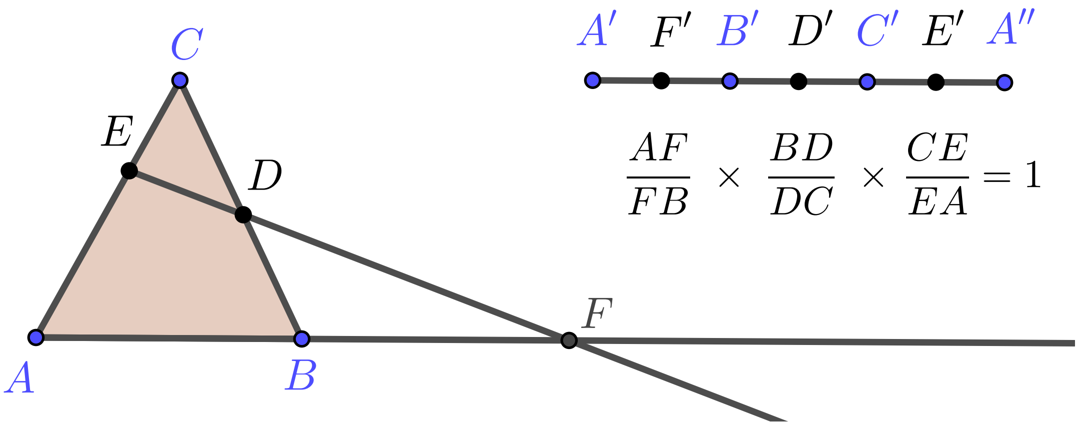
1 Syvällisempiä lauseita

1.1 Menelaos => Pappus => Desargues => Pascal

1.1.1 Menelaoksen lause

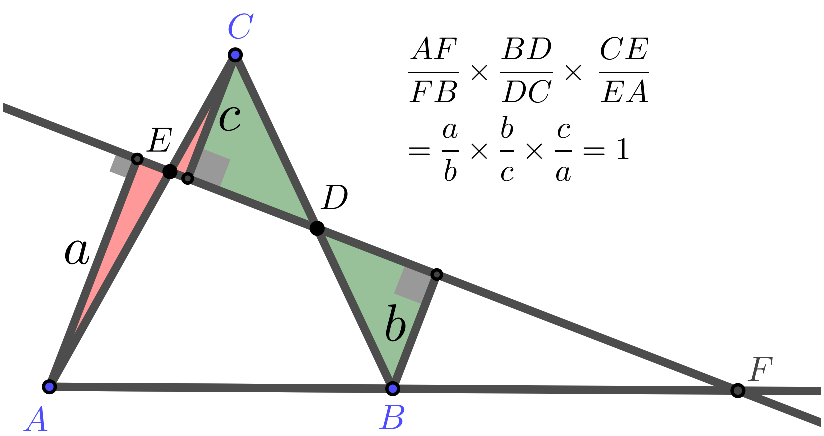


Kuva 1: **Menelaoksen lause.** Pisteet D, E, F ovat samalla suoralla jos ja vain jos kaava toteutuu.

Esimerkki. Kuvassa 1 kaava pätee likimain arvoilla

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \approx \frac{2}{1} \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = 1.$$

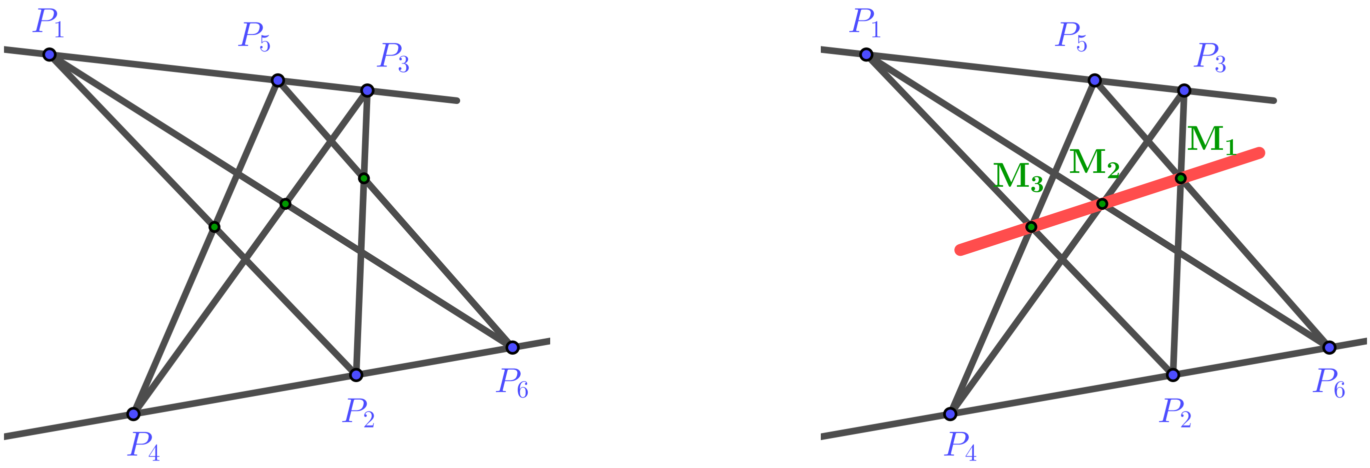
Todistus. Oletetaan, että D, E, F ovat samalla suoralla. Piirretään pisteiltä A, B, C korkeusjanat suoralle $\overleftrightarrow{DEF}$ ja olkoot näiden pituudet a, b, c. Tällöin muodostuu kolme paria yhdenmuotoisia suorakulmaisia kolmioita ja päätellään, että kaava pätee, katso Kuva 2.



Kuva 2: Menelaoksen lauseen todistus.

1.1.2 Pappuksen lause

Pappuksen lause. Olkoot P_1, P_3, P_5 keskenään samalla suoralla ja P_2, P_4, P_6 keskenään samalla suoralla. Piirretään suljettu murtoviiva $P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_1$. Tällöin osajanojen leikkauspisteet ovat samalla suoralla.



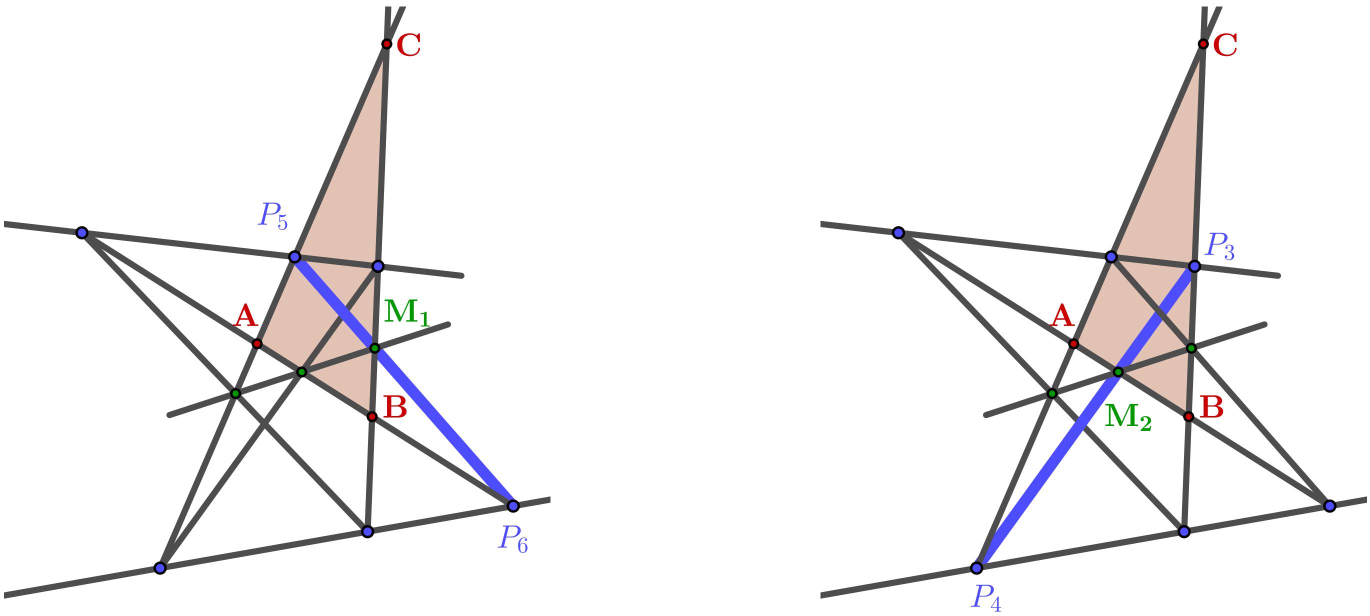
(a) (b)

Kuva 3: Pappuksen lause. Huomataan, että tietyt leikkauspisteet ovat samalla suoralla.

Todistus. Todistus nojaa Menelaoksen lauseeseen.

Menelaoksen lause kolmiolle $\triangle ABC$ ja suoralle $P_5M_1P_6$, sekä kolmiolle $\triangle ABC$ ja suoralle $P_3M_2P_4$, tuottavat

$$\frac{CM_1}{M_1B}\frac{BP_6}{P_6A}\frac{AP_5}{P_5C} = 1 = \frac{CP_3}{P_3B}\frac{BM_2}{M_2A}\frac{AP_4}{P_4C}.$$

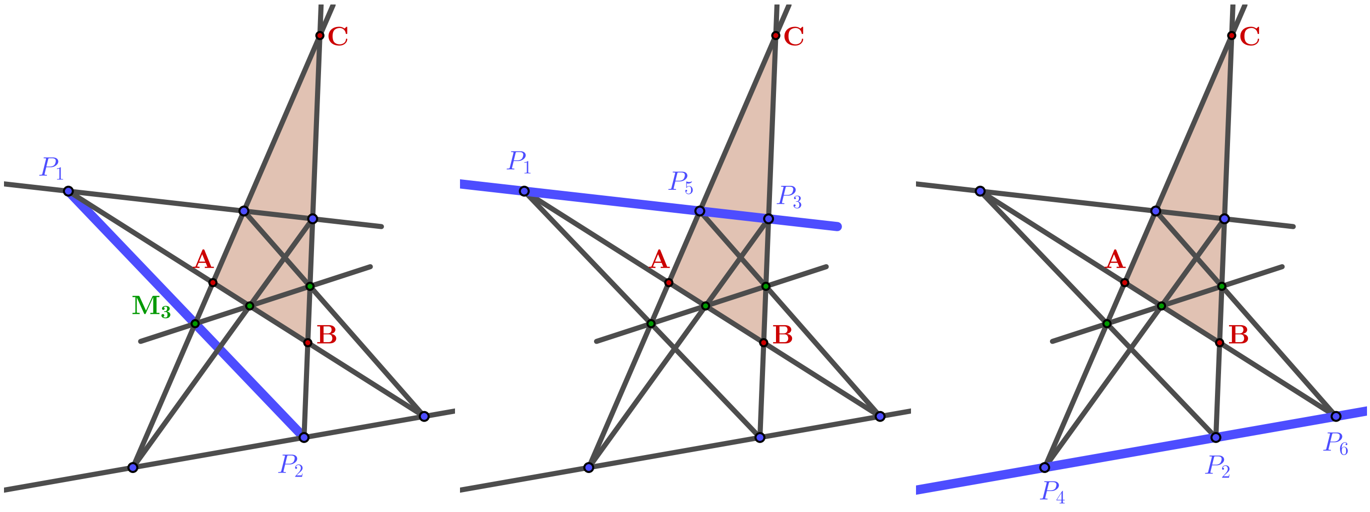


(a) (b)

Kuva 4: Kaksi ensimmäistä suoraa.

Samaan tapaan Menelaoksen lause sovellettuna kolmioon ABC ja suoriin $P_2M_3P_1$, $P_1P_5P_3$, $P_6P_2P_4$ tuottaa

$$\frac{CP_2}{P_2B}\frac{BM_3}{M_3A}\frac{AP_1}{P_1C} = \frac{CP_1}{P_1B}\frac{BP_5}{P_5A}\frac{AP_3}{P_3C} = \frac{CP_6}{P_6B}\frac{BP_2}{P_2A}\frac{AP_4}{P_4C} = 1.$$



(a) (b) (c)

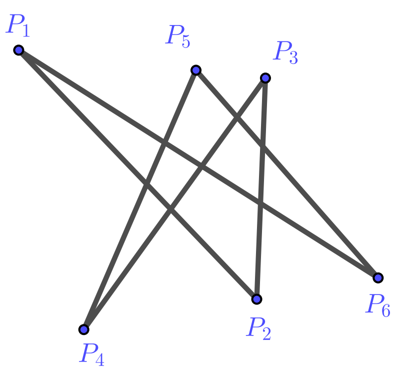
Kuva 5: Kolme muuta suoraa.

Kun saadut viisi kolmen osamäärän tuloa kerrotaan keskenään, kaikki muut paitsi pisteitä M_j koskevat osamäärät kumoutuvat, eli saadaan

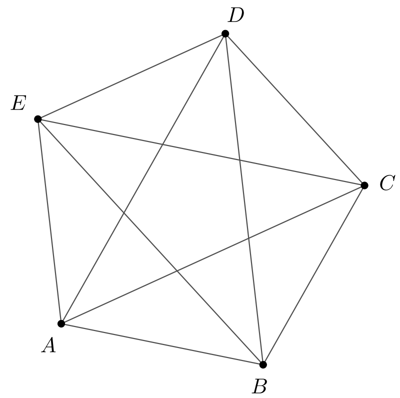
$$\frac{CM_1}{M_1B}\frac{BM_2}{M_2A}\frac{BM_3}{M_3A} = 1.$$

Käänteisen Menelaoksen lauseen nojalla pisteet M_1, M_2, M_3 ovat samalla suoralla.

Yhteys verkkoteoriaan. Mainittakoon, että Pappuksen lauseessa esiityvä murtoviiva ja viisikulmio lävistäjineen ovat Kuratowskin lauseen aliverkot $K_{3,3}$ ja K_5. Mikä tahansa verkko voidaan esittää tasoverkkona, jos ja vain jos se ei sisällä aliverkkoina kumpaakaan verkoista $K_{3,3}$ tai K_5. Siis esimerkiksi Platonin kappaleiden kärjistä ja särmistä muodostuneet verkot voidaan esittää tasoverkkoina.



(a) $K_{3,3}$

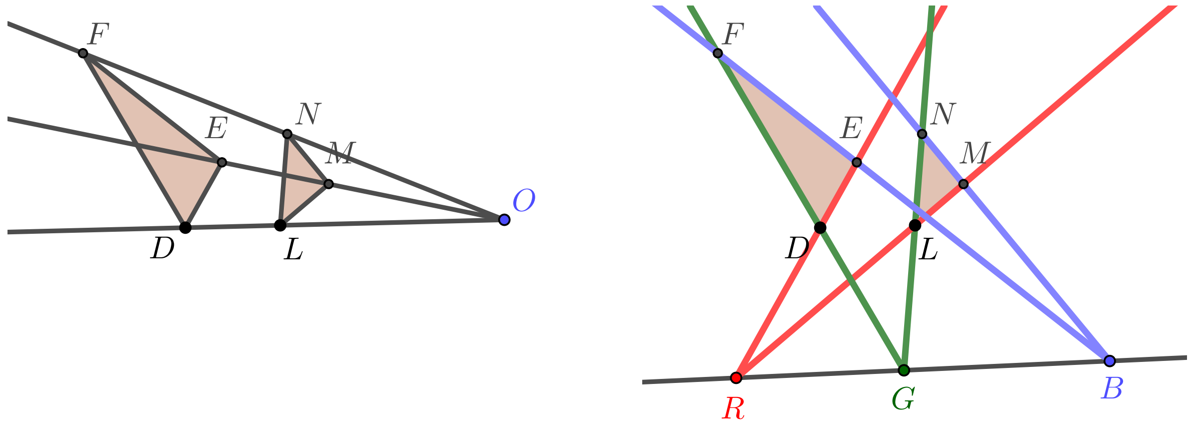


(b) K_5

Kuva 6: **Kuratowskin lause.** Verkko on tasoverkko, jos ja vain jos kumpikaan verkoista $K_{3,3}$ tai K_5 ei ole sen aliverkko.

On osoitettu, että seuraavan tuloksen, Desarguesin lauseen, voi todistaa soveltamalla Pappuksen lausetta kolmesti [Hessenberg (1905), Wikipedia]. Toisaalta Desarguesin lause ei implikoi Pappuksen lausetta.

1.1.3 Desarguesin lause

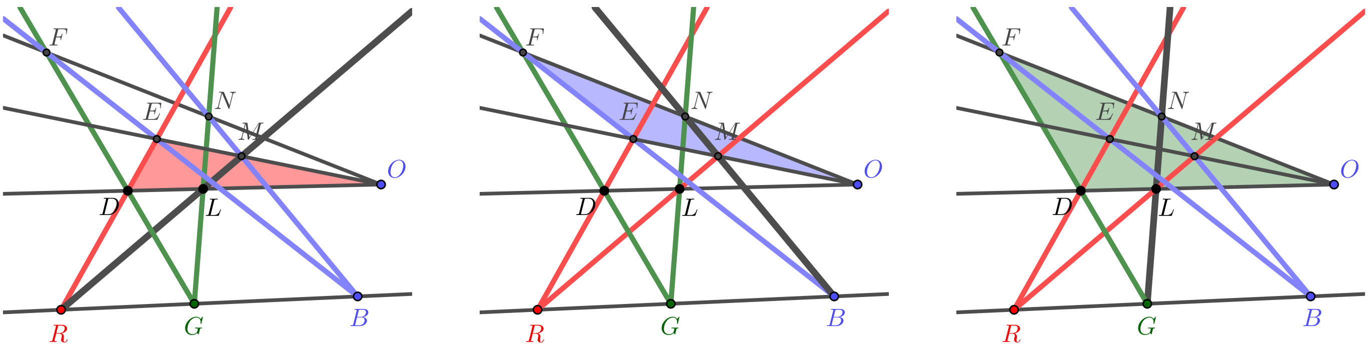


(a) Vastinkärkien kautta piirretyt suorat kohtaavat samassa pisteessä…

(b) …jos ja vain jos vastinsivujen jatkeiden leikkauspisteet ovat samalla suoralla.

Kuva 7: **Desarguesin lause.** Kolmiot ovat “pisteperspektiivissä” jos ja vain jos ne ovat “suoraperspektiivissä”.

Todistus. Todistus nojaa Menelaoksen lauseeseen.



(a) (b) (c)

Kuva 8: Desarguesin lauseen todistus.

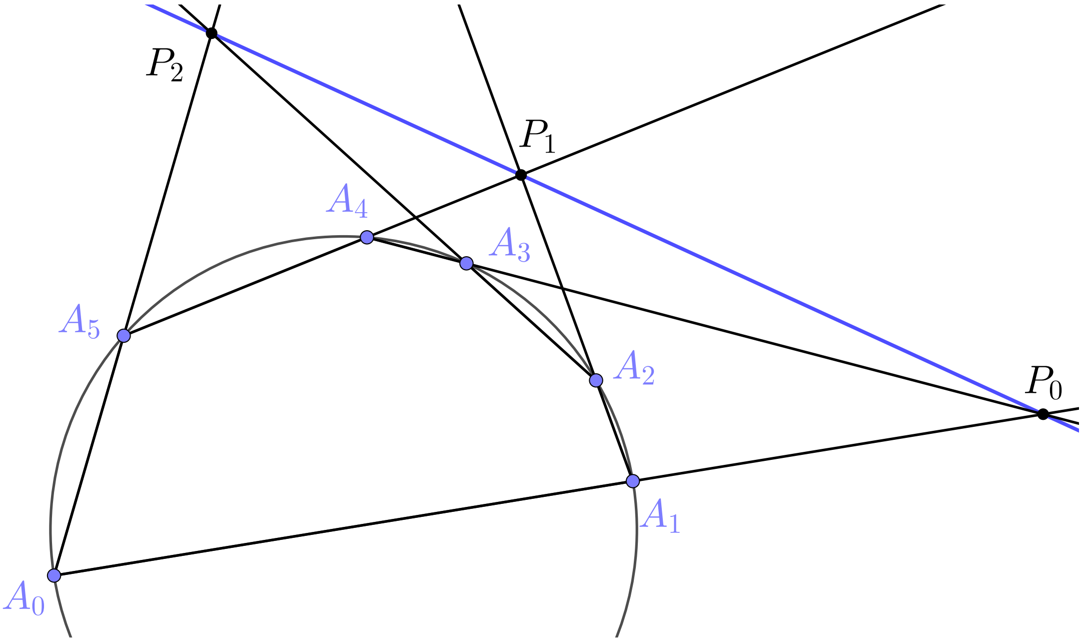
Sovelletaan Menelaoksen lausetta kolmesti. Valitaan kolmiot siten, että jokaisella on kärkenä O, ja kaksi muuta kärkeä ovat kolmion DEF kärkiä. Toisaalta, valitaan näitä leikkaavat suorat siten, että ne ovat kolmion LMN sivuja.

Siis leikataan kolmioita $\triangle EDO$, $\triangle FEO$, $\triangle FDO$ suorilla $\overleftrightarrow{MLR}$, $\overleftrightarrow{NMB}$, $\overleftrightarrow{NLG}$. Saadaan

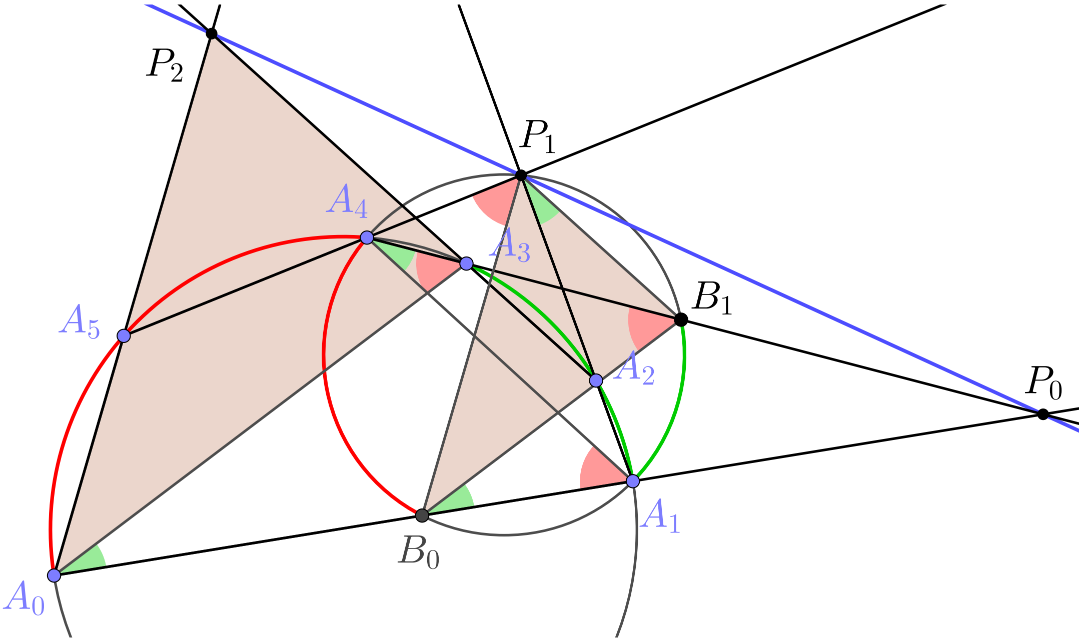
$$1 = \left(\frac{ER}{RD}\frac{DL}{LO}\frac{OM}{ME}\right) \times \left(\frac{FB}{BE}\frac{EM}{MO}\frac{ON}{NF}\right) \times \left(\frac{FG}{GD}\frac{DL}{LO}\frac{ON}{NF}\right)^{-1} = \frac{ER}{RD}\frac{DG}{GF}\frac{FB}{BE},$$

missä käytettiin tietoa, että $1 = 1^{-1}$ ja kirjoitettiin $\left(\frac{FG}{GD}\right)^{-1} = \frac{DG}{GF}$. Mutta tämä on Menelaoksen lauseen kaava kolmion DEF ja kolmikon $\{R, G, B\}$ tapauksessa, joten pisteet R, B, G ovat samalla suoralla.

1.1.4 Pascalin lause



Kuva 9: **Pascalin lause.** Jos ympyrälle piirretyn kuusikulmion vastakkaiset sivut leikkaavat pareittain pisteissä P_0, P_1, P_2, niin nämä pisteet P_0, P_1, P_2 ovat samalla suoralla.



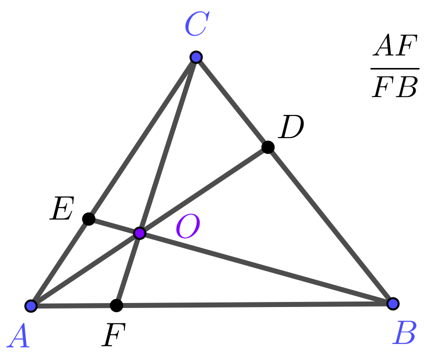
Kuva 10: Pascalin lauseen todistus.

Todistus. Katso Kuva 10. Piirretään ympyrä pisteiden A_1, A_4, P_1 kautta, leikatkoon se suorat $\overleftrightarrow{A_0A_1}$ ja $\overleftrightarrow{A_3A_4}$ pisteissä B_0, B_1. Kehäkulmalauseen nojalla kuvasta löytyy kaksi nelikkoa yhtäsuuria kulmia.

Tästä jotenkin (miten?) päätellään, että kolmioihin $\triangle P_1B_1A_0$ ja $\triangle P_2, A_3, A_0$ voidaan soveltaa Desarguesin lausetta.

1.2 Ceva ja yhdensuuntaisen piirtäminen pelkästään viivotinta käyttäen

1.2.1 Cevan lause



$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$

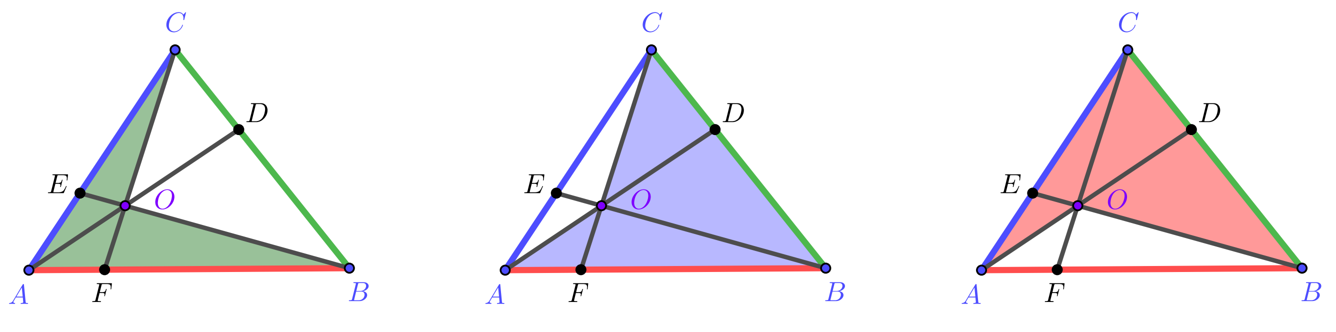
Kuva 11: **Cevan lause.** Kolmion kärjistä sivujanoille piirretyt "cevikset" leikkaavat samassa pisteessä O, jos ja vain jos kaava toteutuu.

Todistus. Todistuksen alussa päätellään, että Kuvan 12, kohdissa (a),(b),(c), janat AD, BE, CF jakavat väritetyn alan samassa suhteessa kuin leikkaamansa sivun. Nimittäin, koska kolmioilla $\triangle BAD$ ja $\triangle DAC$ on yhteinen kärki ja kanta samalla suoralla, niiden pinta-alojen suhde on sama kuin kantojen suhde, eli

$$\frac{|\triangle BAD|}{|\triangle CAD|} = \frac{BD}{DC}.$$

Sama pätee myös kolmioille $\triangle BOD$ ja $\triangle DOC$, joten

$$\frac{|\triangle BOD|}{|\triangle COD|} = \frac{BD}{DC}.$$



Kuva 12: Cevan lauseen todistus.

Saadaan

$$\frac{BD}{DC} = \frac{|\triangle BAD| - |\triangle BOD|}{|\triangle CAD| - |\triangle COD|} = \frac{|\triangle OAB|}{|\triangle OCA|}$$

Vastaavasti päätellään, että

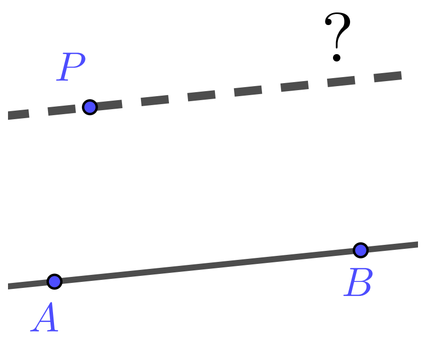
$$\frac{CE}{EA} = \frac{|\triangle OBC|}{|\triangle OAB|}; \quad \frac{AF}{FB} = \frac{|\triangle OCA|}{|\triangle OBC|}.$$

Siis

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = \frac{|\triangle OCA|}{|\triangle OBC|} \times \frac{|\triangle OAB|}{|\triangle OCA|} \times \frac{|\triangle OBC|}{|\triangle OAB|} = 1.$$

1.2.2 Yhdensuuntaisen piirtäminen vain viivotinta käyttäen

Ongelma. Olkoon annettuna suora $\overleftrightarrow{AB}$ ja $P \notin \overleftrightarrow{AB}$. Kuinka voitaisiin pelkästään viivotinta käyttäen piirtää yhdensuuntainen $L \parallel \overleftrightarrow{AB}$, jolle $P \in L$?



Kuva 13: Voitaisiinko pisteen P kautta piirtää yhdensuuntainen suoralle AB vain viivotinta käyttäen?

Osoittautuu, että ongelman voi ratkaista ainakin, jos

(i) On lisäksi annettu pisteiden A ja B keskipiste F;

(ii) On lisäksi annettu jokin ympyrä ja sen keskipiste (sijainti saa olla mikä tahansa).

Tapaus (i). Piirretään puolisuora $\overrightarrow{AP}$ ja otetaan mielivaltainen piste $C \in \overrightarrow{AP}$. Piirretään janat BC, BP ja FC. Tällöin janat BP ja FC leikkaavat, olkoon $O = BP \cap FC$, katso Kuva 14(b). Piirretään puolisuora $\overrightarrow{AP}$ ja puolisuora $\overrightarrow{BC}$, jotka leikkaavat pisteessä $D = \overrightarrow{AP} \cap \overrightarrow{BC}$. Tällöin $\overleftrightarrow{PD}$ on etsitty yhdensuuntainen.

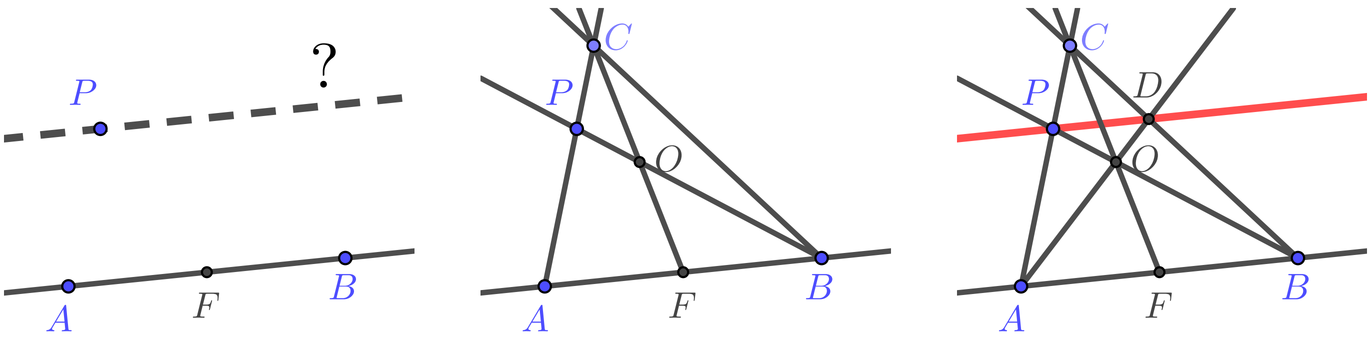
Perustelu. Koska janat AOD, BOP, COF kulkevat pisteen O kautta ja $AF/FB = 1$, niin Cevan lauseen perusteella

$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CP}{PA} = 1 \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CP}{PA} = 1,$$

joten

$$\frac{CP}{CD} = \frac{PA}{DB} = \frac{CA}{CB}.$$

Siis kolmioiden $\triangle CPD$ ja $\triangle CAB$ kyljet ovat samassa suhteessa. Koska huippukulma $\angle PCD = \angle ACB$, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset $\triangle CPD \sim \triangle CAB$. Näin ollen vuorokulmat $\angle BAP = \angle DPC$ eli kantasuorat ovat yhdensuuntaiset, eli $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{PD}$.



(a) (b) (c)

Kuva 14: Yhdensuuntaisen piirtäminen vain viivotinta käyttäen.

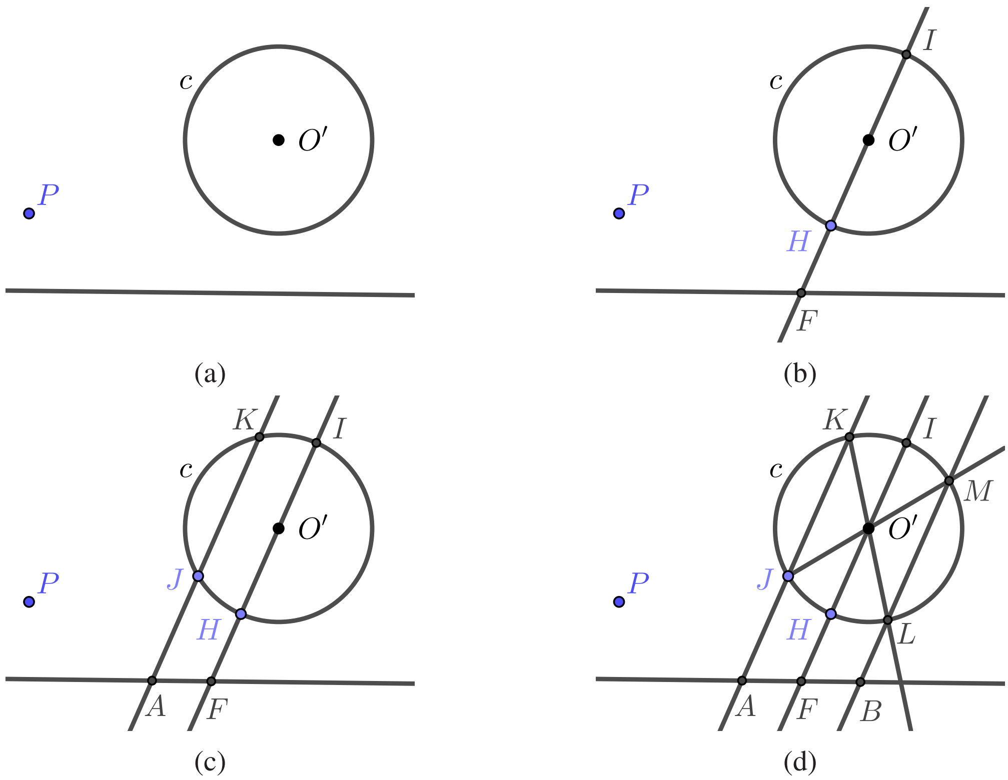
Tapaus (ii). Olkoon annettuna suora, suoran ulkopuolinen piste P, ympyrä c ja ympyrän keskipiste O'. Otetaan annetulta suoralta piste F ja piirretään suora $\overleftrightarrow{FO'}$. Olkoot $\{H, I\} = c \cap \overleftrightarrow{FO'}$, tällöin $HO = OI$, Kuva 15(b).

Otetaan ympyrältä jokin muu piste J. Tapauksen (i) nojalla osataan piirtää pisteen J kautta yhdensuuntainen janalle HI, leikatkoon tämä ympyrän pisteessä K ja alkuperäisen suoran pisteessä A, Kuva 15(c).

Piirretään puolisuorat $\overrightarrow{JO}$ ja $\overrightarrow{KO}$, leikatkoon nämä ympyrän pisteissä M ja L. Piirretään suora $\overleftrightarrow{ML}$, leikatkoon se alkuperäisen suoran pisteessä B, Kuva 15(d).

Koska kolmiot $\triangle JOK$ ja $\triangle MOL$ ovat yhdenmuotoisia, niin vuorokulmalauseen nojalla suora $\overleftrightarrow{ML}$ on yhdensuuntainen suorien $\overleftrightarrow{JK}$ ja $\overleftrightarrow{HI}$ kanssa. Koska lisäksi $JO' = O'M$, niin pätee $AF = FB$.

Nyt ollaan tapauksen (i) tilanteessa ja osataan piirtää alkuperäisen suoran kanssa yhdensuuntainen suora pisteen P kautta.



Kuva 15: Yhdensuuntaisen piirtäminen vain viivotinta käyttäen.