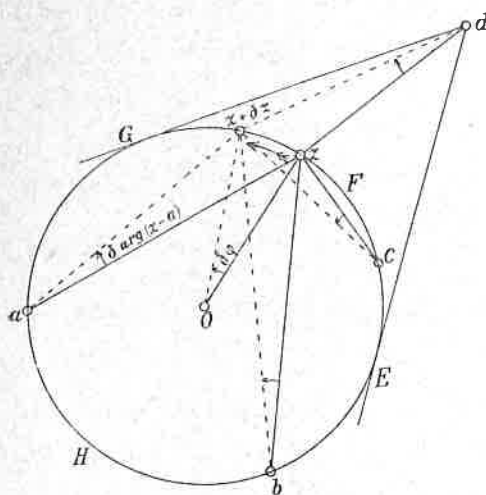
$$\delta \arg(z-d) < 0.$$

Kun taas δz on kaarella GHE , niin on

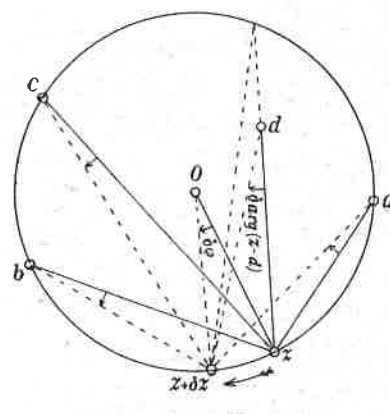
$$0 < \delta \arg(z-d) < \frac{1}{2} \delta \varphi.$$

Jos sivuamispiste E tahi G jakaa kaaren δz kahteen osaan, niin on EFG :llä olevaa osaa vastaava $\arg(z-d)$:n muutos negatiivinen ja toista osaa vastaava positiivinen, mutta pienempi kuin $\frac{1}{2} \delta \varphi$, jonka tähden on

$$\delta \arg(z-d) < \frac{1}{2} \delta \varphi.$$



Kuv. 4.



Kuv. 5.

Yhtälöstä (53) nähdään näiden epäyhtälöiden nojalla, että joka tapauksessa δV on *positiivinen*.

Tapaus 2°. Piste d on ympyrän (abc) sisäpuolella. Alue (d) on tällöin ympyrän ulkopuoli. Kun siis z kiertää (d) :n ympäri positiivisen suuntaan, niin ovat $\delta \varphi$ ja $\delta \arg(z-d)$ negatiivisia ja toteuttavat kuvion 5 mukaan epäyhtälön

$$\delta \arg(z-d) < \frac{1}{2} \delta \varphi.$$

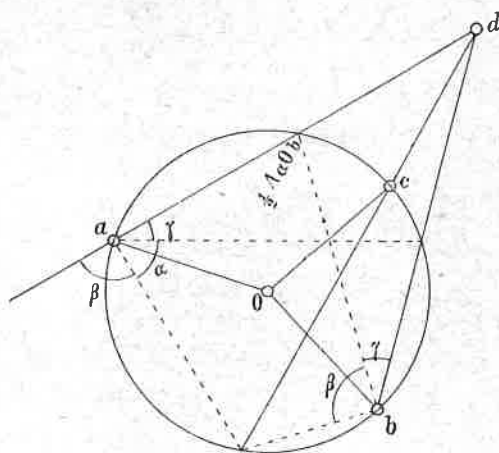
Sentähden on (53):n mukaan δV taas *positiivinen*.

Tapaus 3°. Piste d on ympyrän kehällä, jolloin sen voimme olettaa olevan kaarella ca . Olkoon esim. ympyrän sisäpuoli merkitty (d) :llä. Tässä tapauksessa on

$$\delta \arg(z-d) = \frac{1}{2} \delta \varphi,$$

joten (53):n mukaan $\delta V = 0$.

Edellisen mukaan siis tapauksissa 1° ja 2° (d).n reunan kuvakäyrän tangentti kiertää ympyrän kaaria ab , bc , ca vastavilla osilla AB , BC , CA aina positiiviseen suuntaan. Tapauksessa 3° vastaa kaaria ab , bc , cd , da suoraviivaiset janaat.



Kuv. 6.

Määräämme tangentin kiertokulman suuruuden käyrillä AB , BC ja CA . Kuvion 6 mukaan on esimerkiksi ab :llä

$$\Delta_a^b \varphi = \angle aOb, \quad \Delta_a^b \arg(z-d) = \angle adb.$$

Yhtälöstä (53) saadaan silloin V :n lisäykseksi AB :llä:

$$\Delta_A^B V = \frac{1}{4} \angle aOb - \frac{1}{2} \angle adb.$$

Samoin saadaan yhtälöt

$$\Delta_B^C V = \frac{1}{4} \angle bOc - \frac{1}{2} \angle bdc,$$

$$\Delta_C^A V = \frac{1}{4} \angle cOa - \frac{1}{2} \angle cda.$$

Koska

$$\angle adb + \angle bdc + \angle cda = 0,$$

niin tulee edellisistä yhteenlaskemalla

2° (d):n reunan
a, b, c, e a vastaa-
ntaan. Tapauk-
kivaiset janat.

d

$$(54) \quad \triangle_A^B V + \triangle_B^C V + \triangle_C^A V = \frac{\pi}{2} \quad 1).$$

Kun jokainen kiertokulma on positiivinen, niin tästä yhtälöstä johtuu, että *tangentin kiertokulma kullakin käyrällä AB, BC, CA erikseen ja myös kahdella yhteensä on pienempi kuin $\frac{\pi}{2}$.*

42. Nyt tarkastamme pisteitä a, b, c (ja d tapauksessa 3°). Koska kaikkien näiden pisteiden käsittely on samanlainen, niin suoritamme sen vain a:han nähden.

a:ta vastaa integraalin (50) kautta määrätty piste A, joka jatkuvasti liittyy muihin reuna-arvoihin. A:ssa on (d):n reunan kuvakäyrällä kaksi tangenttia, joiden välinen kulma on $\frac{\pi}{2}$, niin että käyrän muodostama kulma $\frac{\pi}{2}$ on kulkusuuntaan nähden vasemmalla kädellä.

Tämän todistamiseksi annamme z:n mennä V:n lausekkeessa (51) ensin yhdeltä sitten toiselta puolen pisteeseen a. Lausekkeessa (51) ovat kaikki muut kulmat pisteessä a yksikäsitteisiä ja jatkuvia paitsi $\arg(z - a)$. Silläkin on määrättyt raja-arvot, kun z eri puolilta menee a:han, jonka tähden kuvakäyrällä on pisteessä A kaksi määrättyä tangenttia. Alueen (d) ympäri positiiviseen suuntaan kuljettaessa vähenee $\arg(z - a)$ pisteessä a kulmalla π . Yhtälön (51) mukaan silloin V lisääntyy kulmalla $\frac{\pi}{2}$, joten väittämä on todistettu.

43. Edellisten tulosten avulla voidaan nyt tapaus 3° helposti käsitellä. Kaikkien neljän kiertopisteen kautta kulkevan ympyränkehän kuvaksi tulee suorakulmion piiri. Sillä n:on 41 mukaan on kuvakäyrä suljettu ja kaaria ab, bc, cd, da vastaavat janat AB, BC, CD, DA, jotka n:on 42 mukaan muo-

1) Kuvion 6 mukaan saadaan kiertokulmain $\triangle V$ lausekkeista

$$\triangle_A^B V = \frac{1}{2} \gamma, \quad \triangle_B^C V = \frac{1}{2} \alpha, \quad \triangle_C^A V = \frac{1}{2} \beta.$$

Koska $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, niin saadaan myös näistä yhtälö (54) esille.

ten käyrillä AB,
b:llä

adb

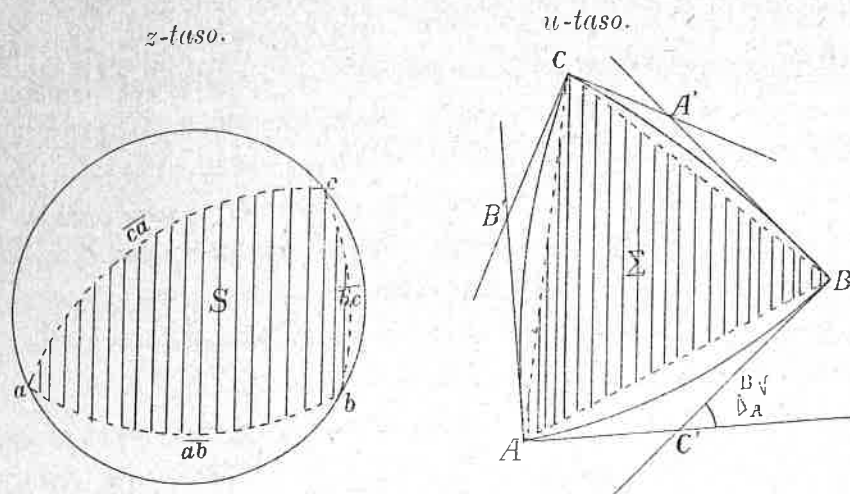
B:llä:

dostavat pisteissä A, B, C, D kulmat $\frac{\pi}{2}$, mistä seuraa, että kuvio $ABCD$ on suorakulmio. Koska vielä suorat kulmat ovat suuntaan $ABCD$ kuljettaessa vasemmalla kädellä, niin tulee suorakulmion sisäpuoli kierretyksi positiiviseen suuntaan. Jos siis ympyrän kehää pitkin suunnassa $abcd$ kuljettaessa ympyrän sisäpuoli kierretään positiiviseen suuntaan, niin kuvautuu se n :on 12 konformikuvausväittämän mukaan kääntäen yksikäsitteisesti suorakulmioon $ABCD$.

Täten saatu kuvaus voidaan yleisen peilausperiaatteen mukaan jatkaa koko Riemannin pinnalle, kun pinnan leikkaukset tehdään ympyrän $abcd$ kaaria myöten. Leikatun Riemannin pinnan kuvaksi saadaan tällöin suorakulmio, josta edellämainittu muodostaa yhden neljänneksen.¹⁾ Siitä jatkuu kuvaus lopullisesti jakso-modulinen avulla koko u -tasoon niinkuin n :ossa 18. Tässä tapauksessa kuitenkin on u -tason aukoton ja yksinkertainen peittyminen itsestään selvä. Emme pysähdy tähän sen enempää, vaan ryhdyimme yleisen tapauksen tutkimiseen.

44. Kun kaarelle AB piirretyn tangentin sivuamispisteen annamme liikkua A :sta B :hen, niin tangentti kiertyy n :on 41 mukaan joka pisteessä positiiviseen suuntaan. Koska koko kiertokulma käyrällä AB on $< \frac{\pi}{2}$ (ks. ed. siv.), niin käyrä AB ei leikkaa itseään. Sen päätepisteisiin piirretyt tangentit leikkaavat samoista syistä toisensa janan AB oikealla puolen olevassa pisteessä C' (kuv. 7), ja käyrä AB jää kokonaan kolmioon $AC'B$. Kolmion kulman C' vieruskulma on juuri tangentin kiertokulma AB :llä, n :on 41 merkinnän mukaan $\triangle_A^B V$. — Samalla tavalla nähdään, että kaaret BC ja CA eivät leikkaa itseään ja että ne ovat vastaavissa kolmioissa $BA'C$ ja $CB'A$, joiden kulmain A' ja B' vieruskulmat ovat $\triangle_B^C V$ ja $\triangle_C^A V$.

¹⁾ Vrt. H. BURKHARDT, *Elliptische Functionen*, Leipzig 1906. §§ 8, 9.



Kuv. 7.

Väitämme, että pisteet A , B ja C eivät ole samalla suoralla, vaan että suoraviivainen kuvio ABC on kolmio, joka, sen ympäri merkinnän suunnassa kuljettaessa, on vasemmalla kädellä.

Koska $\angle C'BA'$ numeron 42 mukaan on $= \frac{\pi}{2}$, niin on

$\angle ABC < \frac{\pi}{2}$, sillä molemmat sen kyljet ovat kulmassa $C'BA'$.

Väittäjä tulee todistetuksi, kun edellisen lisäksi näytämme, että $\angle ABC$ on > 0 .

Kuvion 7 mukaan saadaan yhtälö

$$\angle ABC = \frac{\pi}{2} - (\angle C'BA + \angle CBA')$$

ja epäyhtälöt

$$\angle C'BA < \angle_A^B V, \quad \angle CBA' < \angle_B^C V.$$

Kun otamme huomioon, että n:ön 41 (siv. 67) mukaan on

$$\angle_A^B V + \angle_B^C V < \frac{\pi}{2},$$

niin johtuu edellisistä, että $\angle ABC$ on > 0 , mikä todistaa väittämän.

Tässä kohdassa huomautamme, että samalla kun on näytetty, etteivät pisteet A , B ja C ole samalla suoralla, on myös todistettu, että integraalin (50) jaksomodulien suhde ei ole reaalinen. Jos näet

kuviossa 1 (siv. 15) annetaan esim. leikkauksen B muuttua jatkuvasti, kunnes se kulkee pisteiden a_0 ja a_1 välillä samaa käyrää pitkin edestakaisin, niin nähdään, että kahden kiertopisteen välillä suoritettu integrali on jaksomodulin puolisko. Sentähden myös vektorit AB ja AC (kuv. 7), jotka edustavat kiertopisteiden a ja b sekä a ja c välillä suoritettuja integraleja, ovat jaksomodulien puoliskoja, joiden suhde edellisen nojalla on oleellinen kompleksiluku.

45. Koska suunnassa ABC kuljettaessa kolmio on vasemmalla kädellä, ja koska kolmiot $AC'B$, $BA'C$ ja $CB'A$, joissa käyrät AB , BC ja CA ovat, sijaitsevat vastaavasti sivujen AB , BC , CA oikealla puolen, niin käyrät AB , BC , CA eivät leikkaa toisiaan. Koska ne eivät leikkaa itseäänkään (siv. 68), niin niiden muodostama suljettu käyrä, (d) -alueen reunan kuvakäyrä, on yksinkertainen ja sellaisena rajoittaa yhdestiyhtenäisen alueen $U(d)$, nim. käyräviivaisen kolmion ABC . Sen pinta on, samoin kuin suoraviivaisen kolmion ABC , merkinnän suunnassa kuljettaessa vasemmalla kädellä, ja sen reunakäyrä n :on 41 ja 42 mukaan joka pisteessään ulospäin kupera.

Nyt saadaan integraliin (50) ja alueisiin (d) ja $U(d)$ sovelluttaa n :on 12 konformikuvausväittämää, sillä integrali on (d) :ssä yksikäsitteinen ja säännöllinen analyttinen funktio sekä reunalla jatkuva. Alue (d) kuvautuu siis alueeseen $U(d)$ sillä tavalla kuin n :ossa 40 väitettiin.

Suoraviivainen kolmio ABC , jonka merkitsemme Σ :lla, jää alueen $U(d)$ sisään, niin että kolmion piiri kohtaa $U(d)$:n reunan ainoastaan kärkipisteissä. Koska alue (d) on $U(d)$:n kääntäen yksikäsitteinen kuva, niin kolmio Σ kuvautuu kääntäen yksikäsitteisesti, eräaseen (d) :ssä olevaan alueeseen S , jonka reuna kohtaa (d) :n reunan vain pisteissä a , b , c . Alue S on kolmionmuotoinen, jonka käyräviivaiset sivut tekevät pisteissä a , b , c kaksi kertaa niin suuret kulmat kuin Σ :n vastaavat kulmat. Merkitsemme S :n sivut merkeillä $\overline{ab}$, $\overline{bc}$, $\overline{ca}$.

46. Näiden tulosten avulla voimme tutkia, millaiseen alueeseen z -taso kuvautuu integralin (50) kautta.

$a_0 a_3$. Koska käyrä $a_0 a_2$ on tämän mukaan sekä (a_3) :ssa että (a_1) :ssä, niin on se niiden yhteisessä alueessa, $(a_0 a_2)$:ssa.

Kuvauksen jatkamistavasta seuraa, että alue $S_3 + S_1$ kuvautuu kääntäen yksikäsitteisesti nelikulmioon $\Sigma_3 + \Sigma_1$. Tämä nelikulmio on suunnikas.

Todistaaksemme sen otamme pisteet a_1 ja a_2 kiertävän suljetun käyrän L , jonka annamme jatkuvasti muuttua, kunnes se kulkee käyrää $a_1 a_2$ pitkin sekä tiiviisti a_1 :n ja a_2 :n ympäri. Kun integroidaan tätä pitkin, niin että a_1 ja a_2 tullaan kiertäneeksi negatiiviseen suuntaan, saadaan

$$\int_L = 2 \int_{a_1}^{a_2}.$$

Samoin menetellään pisteiden a_0 ja a_3 suhteen, jolloin saadaan käyrä L' , joka kulkee pitkin käyrää $a_0 a_3$, ja integrali

$$\int_{L'} = -2 \int_{a_0}^{a_3}.$$

Jos nyt L ja L' yhdistetään eräällä käyrällä l , niin muodostavat L, l ja L' yhdestiyhtenäisen alueen reunan, jonka ympäri suoritettu integrali Cauchy'n väittämän mukaan on nolla. Koska integrandin arvot l :llä vastakkaisiin suuntiin integroitaessa ovat yhtäsuuret (sillä kierretäänhan välillä kahden kiertopisteen ympäri), niin vastaavat integralit hävittävät toisensa, joten jäljelle jää

$$\int_L + \int_{L'} = 0,$$

eli

$$\int_{a_1}^{a_2} = \int_{a_0}^{a_3}.$$

Tässä vasemman puoleinen integrali edustaa juuri vektoria $A_1 A_2$ ja oikean puoleinen vektoria $A_0 A_3$. Siis nämä nelikulmion $\Sigma_3 + \Sigma_1$ vastakkaiset sivut ovat yhtä suuret ja yhdensuuntaiset, joten $\Sigma_3 + \Sigma_1$ on suunnikas.

Alueen $S_3 + S_1$ kääntäen yksikäsitteinen kuva on suunnikas $\Sigma_3 + \Sigma_1$.

Seuraava askel on jatkaa kuvaus alueesta (a_1) alueeseen (a_2) . Tämä suoritetaan aivan samalla tavalla kuin jatkaminen (a_3) :sta (a_1) :een. (a_1) :tä kuvattaessa on jo saatu eräs (a_2) :n osa kuvatuksi, nim. näiden alueiden yhteinen osa, kaksikulmio $(a_0 a_3)$. Kun z tästä alueesta lähtien liikkuu alueessa (a_2) , niin liikkuu u samalla alueessa $U(a_2)$, jolla $U(a_1)$:n kanssa on yhteisenä $(a_0 a_3)$:n kuva-alue, kaksikulmio $(A_0 A_3)$. Kolmion $A_0 A_3 A'_1 (= \Sigma_2)$, jossa A'_1 on käyräviivaisen kolmion $U(a_2)$ kolmas kärkipiste, kuvaksi tulee täten (a_2) :ssa oleva alue S_2 , jonka rajoittavat käyrät $\overline{a_0 a_3}$, $\overline{a_1 a_3}$ ja $\overline{a_0 a_1}$. Koska käyrä $\overline{a_0 a_3}$ on sekä (a_1) :ssä että (a_2) :ssa, niin on se niiden yhteisessä alueessa $(a_0 a_3)$.

Mitä käyrään $\overline{a_0 a_1}$ tulee, niin todistamme, että se on aivan sama kuin $\overline{a_0 a_1}$. Todistusta varten tarkastamme (a_3) :ssa kahta integraalin haaraa: alkuperäistä, $u(z)$, joka kuvasi (a_3) :n alueeseen $U(a_3)$, ja sitä, $\bar{u}(z)$, johon äskeisen jatkamisen kautta johdutaan, kun z jo kuvastusta kaksikulmiosta $(a_0 a_1)$ lähtien liikkuu (a_3) :ssa. Tällöin tulee z kiertäneeksi kerran pisteen a_0 ympäri, josta seuraa, että integrandin $\frac{1}{s}$ arvot kysymyksenalaisilla haaroilla ovat samassa pisteessä vastakkaiset ja siis myös a_0 :sta z :aan suoritettut integraalit vastakkaiset. Koska molempain haarain arvot ovat a_0 :ssa samat, nim. $= A_0$, niin saadaan:

$$\bar{u}(z) - A_0 = -[u(z) - A_0].$$

Haaran $\bar{u}$ välittämä (a_3) :n kuva on niinmuodoin haaran u välittämän kuvan kanssa symmetrinen pisteen A_0 suhteen. Tästä johtuu, että ensiksi pisteen a_1 kuva $U(a_2)$:ssa, piste A'_1 , on symmetrinen A_1 :n kanssa, jolloin janat $A_0 A'_1$ ja $A_0 A_1$ ovat symmetrisessä asennossa A_0 :n suhteen, ja että toiseksi näiden symmetristen janain kuvat z -tasossa ovat samat. Janan $A_0 A'_1$ kuvakäyrä $\overline{a_0 a_1}$ on siis sama kuin käyrä $\overline{a_0 a_1}$. — Pisteiden A_1 ja A'_1 symmetrisyydestä johtuu myös, että kuvio $\Sigma_1 + \Sigma_2$ on suunnikas.

Koska suorittamassamme kuvauksessa alueeseen S_2 kuuluvat integraalin arvot $\overline{a_0 a_1}$:llä eivät ole samat kuin alueeseen S_3 kuul-

luvat, niin pitää, saadaksemme yksikäsitteisen kuvauksen z -tasosta. estää z menemästä käyrän $\overline{a_0 a_1}$ yli tekemällä sitä pitkin leikkaus.

Käyrää $\overline{a_0 a_1}$ pitkin leikattuna kuvautuu alue $S_3 + S_1 + S_2$ kääntäen yksikäsitteisesti nelikulmioon $\Sigma_3 + \Sigma_1 + \Sigma_2$.

Vihdoin jatkamme kuvauksen alueiden (a_2) ja (a_0) yhteisen alueen $(a_1 a_3)$ kautta alueeseen (a_0) . Kuvaksi saadaan alue $U(a_0)$, jolla alueen $U(a_2)$ kanssa yhteisenä on $(a_1 a_3)$:n kuva-alue, kaksikulmio $(A'_1 A_3)$. Olkoon $U(a_0)$:n kolmas kärkipiste A'_2 . Suoraviivainen kolmio $A'_1 A_3 A'_2 (= \Sigma_0)$ saa kuva-alueekseen (a_0) :ssa olevan alueen S_0 , jonka rajottavat käyrät $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_1 a_2}$ ja $\overline{a_2 a_3}$. Todistamme kaksi viimeksimainittua identtiseksi käyriin $\overline{a_1 a_2}$ ja $\overline{a_2 a_3}$ kanssa.

Todistaaksemme käyrän $\overline{a_1 a_2}$ käyräksi $\overline{a_1 a_2}$ tarkastelemme kahta integralin haaraa alueessa (a_0) : sitä, johon alkuperäisestä haarasta johdutaan, kun z menee (a_3) :sta kaksikulmion $(a_1 a_2)$ kautta alueeseen (a_0) , olkoon se $u(z)$, ja sitä, joka kuvasi (a_0) :n alueeseen $U(a_0)$, olkoon se $\bar{u}(z)$. Nämä haarat eroavat toisistaan jaksomodulilla, sillä koska edellisestä haarasta johdutaan jälkimmäiseen kiertämällä pisteiden a_0 ja a_1 ympäri, niin ovat integrandin arvot kumpaisellakin haaralla samat, jonka tähden haarain erotus on vakio (vrt. n:o 9). Kun annamme z :n mennä kiertopisteeseen a_1 , niin suoritetun kuvauksen mukaan menee $u(z)$ pisteeseen A_1 ja $\bar{u}(z)$ pisteeseen A'_1 , joten kysymyksenalainen jaksomoduli on $A'_1 - A_1$. Kun taas z menee pisteeseen a_2 , niin menee $u(z)$ pisteeseen A_2 ja $\bar{u}(z)$ pisteeseen A'_2 . Sestähdän on

$$A'_2 - A_2 = A'_1 - A_1,$$

josta johtuu, että jana $A'_1 A'_2$ saadaan siirtämällä janaa $A_1 A_2$ jaksomodulin $A'_1 - A_1$ verran. Mutta silloin ovatkin näiden jainain kuvat z -tasossa identtiset, j. o. t.

Käyrä $\overline{a_2 a_3}$ todistetaan käyräksi $\overline{a_2 a_3}$ aivan samoin kuin $\overline{a_0 a_1}$ käyräksi $\overline{a_0 a_1}$. Pisteiden a_0 asemesta vain kierretään a_3 :n ympäri. — Samalla käy edellä olevasta selväksi, että kuvio $A_1 A_2 A'_2 A'_1$ on suunnikas.

Kun S_0 liitetään leikattuun alueeseen $S_3 + S_1 + S_2$, niin saadaan koko z -taso. Jos z saa siinä vapaasti liikkua, mennä siis myös käyräin $\overline{a_1 a_2}$ ja $\overline{a_2 a_3}$ yli, niin kuvaus ei pysy yksikäsitteisenä. Mutta kun z estetään kulkemasta viimeksimainittujenkin käyräin yli leikkaamalla taso niitä myöten, niin voidaan lausua seuraava lopputulos:

Käyriä $\overline{a_0 a_1}$, $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_2 a_3}$ myöten leikattu z -taso kuvautuu integraalin (50) kautta kääntäen yksikäsitteisesti suunnikkaaseen $A_1 A_2 A'_2 A'_1$ siten, että alueet S_3, S_1, S_2, S_0 kuvautuvat vastaaviin kolmioihin $\Sigma_3, \Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_0$. Alueiden S_3, S_1, S_2, S_0 rajakäyrät $\overline{a_0 a_1}$, $\overline{a_0 a_2}$, $\overline{a_0 a_3}$, $\overline{a_1 a_2}$, $\overline{a_1 a_3}$, $\overline{a_2 a_3}$ ovat kukin vastaavassa kaksikulmiossaan $(a_0 a_1)$, $(a_0 a_2) \dots$

47. Nyt otamme toisenkin tällä tavalla leikatun tason ja liitämme sen edellisen kanssa Riemannin pinnaksi pitkin leikkausta $\overline{a_2 a_3}$. Siten saatu Riemannin pinta on leikkausten $\overline{a_0 a_1}$ ja $\overline{a_1 a_2}$ kautta jo yhdesti yhtenäinen.

Annamme z :n siirtyä pinnan ensimmäiseltä lehdeltä toiselle risteilyviivan $\overline{a_2 a_3}$ kautta ja katsomme, mikä jälkimmäisen kuvaksi tulee. Voisimme, kuten äsken, hakea sen menemällä eteenpäin alue alueelta, mutta lyhyemmin pääsemme kuitenkin tulokseen seuraavasti:

Jokainen ensimmäisellä lehdellä oleva integraalin arvo saadaan pisteeseen a_3 kuuluvasta, A_3 :sta, integroimalla sillä lehdellä olevaa käyriä L myöten a_3 :sta kysymyksenalaiseen pisteeseen (z, s) :

$$u(z, s) = A_3 + \int_{a_3(L)}^{(z, s)}.$$

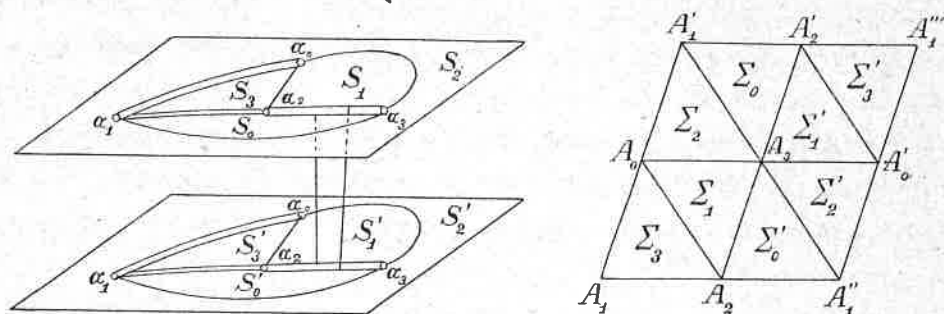
(z, s) :n kohdalla toisessa lehdessä olevaan pisteeseen $(z, -s)$ kuuluva u :n arvo saadaan A_3 :sta m. m. integroimalla L :n kanssa yhtenevää toisessa lehdessä kulkevaa käyriä L' pitkin a_3 :sta pisteeseen $(z, -s)$:

$$u(z, -s) = A_3 + \int_{a_3(L')}^{(z, -s)}.$$

Koska integrandit ovat päällekkäin olevissa L :n ja L' :n pisteissä vastakkaiset, niin ovat myös niitä pitkin suoritettut integralit vastakkaiset, eli

$$u(z, s) - A_3 = -[u(z, -s) - A_3].$$

Tästä huomataan, että pisteet $u(z, s)$ ja $u(z, -s)$ ovat pisteen A_3 suhteen symmetriset. Riemannin pinnan toisen lehden kuva saadaan niinmuodoin ensimmäisen lehden kuvasta kiertämällä tätä A_3 :n ympäri kulmalla π . Olkoon siten saatu toisen lehden kuva-suunnikas $A'_2 A_2 A_1'' A_1'''$ (kuv. 9).



Kuv. 9.

Käyriä $a_0 a_1$ ja $a_1 a_2$ myöten yhdestiyhtenäiseksi leikattu Riemannin pinta kuvautuu integralin (50) kautta kääntäen yksikäsitteisesti suunnikkaaseen $A_1 A_1'' A_1''' A_1'$, niin että pinnan alueet $S_1, S_2, \dots$ kuvautuvat vastäviin kolmioihin $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots$. Kuvaus on konforminen muualla paitsi pisteissä A .

Integralin (50) käänteisfunktio on siis olemassa suunnikkaassa $A_1 A_1'''$ yksikäsitteisenä funktiona. Koska kuvaus sisäpisteissä on konforminen muualla paitsi pisteessä A_3 , niin on käänteisfunktio analyyttinen muualla suunnikkaan $A_1' A_1'''$ sisällä paitsi mahdollisesti pisteessä A_3 . Tässäkin pisteessä se on jatkuva. Sentähden voimme päättää, että se myös siinä on analyyttinen, ¹⁾ jolloin edellisen lauseelman saamme muotoon:

Integralin (50) käänteisfunktio on olemassa suunnikkaassa $A_1' A_1'''$ yksikäsitteisenä analyyttisenä funktiona.

¹⁾ W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie I*, Leipzig und Berlin 1912, siv. 310, 9. Satz.

48. Jäljellä on saadun kuvauksen jatkaminen jaksomodulien avulla koko u -tasoon. Sivulla 74 suoritetusta todistuksesta ilmenee, että leikkaukseen $\overline{a_1 a_2}$ kuuluva jaksomoduli on vektori $A'_1 - A_1$. Leikkaukseen $\overline{a_0 a_1}$ kuuluva taas saadaan, kun integroidaan alueiden S_3, S_1, S'_0 kautta kerran pisteiden a_1 ja a_2 ympäri (vrt. kuv. 9). Lähtemällä pisteestä a_1 ja palaamalla siihen huomataan, että tämä jaksomoduli on vektori $A_1'' - A_1$.

Kun (z, s) Riemannin pinnalla vapaasti liikkueena on kulkenut leikkauksen $\overline{a_0 a_1}$ yli k_1 kertaa useammin S'_2 :sta S_3 :een ja S'_3 :sta S_2 :een kuin päinvastoin, sekä leikkauksen $\overline{a_1 a_2}$ yli k_3 kertaa useammin S_0 :sta S_3 :een ja S'_3 :sta S'_0 :aan kuin päinvastoin, niin integrali (50) on samalla mennyt alkuhaaran u haaraan

$$u_{k_1, k_3}(z, s) = u(z, s) + k_1(A_1'' - A_1) + k_3(A'_1 - A_1).$$

Koska alkuhaaran välittämä leikatun Riemannin pinnan kuva on suoraviivainen suunnikas $A_1 A_1'''$, niin on selvää, että u -taso peittyy aukottomasti ja yksinkertaisesti Riemannin pinnan kuva-alueilla, kun (z, s) kaikilla mahdollisilla tavoilla liikkuu pinnalla. Loppupäätelmät voidaan nyt tehdä samoin kuin no:ssa 19.

49. Analyttisen jatkamisen keinossa oli puhtaana ajatuksena yleinen analyttisen jatkamisen periaate. Nyt olemme tutustuneet toiseen yksinkertaiseen ja syrjävaikutteilta vapaaseen todistukseen, jossa johtavana lankana on funktioteorian toinen suuri yleinen periaate, *konformikuvaus*. Niinkuin edellinen todistus kävi mahdolliseksi vasta integraalin yksivityyksen ominaisuuden, käänteissarjain suppenemissäteiden alarajan avulla, niin tässäkin tarvitaan eräs integraalin *yksityinen* ominaisuus, nimittäin se, että kolmen kiertopisteen kautta kulkevan ympyräviivan suljettu kuvakäyrä on yksinkertainen, mistä no: 12 konformikuvausväittämän avulla johtuu alueiden (d) ja $U(d)$ kääntäen yksikäsitteinen ja konforminen vastaavaisuus. Tällä asteella onkin koko todistuksen painopiste juuri kosketeltu. Kuvauksen jatkaminen seuraa edellisen jälkeen itsestään.

Käytetty konformikuvauslauselma on kuvauksen yksikäsitteisyyteen nähden seuraus yleisestä argumentin variatiosäännöstä.¹⁾

Samalla kun on saatu kolmen kiertopisteen kautta kulkevan ympyrän kehä kuvatuksi, on myös tullut näytetyksi, että integralin jaksomodulit ovat $\neq 0$ eikä niiden suhde ole reaalinen (siv. 69).

Analyyttisen jatkamisen keinon ja konformikuvaustodistuksen välillä on jyrkkä periaatteellinen eroavaisuus: Edellisessä käännetään integrali aluksi pisteen ympäristössä, jälkimmäisessä suorastaan suuressa alueessa. Todistuksen pääosan muodostaa edellisessä analyyttinen jatkaminen, jälkimmäisessä taas lähtöalueen hakeminen.

Tämä todistus verrattuna ensimmäiseen on eräässä suhteessa sen kanssa vastakohtainen. Ensimmäisessä todistuksessa osoitettiin etukäteen, että integrali saa saman arvon yhdessä ainoassa leikatun pinnan F' pisteessä, josta sitten seuraa, että F' :n reunan kuvakäyrä rajottaa erään alueen, johon vihdoin F' kuvautuu. Tässä taas todistetaan ensin, että alueen (d) reunan kuvakäyrä rajottaa alueen $U(d)$, josta perästäpäin johtuu, että integrali saa (d) :ssä saman arvon yhdessä ainoassa pisteessä. (d) edustaa tässä F' :ää.

Konformikuvaustodistuksen luoja on H. A. SCHWARZ, joka käytti tätä kuvatessaan tetraederin pinnan pallolle.²⁾ Tässä esittämämme todistus poikkeaa SCHWARZ'in todistuksesta siinä, että SCHWARZ:n on 40 väittämää todistaessaan ensin kuvaa kolmen kiertopisteen kautta kulkevan ympyrän kehän linearimuunnoksen avulla reaaliakseliksi ja vasta tämän u -tasoon, jota vastoin me olemme suorittaneet mainitun ympyränkehän kuvauksen suorastaan u -tasoon.

R. FRICKE³⁾ käyttää konformikuvausmenettelyä Weierstrassin normalimuodossa olevaan integraliin sovellettuna.

¹⁾ W. F. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, siv. 377.

²⁾ H. A. SCHWARZ, *Gesammelte Abhandlungen*, Berlin 1890, II Bd., siv. 84. Tahi: *Konforme Abbildung der Oberfläche eines Tetraeders auf die Oberfläche einer Kugel*. (Crelle, T. 70 (1868), siv. 121).

³⁾ R. FRICKE, *Elliptische Functionen* (Encyklopädie der math. Wissenschaften Bd. II 2 Heft 2/3, siv. 254. Leipzig 1913). Tahi: *Kurzgefasste Vorlesungen über verschiedene Gebiete der höheren Mathematik*, Leipzig 1900, siv. 208.

Mainitsemme vielä, että RIEMANN käsitteli luennoissaan (v. 1861 — 62) vain sitä tapausta, jolloin kiertopisteet ovat reaaliset, ja käytti käänteisväittämän todistamiseksi juuri konformikuvausta.¹⁾ Menettely on aivan sama kuin BURKHARDT'in.²⁾

V. Todistus σ -funktion avulla.

50. Argumentin variatiosäännön avulla voidaan määrätä funktion nollapisteiden lukumäärä alueessa, jossa funktio on säännöllinen (ks. n:o 12). Integralimuodossa tämä sääntö kuuluu:

Jos funktio $f(z)$ on alueessa S yksikäsitteinen ja säännöllinen sekä S :n reunalla C säännöllinen ja nollasta eroava, niin sen nollapisteiden lukumäärä S :ssä on

$$(55) \quad N = \frac{1}{2\pi i} \int_C d \log f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz,$$

missä integroiminen on suoritettava S :n reunaa pitkin kerran positiiviseen suuntaan.

Tätä sääntöä voisimme yrittää käyttää laskeaksemme, kuinka monessa leikatun Riemannin pinnan F' pisteessä I lajin elliptinen integrali

$$(56) \quad u = \int \frac{dz}{s}$$

saa annetun arvon u_0 . Johdumme silloin kaavaan

$$(57) \quad N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dz}{s(u - u_0)},$$

mutta oikealla puolella esiintyvän integraalin suorittaminen näyttää kohtaavan voittamattomia vaikeuksia.

Tämänlaista menettelyä voimme kuitenkin käyttää, kun otamme avuksi elliptisten funktioiden teoriaan kuuluvan σ -funktion,

¹⁾ RIEMANN, *Elliptische Functionen*, herausgeg. v. H. Stahl, Leipzig 1899.

²⁾ Ks. siv. 68. alamuist.

jolloin samalla saamme laajempikantoisen tuloksen kuin edellä ajatellulla tavalla.

Funktiota $\sigma(u - u_0)$ esittää kaikilla äärellisillä muuttujan arvoilla tulo

$$(58) \quad \sigma(u - u_0) = (u - u_0) \prod_{k_1, k_3}' \left\{ \left(1 - \frac{u - u_0}{2\omega} \right) e^{\frac{u - u_0}{2\omega} + \frac{1}{2} \left(\frac{u - u_0}{2\omega} \right)^2} \right\},$$

jossa

$$2\omega = 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3; \quad k_1, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

σ -funktio on olemassa silloin ja ainoastaan silloin, kun sitä muodostettaessa käytettyjen jaksojen $2\omega_1, 2\omega_3$ suhde ei ole reaalinen eikä kumpikaan jakso ole nolla. Johdatamme mieleen sen tärkeimmät ominaisuudet:

$\sigma(u - u_0)$ on kokonainen funktio, jonka yksinkertaiset ja ainoat nollapisteet ovat keskenään kongruenttiset pisteet

$$(59) \quad u_0 + 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3; \quad k_1, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Tämän funktion logaritminen derivaatta toteuttaa yhtälöt

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_0 + 2\omega_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_0) = 2\eta_1,$$

(60)

$$\frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_0 + 2\omega_3) - \frac{\sigma'}{\sigma}(u - u_0) = 2\eta_3,$$

ja vakiot η_1, η_3 puolestaan yhtälön

$$(61) \quad \eta_1\omega_3 - \eta_3\omega_1 = \pm \frac{\pi i}{2},$$

missä on valittava merkki $+$ tahi $-$ sen mukaan, onko suhteen $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ imaginariosan kerroin positiivinen vaike negatiivinen.

51. Voidaksemme muodostaa funktion $\sigma(u - u_0)$ käyttämällä jaksoina ensimmäisen lajin elliptisen integralin jaksomoduleja, on meidän niistä todistettava väittämä:

I lajin elliptisen integralin jaksomodulien suhde $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ei ole realiluku eikä kumpikaan jaksomoduli ole nolla.

Todistus suoritetaan epäsuorasti. Jos olisi

$$\frac{\omega_3}{\omega_1} = \tau = \text{realiluku}$$

ja siis $\omega_3 = \tau \omega_1$, niin integraalin yleinen jaksomoduli voitaisiin asettaa muotoon

$$2 k_1 \omega_1 + 2 k_3 \omega_3 = (k_1 + \tau k_3) 2 \omega_1 = \text{realil.} \times \omega_1,$$

josta ilmenee, että kaikki ne eri arvot, jotka integraali saa samassa Riemannin pinnan pisteessä, ovat samalla, vektorin ω_1 suuntaisella suoralla.

Koska integraali (56) on äärellinen koko leikatulla pinnalla F' , niin ovat kaikki alkuhaaran $\bar{u}(z)$ arvot eräässä äärellisessä u -tason alueessa. Voimme sentähden piirtää vektorin ω_1 suuntaisen suoran L , niin että kaikki pisteet $\bar{u}(z)$ ovat sen samalla puolella, esim. ω_1 :n suuntaan katsottaessa vasemmalla. Todistamme, että voidaan piirtää sellainen ω_1 :n suuntainen suora, jolla on ainakin yksi pisteistä $\bar{u}(z)$, mutta jonka oikealla puolen ei ole yhtäkään.

Koska $\bar{u}(z)$ on yksikäsitteinen ja jatkuva funktio F' :llä ja sen reunalla, niin on myös pisteen $\bar{u}(z)$ etäisyys suorasta L samoin yksikäsitteinen ja jatkuva funktio F' :llä ja sen reunalla. Sentähden on tällä etäisyydellä määrätty minimiarvo. Olkoon z_0 piste, jossa se saavutetaan, ja vastaava alkuhaaran arvo u_0 . Pisteen u_0 kautta piirretty ω_1 :n suuntainen suora L_0 on juuri vaadittu suora. Sillä alkuhaaran arvoja edustavista pisteistä $\bar{u}(z)$ sijaitsee ainakin yksi, nim. u_0 , suoralla L_0 , jota vastoin ei mikään niistä ole sen oikealla puolella. Koska antiteesin mukaan kaikki integraalin samassa pisteessä saamat arvot ovat samalla ω_1 :n, ja siis myös L_0 :n suuntaisella suoralla, päätämme tästä, ettei L_0 :n oikealla puolen ole mitään integraalin arvoja edustavia pisteitä.

Tästä johdumme kuitenkin ristiriitaan. Sillä kun poistamme pinnan leikkaukset ja tarkastelemme pisteen z_0 ympäristössä sitä integraalin haaraa, jolla z_0 :ssa on arvo u_0 , niin n:ojen 26 ja 34

mukaan tämä haara kuvaa määrätyn z_0 :n ympäristön erääseen u_0 :n ympäristöön. Koska u_0 on suoralla L_0 , niin on osa sen ympäristöstä L_0 :n oikealla puolen. Jos u' on juuri tähän osaan kuuluva piste, niin vastaa sitä kuvauksen kautta määrätty piste z' pisteen z_0 ympäristössä. Mutta tämä merkitsee, että integrali saa pisteessä z' suoran L_0 oikealla puolella olevan arvon u' , mikä on ristiriidassa äskeisen tuloksen kanssa. Väitöksen edellinen osa, suhteen $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ kompleksisuus, on niinmuodoin todettu.

Aivan sama todistus kelpaa myös väitöksen jälkimmäiseen osaan. Jos näet toinen jaksomoduli, esim. ω_3 olisi nolla, niin olisi taas yleinen jaksomoduli yhtä kuin ω_1 kerrottuna jollakin realiluvulla. Jos sitten molemmat jaksomodulit olisivat nollia, niin eroaisi todistus edellisestä vain siinä, että suora L saisi olla minkä suuntainen tahansa.

52. Tarvitsemme vielä seuraavan apuväittämän:

Niiden pisteiden lukumäärä, joissa I lajin elliptinen integrali saa annetun arvon kanssa kongruenttisia arvoja, ¹⁾ on aina äärellinen.

Olkoon u_0 annettu arvo. Kaikki sen kanssa kongruenttiset arvot ovat

$$u_0 + 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3; \quad k_1, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Koska suhde $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ei ole realinen eikä kumpikaan jaksomoduli ole nolla, niin näitä arvoja vastaavat pisteet ovat erään suunnikasverkon ristipisteitä, josta seuraa, että niitä jokaisessa äärellisessä alueessa on äärellinen määrä. Koska kaikki *alkuhaaran* arvot sijaitsevat äärellisessä alueessa, niin saa alkuhaara vain äärellisen määrän keskenänsä kongruenttisia eri arvoja $u_0 + 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3$.

Otamme näistä jonkun, esim. u_0 :n, ja todistamme, että alkuhaara saa sen arvokseen vain äärellisessä pistejoukossa. Jos se saisi arvon u_0 äärettömässä pistejoukossa, niin olisi tällä joukolla

¹⁾ Näihin kuuluu tietysti myös annettu arvo itse.

ainakin yksi (äärellinen tai ääretön) kokoontumispiste z_0 , jonka jokaisessa ympäristössä siis löytyisi ääretön määrä näitä pisteitä. Kun z_0 :n ympäristö siirretään siihen kuuluvan säännöllistäjän (n:o 2) kautta t -tason origon ympäristöön, niin muuntautuu integralin alkuhaara origon ympäristössä säännölliseksi analyyttiseksi funktioksi $u(t)$. Tämä saisi siis arvon u_0 äärettömässä pistejoukossa, jonka kokoontumispiste on origo. Mutta yleisen identtisyysväittämän mukaan olisi silloin $u(t)$ identtisesti $= u_0$, josta johtuisi, että integrali olisi vakio, vastoin todellisuutta.

Koska nyt alkuhaara saa jokaisen arvon äärellisessä pistejoukossa ja koska siihen kuuluvia keskenään kongruenttisia eri arvoja on myös äärellinen määrä, niin on väitös alkuhaaraan nähden todistettu. Mutta siitä seuraa väitöksen totuus myös koko integraliin nähden, sillä jokainen integralin haara saa u_0 :n kanssa kongruenttisia arvoja ainoastaan niissä pisteissä, missä alkuhaarakin.

53. Asetamme nyt todistettavaksi pääväittämän:

Integrali (56) saa jokaisen annetun arvon yhdessä ja ainoastaan yhdessä Riemannin pinnan pisteessä.

Olkoon annettu arvo u_0 . Todistusta varten teemme Riemannin pinnan leikkaukset niin, ettei niillä sijaitse yhtään pistettä, joissa integrali (56) saa u_0 :n kanssa kongruenttisia arvoja. Tämä on mahdollista, sillä edellisen n:on mukaan on Riemannin pinnalla mainittuja pisteitä vain äärellinen määrä. Täten leikatulla pinnalla F' määräämme integralin alkuhaaran, jonka merkitsemme $\bar{u}(z, s)$:llä.

Koska integralin (56) jaksomodulit n:on 51 mukaan ovat $\neq 0$ ja koska niiden suhde ei ole realinen, niin on olemassa niillä muodostettu funktio $\sigma(u - u_0)$ (ks. 58), jossa u_0 on äsken annettu luku. Siirrämme tämän funktion pinnalle F' seuraavalla tavalla:

Jokaiseen F' :n pisteeseen (z, s) kuuluu yksi ainoa, vieläpä äärellinen arvo $\bar{u}(z, s)$, sillä alkuhaara on yksikäsitteinen ja säännöllinen. Pisteessä $\bar{u}$ saapi taas funktio (58) määrätyn äärellisen

arvon $\sigma(\bar{u} - u_0)$. Kun tämä arvo siirretään pisteeseen (z, s) , niin siten saadaan F' :llä määritellyksi yksikäsitteinen funktio

$$(62) \quad \sigma[\bar{u}(z, s) - u_0].$$

Yhdistettyjen funktioiden periaatteen ja n:ossa 2 annetun määritelmän mukaan on saatu funktio Riemannin pinnalla säännöllinen, sillä $\sigma(\bar{u} - u_0)$ on $\bar{u}$:n säännöllinen funktio ja $\bar{u}$ puolestaan (z, s) :n säännöllinen funktio.

54. Funktion (62) nollapisteitä ovat ne F' :n pisteet, joissa $\bar{u}$ saa u_0 :n kaussa kongruenttisia arvoja, ja ainoastaan ne, sillä funktion $\sigma(u - u_0)$ nollapisteitä ovat u_0 :n kanssa kongruenttiset pisteet ja vain ne (ks. n:o 50). N:ossa 52 todistetun väittämän mukaan on näitä pisteitä F' :llä vain äärellinen lukumäärä ja olettamuksen mukaan niistä ei yksikään ole F' :n reunalla. Voimme sentähden käyttää n:ossa 50 lausuttua argumentin variatiosääntöä funktion (62) nollapisteiden lukumäärän N laske-
miseksi, jolloin saamme

$$(63) \quad N = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\sigma'(\bar{u} - u_0)}{\sigma(\bar{u} - u_0)} \frac{du}{dz} dz,$$

jossa integroidaan F' :n ympäri kerran positiiviseen suuntaan.

Oikealla puolen esiintyvän integralin jaamme neljään osaan (vrt. siv. 22):

$$\int_A \frac{\sigma'}{\sigma}(\bar{u}(\lambda) - u_0) du + \int_{B_1} - \int_{A_0} - \int_{B_0}.$$

Yhtälöiden (18) nojalla tämä voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} & \int_A \left[\frac{\sigma'}{\sigma}(\bar{u}(q) - u_0 + 2\omega_1) - \frac{\sigma'}{\sigma}(\bar{u}(q) - u_0) \right] du \\ & + \int_B \left[\frac{\sigma'}{\sigma}(\bar{u}(q) - u_0 + 2\omega_3) - \frac{\sigma'}{\sigma}(\bar{u}(q) - u_0) \right] du, \end{aligned}$$

eli edelleen, ottamalla huomioon yhtälöt (60),

$$2\eta_1 \int_A du + 2\eta_3 \int_B du,$$

mikä lauseke (17):n mukaan on yhtä kuin $4(\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1)$, eli vihdoin, Legendren yhtälön (61) nojalla, yhtä kuin $\pm 2\pi i$. Yhtälö (63) antaa siis

$$N = \pm 1.$$

Koska — merkki tietysti ei voi tulla kysymykseen, niin olemme täten saaneet todistetuksi, että funktiolla (62) on yksi ja yksi ainoa nollapiste F' :llä.

Mutta tämä puolestaan merkitsee, että F' :llä on yksi ja ainoastaan yksi piste (z_0, s_0) , jossa integraalin alkuhaara $\bar{u}$ saa u_0 :n kanssa kongruenttisen arvon. Jos tämä arvo on

$$\bar{u}(z_0, s_0) = u_0 + 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3,$$

niin integraalin haara $\bar{u}(z, s) - 2k_1\omega_1 - 2k_3\omega_3$ saa (z_0, s_0) :ssa juuri arvon u_0 . Lopuksi voimme päättää, ettei integrali saa missään muussa pisteessä tätä arvoa. Jos se nimittäin saisi toisessa pisteessä arvon u_0 haaralla $\bar{u} + 2l_1\omega_1 + 2l_3\omega_3$, niin saisi alkuhaara siinä u_0 :n kanssa kongruenttisen arvon $u_0 - 2l_1\omega_1 - 2l_3\omega_3$, mikä on vastoin edellä saatua tulosta. Näin olemme saaneet edellisen n:n alussa lausutun väittämän todistetuksi.

Pääväittäjä sisältää toisilla sanoilla lausuttuna ensiksi, että integraalin (56) *käänteisfunktio on olemassa koko tasossa*, ja toiseksi, että se on *yksikäsitteinen*. Käänteisfunktion *rationaliteetti* on silloin selvä seuraus n:n 11 lopussa esitetystä lauselmasta.

55. Koko tämän todistuksen ytimen muodostaa funktion $\sigma[\bar{u}(z, s) - u_0]$ argumentin variation laskeminen z :n kiertäessä kerran leikatun Riemannin pinnan ympäri. Kysymykseen tulevan integraalin (63) suorittaminen käy mahdolliseksi σ :n ominaisuuksien (60—61) ja integraalin (56) jaksollisuuden avulla.

Ensimmäisen todistuksen kanssa on tällä se yhteys, että molemmissa argumentin variatiosääntö on tärkeänä kohtana. Mutta kun ensimmäisessä todistuksessa etualalle tunkeutuu n:n 14 väittäjä, jonka jälkeen argumentin variatiosäännön käyttäminen luon-

nollisella tavalla seuraa, niin on taas σ -menettelyssä juuri *argumentin variatio* pää-asiana. Ensimmäisessä todistuksessa täytyi hakea ensin leikatun Riemannin pinnan kuva, jonka jälkeen kuvans jaksomodulien avulla jatkettiin koko u -tasoon. Tässä taas σ :n avulla käypi tarpeettomaksi leikatun pinnan kuvaaminen ja analyttinen jatkaminen, sillä käänteisfunktion olemassaolo koko tasossa ja sen yksikäsitteisyys saadaan soveltamalla argumentin periaatetta σ -funktioon.

Kysymyksessä oleva todistus on luonteeltaan siinä kohden epäsuora, että se edellyttää elliptisten funktioiden teorian alkeet tunnetuksi, johon teoriaan σ -funktio kuuluu. Kirjallisuudessa tämä todistus esiintyy H. BURKHARDT'in elliptisten funktioiden oppikirjassa.¹⁾

VI. Modulyhtälöiden kääntäminen.

56. Senraavassa esitetty todistus lähtee siitä, että annetun 2. kertaluvun elliptisen funktion käänteisfunktio on ensimmäisen lajin elliptinen integrali. Tarkastamme tässä erityisesti Weierstrassin p -funktioita, ja johdatamme lyhyesti mieleen sen tärkeimmät ominaisuudet.

Olkoo ω_1, ω_3 lukupari, joka täyttää ehdot:

(64) *Ei kumpikaan luvuista ω_1 ja ω_3 ole nolla eikä niiden suhde $\frac{\omega_3}{\omega_1}$ ole reaalinen.*

Silloin sarja

$$(65) \quad p(u | \omega_1, \omega_3) = \frac{1}{u^2} + \sum' \left\{ \frac{1}{(u - 2\omega)^2} - \frac{1}{(2\omega)^2} \right\},$$

$$2\omega = 2k_1\omega_1 + 2k_3\omega_3; \quad k_1, k_3 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

suppenee tasaisesti jokaisessa u -tason alueessa, joka ei sisällä yhtään pisteistä $u = 2\omega$, ja esittää siis koko u -tasossa yksikäsitteisesti

¹⁾ H. BURKHARDT, *Elliptische Funktionen*, 2. Aufl., Leipzig 1906. §§ 53–56.

sen analyttisen funktion, jonka erikoisuudet ovat kaksinkertaiset napapisteet $u = 2\omega$. Funktio pu on 2. kertaluvun elliptinen funktio, jonka alkujaksot ovat $2\omega_1$ ja $2\omega_3$. Alkujaksoiksi voidaan valita myös luvut

$$(66) \quad \begin{aligned} 2\omega_1' &= 2a\omega_1 + 2b\omega_3, \\ 2\omega_3' &= 2c\omega_1 + 2d\omega_3, \end{aligned}$$

jossa a, b, c, d ovat sellaisia kokonaislukuja, joiden determinantti $ad - bc = \pm 1$.

Kun pu kehitetään origossa Laurentin sarjaksi, saadaan

$$(67) \quad pu = \frac{1}{u^2} + \frac{g_2}{20}u^2 + \frac{g_3}{28}u^4 + \dots,$$

jossa

$$(68) \quad \begin{aligned} g_2 &= 60 \sum' \frac{1}{(2\omega)^4}, \\ g_3 &= 140 \sum' \frac{1}{(2\omega)^6}. \end{aligned}$$

Sarjat (68) suppenevat absoluuttisesti ja tasaisesti jokaisessa alueessa, jossa ehto (64) on täytetty. Yhtälöitä (68) sanotaan *moduliyhtälöiksi*.

g_2 :n ja g_3 :n arvot eivät muutu, jos $2\omega_1$:n ja $2\omega_3$:n sijasta käytetään jotakin muuta alkujaksoparia (66), sillä tällöinhän vain termit sarjoissa (68) järjestyvät toisin.

Sarjan (67) avulla todistetaan, että pu toteuttaa differentiaaliyhtälön

$$(69) \quad (p'u)^2 = 4p^3u - g_2pu - g_3,$$

josta johtuu, että mainitun sarjan kertoimet ovat g_2 :n ja g_3 :n polynomeja. Edelleen osoitetaan, että *yhtälön*

$$(70) \quad 4z^3 - g_2z - g_3 = 0$$

juuret ovat keskenään erisuuret ja sen diskriminantti siis nollasta eroava:

$$(71) \quad g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0.$$

Jos asetetaan $pu = z$ ja siis $p'u = \frac{dz}{du}$, niin yhtälö (69) saa muodon

$$\left(\frac{dz}{du}\right)^2 = 4z^3 - g_2 z - g_3,$$

ja kun otamme huomioon, että $p(0) = \infty$, niin seuraa tästä

$$(72) \quad u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}.$$

Koska neliöjuuren alla olevan polynomin nollapisteet ovat keskenään erisuuret, niin on tämä I lajin elliptinen integrali.

57. Neliöjuuri

$$s = \sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}$$

on yksikäsitteinen kaksilehtisellä Riemannin pinnalla, jonka kiertopisteet ovat yhtälön (70) juuret ja ∞ .

Kuten n:ossa 8 leikkaamme tämänkin pinnan yhdestiyhtenäiseksi leikkauksilla A ja B . Silloin muodostavat integralin (72) jaksomodulit

$$2\omega'_1 = - \int_B \frac{dz}{s} \quad \text{ja} \quad 2\omega'_3 = \int_A \frac{dz}{s}$$

funktion $p(u | \omega_1, \omega_3)$ yhden alkujaksoparin.

Näyttääksemme tämän on meidän todistettava ensiksi, että $2\omega'_1$ ja $2\omega'_3$ ovat p -funktion jaksoja, sekä toiseksi, että jokainen p :n jakso 2ω voidaan linearisesti lausua $2\omega'_1$:n ja $2\omega'_3$:n kautta. — Kun z kiertää kerran B -leikkauksen ympäri negatiiviseen suuntaan, jolloin z tulee takaisin alkuarvoonsa, niin muuttuu integrali (72) eräästä arvosta u arvoon $u + 2\omega'_1$. Koska pu on integralin (72) käänteisfunktio, niin päätämme tästä, että pu saa saman arvon pisteissä u ja $u + 2\omega'_1$, eli että $2\omega'_1$ on p :n jakso. Samoin huomataan, että $2\omega'_3$ on jakso. — Valitkaamme sitten kaksi kongruenttista u -tason pistettä, joiden erotus on 2ω , ja antakaamme u :n kulkea erästä käyrää pitkin toisesta pisteestä toiseen. Silloin piirtää piste (z, s) , jossa $z = pu$ ja $s = p'u$, Riemannin pinnalle

suljetun käyrän. Koska integrali (72) on pu :n käänteisfunktio, niin tätä suljettua käyrää pitkin suoritettu integrali on 2ω . Mutta toiselta puolen se on eräs jaksomoduli ja sellaisena $2\omega'_1$:n ja $2\omega'_3$:n lineaarifunktio. Väittämä on niinmuodoin todistettu.

58. Integralin (72) käänteisfunktio on siis 2. kertaluvun elliptinen funktio (65). Tästä emme kuitenkaan ilman muuta voi päätellä, että jokaisella Weierstrassin normalimuodossa olevalla I lajin elliptisellä integralilla olisi yksikäsitteinen käänteisfunktio. Sillä integralissa (72) kertoimet g_2 ja g_3 eivät ole mielivaltaisia, vaan on ne saatu sarjojen (68) kautta luvuista ω_1 ja ω_3 . Herää siis kysymys:

Onko mahdollista määrätä kaksi lukua ω_1 ja ω_3 , jotka täyttävät ehdon (64) ja antavat sarjoille (68) edeltäpäin määrättyt arvot g_2 ja g_3 , kun vain nämä täyttävät ehdon (71)?

Jos tähän kysymykseen saamme myöntävän vastauksen, niin silloin puolijaksojen ω_1 , ω_3 avulla muodostettu funktio $p(u|\omega_1, \omega_3)$ on annetun elliptisen integraalin (72) käänteisfunktio, joka siis on yksikäsitteinen.

Koska sarjat (68), missä kukin termi on ω_1 :n ja ω_3 :n analyttinen funktio, suppenevat tasaisesti jokaisessa alueessa, jossa ehto (64) on täytetty, niin *esittävät ne tällaisessa alueessa muuttujien ω_1 ja ω_3 säännöllisiä analyttisiä funktioita*.¹⁾

$$(68)' \quad \begin{aligned} g_2 &= G_2(\omega_1, \omega_3) \\ g_3 &= G_3(\omega_1, \omega_3). \end{aligned}$$

Tarkastamme nyt yhtälöissä (68) kääntäen suureet g_2 ja g_3 annettuina sekä ω_1 ja ω_3 niiden funktioina. Implisiittifunktioita koskevan perusväittämän nojalla saamme seuraavan tuloksen:

Ellei funktionalideterminantti

$$(73) \quad D(\omega_1, \omega_3) = \frac{\partial g_2}{\partial \omega_1} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_3} - \frac{\partial g_2}{\partial \omega_3} \frac{\partial g_3}{\partial \omega_1}$$

¹⁾ Vrt. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, 1. Band, Leipzig u. Berlin 1912, siv. 303, 5. Satz. Tämä Weierstrassin sarjapäätelmä voidaan ilman muuta laajentaa myös useampain muuttujain funktioita koskevaksi.

ole nolla pisteessä $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3)$, niin moduli yhtälöt (68) määräävät ω_1 :n ja ω_3 :n muuttujien g_2 ja g_3 yksikäsitteisinä ja säännöllisinä analyyttisinä funktioina eräässä vastaavan pisteen $(\bar{g}_2, \bar{g}_3)$ ympäristössä.

59. Sahdomme siis aluksi todistaa, että $D(\omega_1, \omega_3)$ ei ole ainakaan identtisesti nolla.

Koska g_2 ja g_3 , kuten sarjoista (68) nähdään, ovat ω_1 :n ja ω_3 :n homogenisia funktioita, joiden asteluvut ovat vastaavasti -4 ja -6 , niin toteuttavat ne yhtälöt:

$$\omega_1 \frac{\delta g_2}{\delta \omega_1} + \omega_3 \frac{\delta g_2}{\delta \omega_3} = -4 g_2,$$

$$\omega_1 \frac{\delta g_3}{\delta \omega_1} + \omega_3 \frac{\delta g_3}{\delta \omega_3} = -6 g_3.$$

Jos $D(\omega_1, \omega_3)$ häviäisi identtisesti, niin näistä yhtälöistä saataisiin

$$\frac{3 g_3}{2 g_2} = \frac{\frac{\delta g_3}{\delta \omega_1}}{\frac{\delta g_2}{\delta \omega_1}} = \frac{\frac{\delta g_3}{\delta \omega_3}}{\frac{\delta g_2}{\delta \omega_3}} = h(\omega_1, \omega_3),$$

jossa h on ω_1 :n ja ω_3 :n (-2) -asteinen homogeeninen funktio. Tästä johtuu edelleen

$$3 g_3 = 2 h g_2, \quad \frac{\delta g_3}{\delta \omega_1} = h \frac{\delta g_2}{\delta \omega_1}, \quad \frac{\delta g_3}{\delta \omega_3} = h \frac{\delta g_2}{\delta \omega_3}.$$

Differentioidaan ensimmäinen näistä kolmesta yhtälöstä ω_1 :n suhteen:

$$3 \frac{\delta g_3}{\delta \omega_1} = 2 h \frac{\delta g_2}{\delta \omega_1} + 2 g_2 \frac{\delta h}{\delta \omega_1},$$

ja toisen yhtälön avulla eliminoidaan tästä $\frac{\delta g_3}{\delta \omega_1}$:

$$\frac{1}{h} \frac{\delta h}{\delta \omega_1} = \frac{1}{2} \frac{1}{g_2} \frac{\delta g_2}{\delta \omega_1}.$$

Samoin saadaan

$$\frac{1}{h} \frac{\delta h}{\delta \omega_3} = \frac{1}{2} \frac{1}{g_2} \frac{\delta g_2}{\delta \omega_3}.$$

Kahdesta viimeisestä yhtälöstä seuraa $d \ln h = d \ln \sqrt{g_2}$, ja siis $h = c \sqrt{g_2}$, missä c merkitsee ω_1 :stä ja ω_3 :sta riippumatonta lukua. Kun tämä h :n arvo sijoitetaan $3 g_3$:n lausekkeeseen, saadaan

$$3 g_3 = 2 c g_2^{\frac{2}{3}},$$

mikä yhtälö siis olisi voimassa jokaisella arvoparilla ω_1, ω_3 , joka toteuttaa ehdon (64).

Tämä tulos on kuitenkin mahdoton. Sillä jos esim. asetamme $\omega_3 = 1$ ja $\omega_3 = i$, niin ovat termit g_3 :n sarjassa (68) kaksittain vastakkaiset ja siis $g_3 = 0$. Viimeksi saadun yhtälön mukaan olisi silloin myös $g_2 = 0$, joten diskriminanttikin $g_2^3 - 27 g_3^2$ olisi $= 0$, mikä on ristiriidassa epäyhtälön (71) kanssa.

60. Olkoon nyt $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3)$ piste, joka toteuttaa ehdon (64) ja jossa funktionalideterminantti (73) ei häviä, ja vastaavat sarjain (68) arvot olkoot $\bar{g}_2$ ja $\bar{g}_3$.

Koska ehto (64) toteutuu pisteessä $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3)$, niin voidaan määrätä sellainen tämän pisteen ympäristö (C_1, C_3) , että mainittu ehto toteutuu lukuparilla (ω_1, ω_3) , kun se vain on (C_1, C_3) :ssa. Koska $D(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3) \neq 0$, niin voidaan edelleen pisteiden $\bar{g}_2$ ja $\bar{g}_3$ ympäri piirtää sellaiset ympyrät, että ensiksi g_2 :n ja g_3 :n ollessa niissä modulyhtälöillä (68) on yksi ja yksi ainoa ratkaisu (ω_1, ω_3) pisteen $(\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3)$ ympäristössä, ja että toiseksi tämä ratkaisu on alueessa (C_1, C_3) . Nämä luvut ω_1 ja ω_3 toteuttavat niin ollen ehdon (64). Sentähden on olemassa elliptinen p -funktio (65), jolla luvut ω_1 ja ω_3 ovat puolijaksoina, ja tämän funktion käänteisfunktio on integrali (72). Koska integraalin jaksumodulit n :on 57 mukaan muodostavat p :n yhden alkujaksoparin, ja koska n :on 56 mukaan modulyhtälöt toteutuvat jokaisella alkujaksoparilla, niin saamme siis lauseلمان:

Kun (g_2, g_3) on eräässä pisteen $(\bar{g}_2, \bar{g}_3)$ ympäristössä, niin toteutuvat yhtälöt (68) elliptisen integraalin

$$(74) \quad u = \int_z^\infty \frac{dz}{\sqrt{4z^3 - g_2 z - g_3}}$$

jaksomodulien

$$(75) \quad - \int_B \frac{dz}{V 4z^3 - g_2 z - g_3} = 2 \Omega_1(g_2, g_3),$$

$$\int_A \frac{dz}{V 4z^3 - g_2 z - g_3} = 2 \Omega_2(g_2, g_3)$$

puoliskoilla.

61. Annamme nyt integralissa (74) g_2 :n ja g_3 :n muuttua jatkuvasti siten, että diskriminantti (71) pysyy nolasta eroavana, jolloin siis integrali koko ajan säilyy elliptisenä. Tällöin liikkuvat myös kiertopisteet jatkuvasti ja pysyvät erillään toisistaan. Samalla annamme leikkauksien A ja B jatkuvasti muuttua, paeten kiertopisteiden edessä ja niin, etteivät ne leikkaa itseään. Tällöin Riemannin pinta säilyy yhdestiyhtenäisenä ja integralit (75) esittävät koko ajan integralin (74) alkujaksomoduleita. Todistamme nyt väittämän:

Kertoimien g_2 ja g_3 jatkuvasti muuttuessa, niin että ehto (71) toteutuu, pysyvät integralin (74) jaksomodulit (75) koko ajan näiden kertoimien säännöllisinä analyyttisinä funktioina.

Olkon (γ_2, γ_3) joku kertoimien arvopari, jolla diskriminantti $\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2$ on $\neq 0$. Koska Riemannin pinnan kiertopisteet ovat g_2 :n ja g_3 :n jatkuvia funktioita, niin voimme rajottaa pisteen (g_2, g_3) liikkumisen sellaiseen pisteeseen (γ_2, γ_3) ympäristöön, että kiertopisteet eivät joudu leikkauksille A ja B , vaikka nämä pidetäänkin muuttumattomina. Jos (g_2, g_3) on mainitussa (γ_2, γ_3) :n ympäristössä ja z leikkauksella A tahi B , niin silloin integralien (75) integrandi on näiden kolmen muuttujan jatkuva funktio. Sitä paitsi on sillä jatkuvat osittaisderivaatat g_2 :n ja g_3 :n suhteen, mistä seuraa, että itse integraleilla (75) on jatkuvat osittaisderivaatat niiden suhteen.¹⁾ Integralit (75) ovat siis parametrien g_2 ja g_3 säännöllisiä analyyttisiä funktioita pisteen (γ_2, γ_3) ympäristössä, j. o. t.

62. Nyt voidaan todistaa pääväittämi:

¹⁾ Ks. OSGOOD, *Lehrbuch der Funktionentheorie*, siv. 282.

Jos luvut γ_2 ja γ_3 täyttävät ehdon

$$\gamma_2^3 - 27\gamma_3^2 \neq 0,$$

niin toteutuvat moduli yhtälöt (ks. 68')

$$(76) \quad \begin{aligned} \gamma_2 &= G_2(\omega_1, \omega_3) \\ \gamma_3 &= G_3(\omega_1, \omega_3) \end{aligned}$$

I lajin elliptisen integraalin

$$(77) \quad u = \int_z^\infty \frac{dz}{V 4z^3 - \gamma_2 z - \gamma_3}$$

jaksomodulien puoliskoilla.

Koska ehto (71) on täytetty lukupareilla $\bar{g}_2, \bar{g}_3$ ja γ_2, γ_3 , niin on selvää, että g_2 :n ja g_3 :n voidaan antaa yhtä aikaa liikkua pisteistä $\bar{g}_2$ ja $\bar{g}_3$ pisteisiin γ_2 ja γ_3 eräitä käyriä L_2 ja L_3 pitkin, niin että ehto (71) koko matkan toteutuu. Tällöin on diskriminantin (71) itseisarvolla nollasta eroava alaraja, josta ilmenee, että jokaisessa g_2 :n ja g_3 :n asennossa tällä matkalla voidaan niiden ympäri piirtää samalla nollasta eroavalla säteellä sellaiset ympyrät Γ_2 ja Γ_3 , joissa diskriminantti yhä pysyy nollasta eroavana, mistä edellisen n:n nojalla seuraa, että integraalin (74) jaksomodulit $2\Omega_1$ ja $2\Omega_3$ (ks. 75) ovat ympyröissä Γ_2, Γ_3 muuttujain g_2 ja g_3 säännöllisiä analyyttisiä funktioita. Γ_2 :n ja Γ_3 :n säteet voidaan ottaa vielä sellaisiksi, että jaksomodulit säilyvät alueessa (Γ_2, Γ_3) yksikäsitteisinä. Näistä seikoista päätämme, että jaksomodulit (75) voidaan jatkaa analyyttisesti pisteestä $(\bar{g}_2, \bar{g}_3)$ käyriä L_2, L_3 pitkin ympyräin Γ_2, Γ_3 avulla pisteeseen (γ_2, γ_3) saakka.

Integraali (74) pysyy koko ajan elliptisenä. N:ossa 51 todistetun väittämän mukaan toteuttavat sentähden jaksomodulit (75) ympyröissä Γ_2, Γ_3 koko matkan ehdon (64).

Koska siis Ω_1 ja Ω_3 ovat alueessa (Γ_2, Γ_3) muuttujain g_2, g_3 yksikäsitteisiä analyyttisiä funktioita, jotka toteuttavat ehdon (64), niin yhdistettyjen funktioiden periaatteen mukaan ovat funktiot

$$(78) \quad G_2 [\Omega_1 (g_2, g_3), \Omega_3 (g_2, g_3)] \text{ ja } G_3 [\Omega_1 (g_2, g_3), \Omega_3 (g_2, g_3)]$$

(ks. 68') yksikäsitteisiä, säännöllisiä analyyttisiä funktioita, kun g_2 ja g_3 ovat ympyröissä Γ_2 ja Γ_3 , sekä tulevat yhtäaikaa Ω_1 :n ja Ω_3 :n kanssa jatketuiksi pisteestä $(\bar{g}_2, \bar{g}_3)$ pisteeseen (γ_2, γ_3) .

Funktiot (78) ovat n:ön 60 mukaan eräässä pisteen $(\bar{g}_2, \bar{g}_3)$ ympäristössä identtiset g_2 :n ja g_3 :n kanssa. Yleisen funktioiden identtisyysperiaatteen mukaan säilyy silloin tämä identtisyys kaikilla funktioiden (78) analyyttisillä jatkoillakin. Siis erikoisesti pisteessä (γ_2, γ_3) on näillä funktioilla arvot γ_2 ja γ_3 , eli yhtälöt (76) toteutuvat integralin (77) jaksomoduleilla, kuten väitettiin.

63. Olkoon nyt annettu I lajin elliptinen integrali (77). Kun muodostamme elliptisen p -funktion, jonka alkujaksoina ovat integralin (77) jaksomodulit $2\Omega_1(\gamma_2, \gamma_3)$ ja $2\Omega_3(\gamma_2, \gamma_3)$ (ks. 75), niin sen käänteisfunktio on n:ön 56 mukaan I lajin elliptinen integrali (72), jonka kertoimille edellä todistetun päävääntämän mukaan saadaan sarjoista (68) arvot γ_2 ja γ_3 . *Integralin (77) käänteisfunktio on siis 2. kertaluvun elliptinen funktio.*

Vaikka olemme käsitelleet vain Weierstrassin normalimuodossa olevia integraleja, niin on tulos kuitenkin aivan yleispätevä, sillä voidaanhan annettu ensimmäisen lajin elliptinen integrali

$$u = \int \frac{dz}{s}$$

linearisen muunnoksen

$$z = \frac{a\zeta + b}{c\zeta + d}$$

avulla palauttaa muotoon (77), jolloin alkuperäinen integrali on normalimuotoisen linearifunktio.

64. Suorittamallamme todistuksella on σ -funktion avulla saadun kanssa yhteistä se, että molemmat edellyttävät elliptisten funktioiden alkeet tunnetuiksi. Muutoin eroavat ne periaatteiltaan suuresti toisistaan. σ -todistuksessa on argumentin variatiosääntö ratkaisevana kohtana, tässä taas *analyyttisen jatkamisen periaate*.

Tämän ajatuksen mukaan suoritettu todistus tavataan TANNERY'n ja MOLK'in elliptisten funktioiden teoriassa.¹⁾ He käsittelevät integraalin

$$u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$$

modulia k jakso modulien suhteesta riippuvana, jolloin tullaan toimeen yhden muuttujan funktioilla. Me olemme käsitelleet tehtävän edellä esitettyssä muodossa, koska Weierstrassin normalimuotoa käyttämällä tulemme toimeen vähemmällä alkua valmistuksilla elliptisten funktioiden puolelta.

¹⁾ TANNERY et MOLK, *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, T. III, Paris 1898, §§ 518—524.

Joensuun yliopisto
Matematiikan laitos

MAT V

Väisälä

JOENSUUN YLIOPISTON
KIRJASTO

160 0198629

