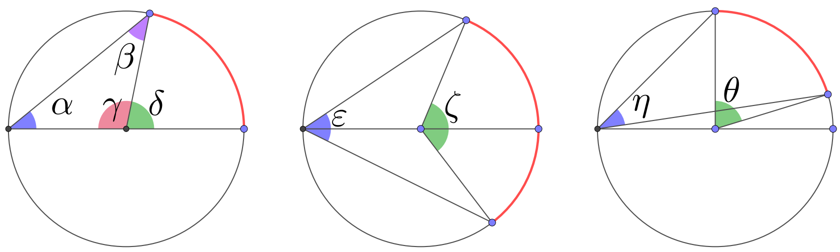
Euklidinen geometria
Harjoitus 4/2018

1. Todista kehäkulmalause: “Keskuskulma on kaksinkertainen kuin samaa kaarta vastaava kehäkulma”. Siis todista, että Kuvassa 1 pätee $\alpha = \beta$, $2\alpha = \delta$, $2\varepsilon = \zeta$ ja $2\eta = \theta$.



Kuva 1: Kehäkulmalauseen todistus.

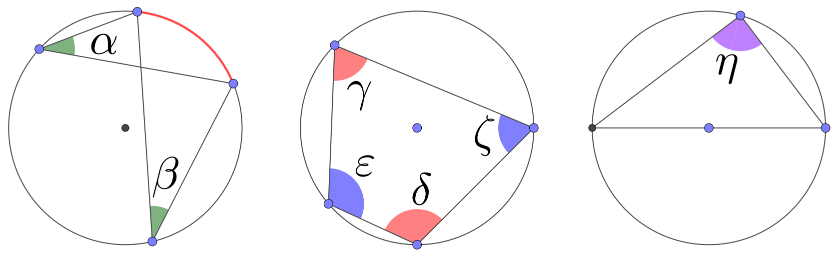
2. Todista kehäkulmalauseen seuraukset, jotka liittyvät Kuvaan 4:

(a) “Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat yhtä suuret”, eli $\alpha = \beta$.

(b) “Jännenelikulmion vastakkaisten kulmien summa on $180°$”, eli $\gamma + \varepsilon = \delta + \zeta = 180°$.

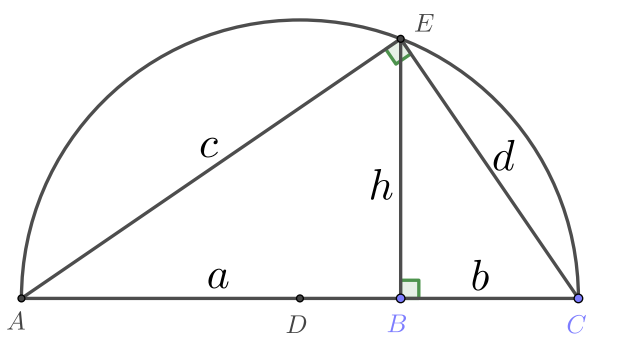
(c) “Puoliympyrän kehäkulma on suora”, eli $\eta = 90°$.[1]

Vinkki: piirrä ympyröille tarvittaessa lisää säteitä.



Kuva 2: Kehäkulmalauseen seurauksia.

3. Kuvassa 3 on puoliympyrä, jolla on keskipisteenä D. Osoita, että $ab = h^2$ pätee.[2]



Kuva 3: Jana h on janojen a ja b niinsanottu geometrinen keskiarvo.

[1] Tämä on niinsanottu Thaleen lause. Thales Miletoslainen (n. 636–546 eaa.)

[2] Siis tätä konstruktiota hyödyntäen osataan piirtää suorakulmion (sivut a ja b) kanssa pinta-alaltaan yhtä suuri neliö. Lisäksi, aloittaen annetusta janasta, jonka pituus on 1, voidaan harpilla ja viivottimella konstruoida janat, joiden pituudet ovat $2^{1/2}, 2^{1/4}, 2^{1/8}$ jne. Vertailun vuoksi $2^{1/3}$ pituista janaa ei voida konstruoida harpilla ja viivottimella, kuten H1T3 yhteydessä oli puhetta.

4. Tarkastellaan Kuvaa 3 ja merkitään $e = a + b$. Yhdenmuotoisuutta käyttäen, osoita, että

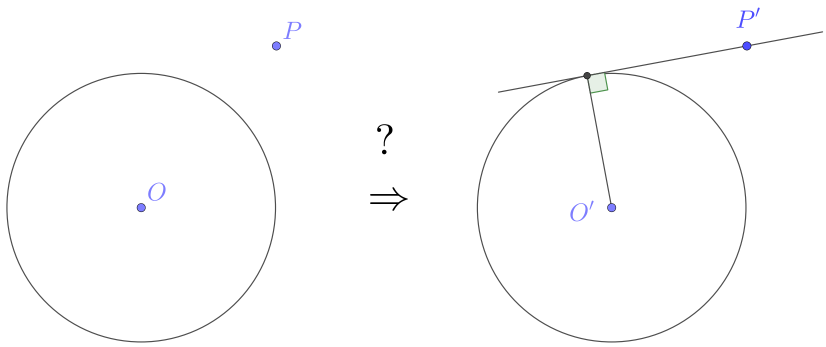
$$\frac{c}{e} = \frac{a}{c} \quad \text{ja} \quad \frac{d}{e} = \frac{b}{d}. \tag{1}$$

Tätä tietoa käyttäen päättele, että

$$\left(\frac{c}{e}\right)^2 + \left(\frac{d}{e}\right)^2 = 1,$$

ja että $c^2 + d^2 = e^2$ pätee.[3].

5. Annettuna on ympyrä, ympyrän keskipiste O ja ympyrän ulkopuolinen piste P. Kuinka voit piirtää ympyrälle tangentin, joka kulkee pisteen P kautta?



Kuva 4: Kehäkulmalauseen seurauksia.

6. Annettuna on jana AB, jonka pituus on 1. Kuinka voit konstruoida:

(a) Janan, jonka pituus on $\sqrt{5}$? (*Vinkki: Pythagoraan lause.*)

(b) Janan, jonka pituus on $1 + \sqrt{5}$?

(c) Janan, jonka pituus on $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618$?

(d) Tasakylkisen kolmion, jolla on sivujen pituudet 1 ja $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ja $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$?

(e) Säännöllisen viisikulmion, jonka sivun pituus on 1 (ja lävistäjän pituus siis $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ks. H2T6)?

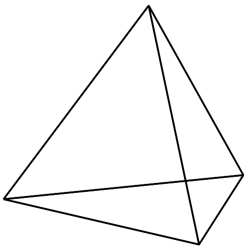
Origamitehtävä:

7. Ellipsin hahmotteleminen paperia taittelemalla. Ohje löytyy esimerkiksi hakusanalla ”ellipse origami” tai videolta: https://www.youtube.com/watch?v=pSTa8a36RCU

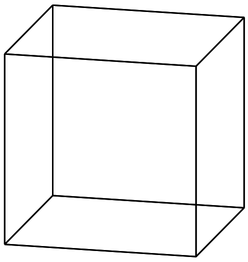
[3]Pythagoraan lauseen voi siis todistaa tällä tavalla yhdenmuotoisuutta käyttäen. Antiikin kreikkalaiset vierok-suivat tätä todistusta. Olihan saatu osoitettua, että esimerkiksi neliön lävistäjän ja sivun suhdetta $\sqrt{2}$ ei voi esittää kahden kokonaisluvun osamääränä. Murtolukulaskenta (1) tuntui sen vuoksi hämmentävältä: jos luvut c ja e eivät ole kokonaislukujen osamääriä, kuinka ihmeessä voitaisiin tarkastella osamäärää c/e? Tämä on yksi syy siihen, että Eukleideen Alkeissa Pythagoraan lause todistetaan toisella “helpommalla” tavalla.

Ekstratehtävä:

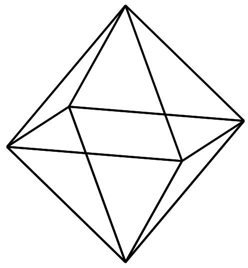
8. Niinsanottu Eulerin monitahokaslause väittää, että reiättömälle monitahokkaalle pätee kaava $\chi = V - E + F = 2$, missä V on kärkien lukumäärä, E on särmien lukumäärä ja F on tahkojen lukumäärä. Täytä Kuvan 5 kappaleita [4] koskeva Taulukko 1.



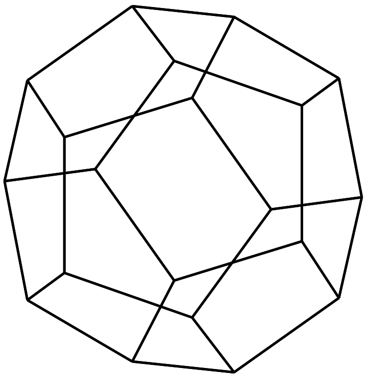
(a) Tetraedri



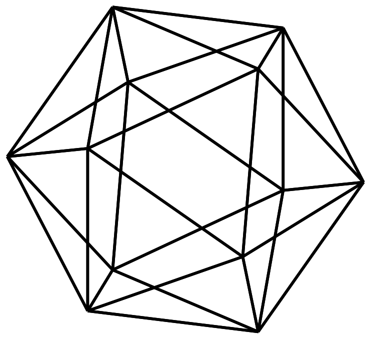
(b) Kuutio



(c) Oktaedri



(d) Dodekaedri



(e) Ikosaedri

Kuva 5: Platonin kappaleet eli säännölliset monitahokkaat.

Taulukko 1: Eulerin karakteristika $\chi = V - E + F$.

monitahokas	kärkiä V	särmiä E	tahkoja F	$\chi = V - E + F$
tetraedri				
kuutio	8	12	6	$8 - 12 + 6 = 2$
octaedri				
dodecaedri				
icosaedri				

[4]Kuvat on tehty eräällä numeerisen laskennan ohjelmalla. Koodit ja kuvat ovat (pian) Creative Commons -lisenssillä jaossa osoitteessa http://cs.uef.fi/ juhuusko/creative-commons/numerical/