

Euklidinen geometria
Harjoitus 6/2018

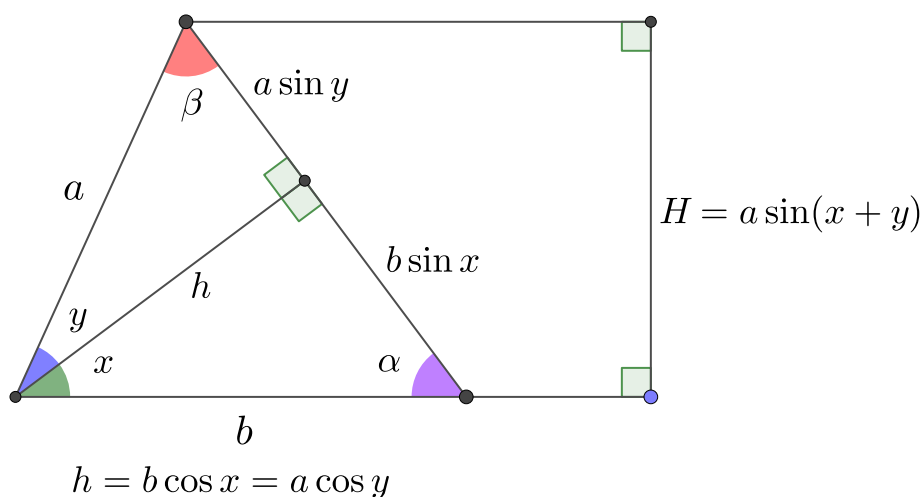
1. Todista sinilause, eli että Kuvassa 1 pätee

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}. \quad (1)$$

2. Todista summan sinin kaava, eli että Kuvassa 1 pätee

$$\sin(x + y) = \sin(x) \cos(y) + \cos(x) \sin(y) \quad (2)$$

Vinkki: Käytä kolmion pinta-alan kaavaa.



Kuva 1: Sinilause ja summan sini. © ⓘ

3. Kaavaa (2) derivoimalla johda kaava

$$\cos(x + y) = \cos(x) \cos(y) - \sin(x) \sin(y) \quad (3)$$

4. Kaavaa (2) apuna käyttäen osoita kaavat

$$2 \sin(x) \cos(y) = \sin(x + y) + \sin(x - y), \quad (4)$$

$$2 \sin(x) \sin(y) = \cos(x - y) - \cos(x + y), \quad (5)$$

$$2 \cos(x) \cos(y) = \cos(x + y) + \cos(x - y), \quad (6)$$

Sitten johda kaavoista (5) ja (6) kaavat

$$\sin^2(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2x)), \quad (7)$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2x)). \quad (8)$$

Vinkki. Johda aluksi kaava (4). Saat siitä derivoimalla kaavat 5 ja 6.

5. Johda kaavat (2) ja (3) käyttämällä Eulerin identiteettiä

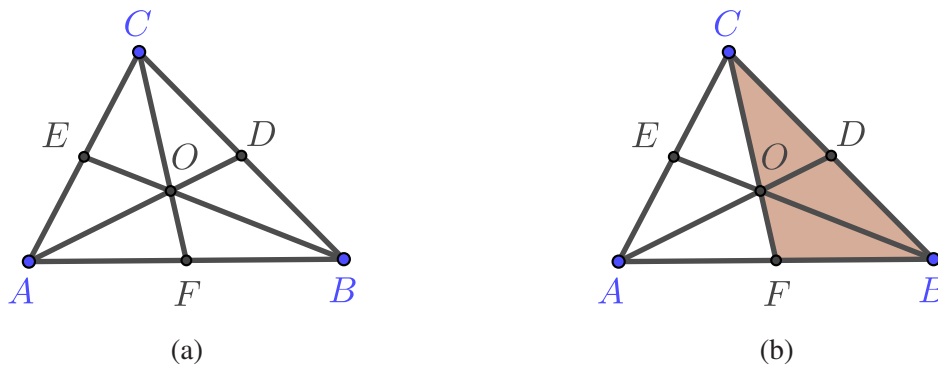
$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta), \tag{9}$$

sekä ominaisuuksia $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ja $i^2 = -1$.

6. Piirrä sopiva kolmio ja päätele, että $\sin(30^\circ) = 1/2$ ja $\cos(30^\circ) = \sqrt{3}/2$. Kaavoja 7 ja 8 käyttäen, laske tarkat arvot $\sin(15^\circ)$ ja $\cos(15^\circ)$.

7. Kuvassa 2 on kolmio $\triangle ABC$, jonka sivuilta on otettu keskipisteet D, E, F , siis esimerkiksi $BD = DC$. Käänteisen Cevan lauseen avulla voidaan osoittaa, että mediaanit AD, BE ja CF leikkaavat samassa pisteessä O .

Sovella Menelaoksen lausetta kolmioon $\triangle FBC$ ja suoraan \overleftrightarrow{AD} ja päätele, että $OC = 2OF$.



Kuva 2: Mediaanien leikkauspiste.