

Euklidinen geometria

Harjoitus 5/2018

1. Kuinka voit jakaa annetun janan seitsemään osaan?

Vinkki: Ratkaisua kutsutaan joskus Eukleideen harpuksi. [Eukleideen Alkeet, Tehtävä 6.9.]

2. Laske ketjumurtoluvun

$$x := \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

tarkka arvo.

Vinkki: voitko keksiä ketjumurtoesityksestä yhtälön, jonka luku x toteuttaa?

3. (a) Fibonaccin luvut määritellään rekursiokaavalla

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad (1)$$

jossa käytetään alkuarvoja $F_0 = 1, F_1 = 1$. Laske arvot F_2, F_3, \dots, F_{10} .

(b) Kun kaava (1) jaetaan puolittain tekijällä F_n , saadaan kaava

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = 1 + \frac{F_{n-1}}{F_n}. \quad (2)$$

Oleta, että raja-arvo

$$y := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

on olemassa ja päätele luvun y tarkka arvo kaavaa (2) käyttäen. Tehtävän (a)-kohtaa käyttäen, laske likiarvo $y \approx F_{10}/F_9$.

4. Piirrä "kultainen spiraali" seuraavalla algoritmilla.

Aloituis: piirrä ruutupaperin keskelle 1×1 neliö. Vasen yläkulma keskipisteenä piirrä neliön sisälle suurin mahdollinen ympyrän kaari.

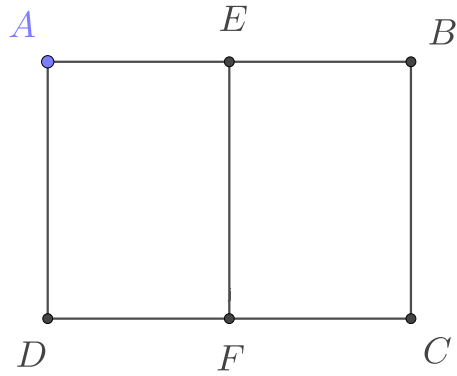
Iterointi (toista (i), (ii), (iii), (i), (ii), (iii), ... kunnes paperi käy liian pieneksi):

- (i) Kierrä paperia 90° myötäpäivään.
 - (ii) Valmiina on suorakulmio (kanta a , korkeus b), piirrä oikealle sivulle yhtä korkea neliö (sivu b). Saat uuden, suuremman suorakulmion (kanta $a + b$, korkeus b).
 - (iii) Viimeksi piirretylle neliölle: vasen yläkulma keskipisteenä piirrä neliön sisälle suurin mahdollinen ympyrän kaari.
5. Kuvassa 1 on A4-paperiarkki $ABCD$, joka on taitettu kahtia, jolloin on muodostunut taitos EF . Osoitautuu, että muodostuvat suorakulmiot ovat yhdenmuotoisia: $ABCD \approx BCFE \approx EFDA$. Olkoon $AD = a$ ja $AB = b$, jolloin $AE = b/2$.

Määritä suhteelle b/a likiarvo mittaamalla jonkin A4-arkin, esim. tämän tehtäväpaperin, sivut viivottimella. Yhdenmuotoisuutta apuna käyttäen laske suhde b/a sekä pituus DB . Voisitko tarkistaa lukuarvon b/a taittelemalla A4-paperiarkkia?

6. Jatkoa tehtävään 3. A4-paperiarkki $ABCD$ on saatu puolittamalla A0-arkki neljä kertaa. Prosessissa syntyvät keskenään yhdenmuotoiset arkit A_0, A_1, A_2, A_3 ja A_4 . Edelleen $BCFE$ on A5-arkki. A0-arkin pinta-ala on 1 m^2 .

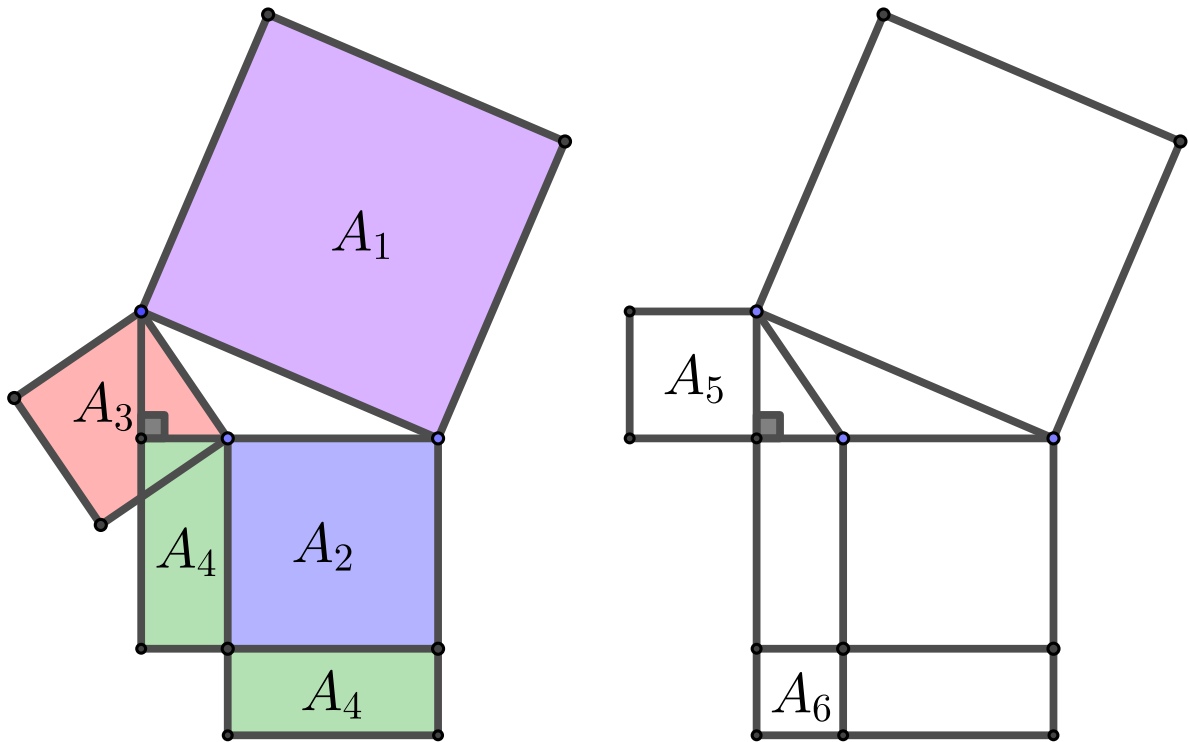
Kuinka suuri on A4 arkin pinta-ala? Laske sivujen a ja b pituudet millimetreinä. Paperipakkauksessa ilmoitetaan, että paperin massa on 80 g/m^2 . Laske yhden A4-arkin massa.



Kuva 1: Puoliksi taitettu A4-arkki. Kaikki kulmat ovat suoria.

7. Todista kosinilause. Toisin sanoin, todista, että Kuvassa 2 pätee $A_1 = A_2 + A_3 + 2A_4$.

Vinkki: Voit esimerkiksi soveltaa Pythagoraan lausetta useamman kerran peräkkäin.



Kuva 2: Kosinilauseen todistus.

Origamitehtäviä:

8. Ikosaedrin tekeminen paperista. Millainen tahansa ratkaisu käy. Ohjeet esimerkiksi:

- <https://www.youtube.com/watch?v=XPXr8zttq6M>
- <https://www.youtube.com/watch?v=aREcvosgueM>