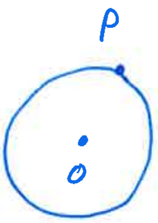
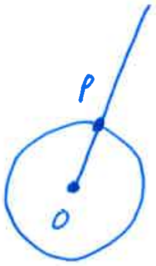
EUKLIDINEN GEOMETRIA
HARJOITUS 3/2018
RATKAISUT

1. ESIMERKKI RATKAISU

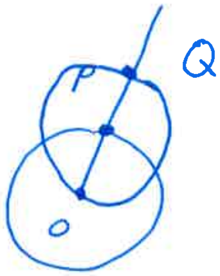


PIIRRÄ $\overrightarrow{OP}$ →



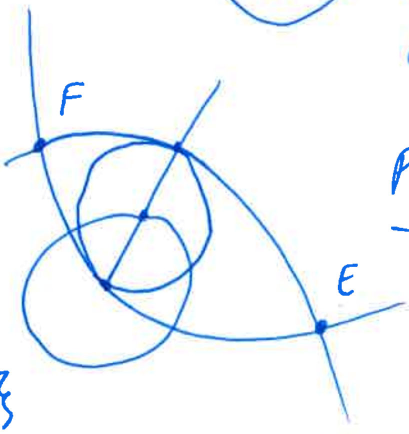
PIIRRÄ $C(P, OP)$ →

OLKOON $Q = C(P, OP) \cap \overrightarrow{OP}$

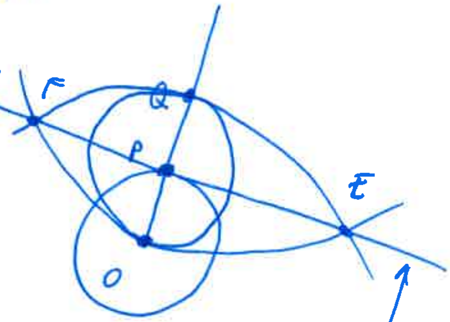


PIIRRÄ $C(O, OQ)$ $C(Q, OQ)$ →

OLKOON $C(O, OQ) \cap C(Q, OQ) = \{E, F\}$



PIIRRÄ $\overleftrightarrow{EF}$ →



NYT $\overleftrightarrow{EF}$ ON HALUTTU TANGENTTI, ELI $P \in \overleftrightarrow{EF}$ JA $OP \perp \overleftrightarrow{EF}$.

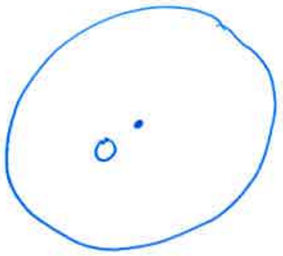
PERUSTELU: TASASIVUISINA KOLMIOINA $\triangle OFQ \cong \triangle OEQ$

$\overset{SKS}{\Rightarrow} \triangle PFQ \cong \triangle PEQ \cong \triangle PEO \cong PFO$

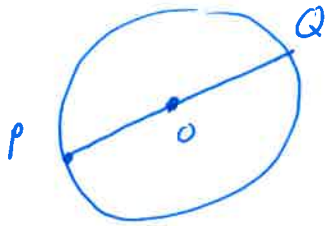
$\Rightarrow \measuredangle OPE = 90° \Rightarrow OP \perp \overleftrightarrow{EF}$

[JA JOS $P \in \overleftrightarrow{EF}$ EI OLISI SELVÄÄ, NIIN KOSKA $\measuredangle FPO = 90° = \measuredangle OPE$, NIIN $\overleftrightarrow{FP} = \overleftrightarrow{PE} \Rightarrow P \in \overleftrightarrow{EF}$]

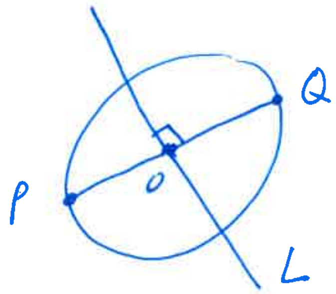
2.



OTA YMPYRÄLTÄ PISTE P $\longrightarrow$ PIIRRÄ HALKAISIJA OPQ

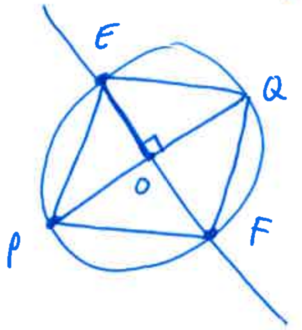


PIIRRÄ KOHTISUORA $L \perp PQ$, JOLLE $O \in L$ $\longrightarrow$



OLKOOT $L \cap C(O, OP) = \{E, F\}$
PIIRRÄ EP, PF, FQ, QE

$\longrightarrow$



NYT KUVIO EPFQ ON NELIÖ
ELI $EP = PF = FQ = QE$
JA $\sphericalangle FPE = \sphericalangle QFP = \sphericalangle EQF = \sphericalangle PEQ = 90°$

PERUSTELU:
$$\begin{cases} EO = EO \\ OP = OQ \\ \sphericalangle EOP = \sphericalangle EOQ \end{cases} \overset{SKS}{\Longrightarrow} \triangle EOP \cong \triangle EOQ$$

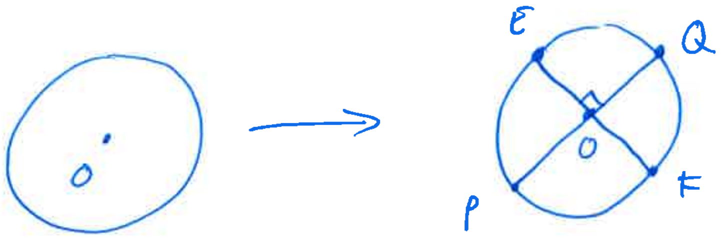
VASTAAVASTI TODETAAN, ETTÄ
$\triangle EOP \cong \triangle EOQ \cong \triangle FOP \cong FOQ$

$\Rightarrow EP = EQ = FP = FQ$

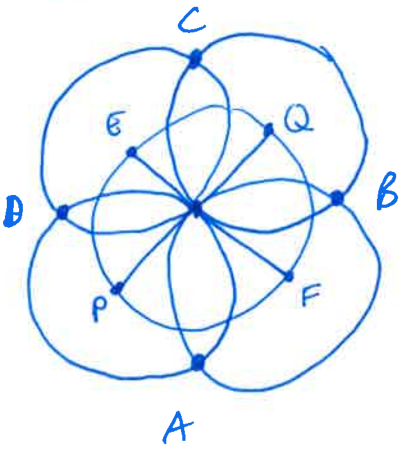
KOLMION KULMIEN SUMMA $= 180°$, JOTEN
$$\begin{cases} \sphericalangle OEQ = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45° \\ \sphericalangle PEO = \dfrac{180° - 90°}{2} = 45° \end{cases} \Rightarrow \sphericalangle PEQ = 90°$$

MUUT KULMAT VASTAAVASTI.

3. PIIRRÄ HALKAISIJA PQ JA SILLE KOHTISUORA HALKAISIJA EF PISTEEN O KAUTTA



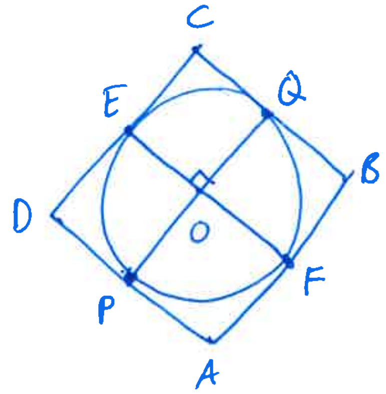
PIIRRÄ $C(E, EO)$
$C(Q, QO)$
$C(P, PO)$
$C(F, FO)$



OLKOOT A, B, C, D NÄIDEN LEIKKAUSPISTEET KUTEN KUVASSA

PIIRRÄ ABCDA MURTOVIIVA

$\boxed{\Rightarrow \text{ABCD ON HALUTTU NELIÖ}}$



PERUSTELU:

SIIS ESIM. OQCE ON SUUNNIKAS, JONKA KAIKKI SIVUT OVAT YHTÄ PITKIÄ. NYT KOSKA $\sphericalangle QOE = 90°$ JA (SSS-LAUSEEN NOJALLA) $\sphericalangle ECQ = 90°$, NIIN $\sphericalangle OEC + \sphericalangle CQO = 180°$

SSS-LAUSEEN NOJALLA $\sphericalangle OEC = \sphericalangle CQO$

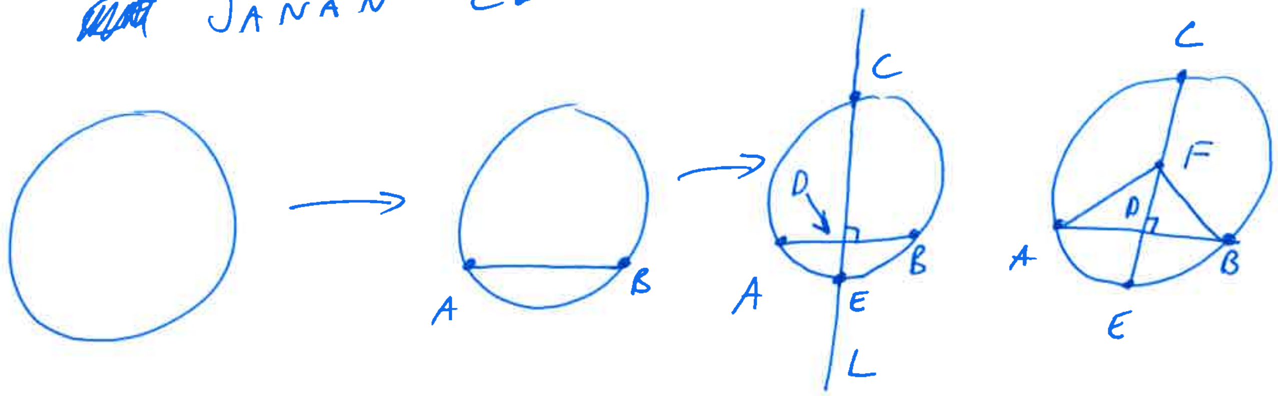
$\Rightarrow \sphericalangle OEC = \sphericalangle CQO = \frac{180°}{2} = 90°$

$\Rightarrow$ OQCE ON NELIÖ (SAMOIN $\begin{cases} OFBQ \\ OPAF \\ OEDB \end{cases}$)

$\Rightarrow$ ABCD ON NELIÖ.

[KOSKA $OQ \perp BC$, NIIN $BC \cap C(O, OQ) = Q$
$\Rightarrow ABCD \cap C(O, OQ) = \{Q, E, P, F\} \Rightarrow$ NELIÖ ON ULKOPUOLELLA]

4. PIIRRETÄÄN YMPYRÄLLE JÄNNE, AB, JÄNTEELLE KESKINORMAALI, L. SEN YMPYRÄN SISÄLLÄ OLEVA OSA OLKOON CE. JANAN CE KESKIPISTE OLKOON F.



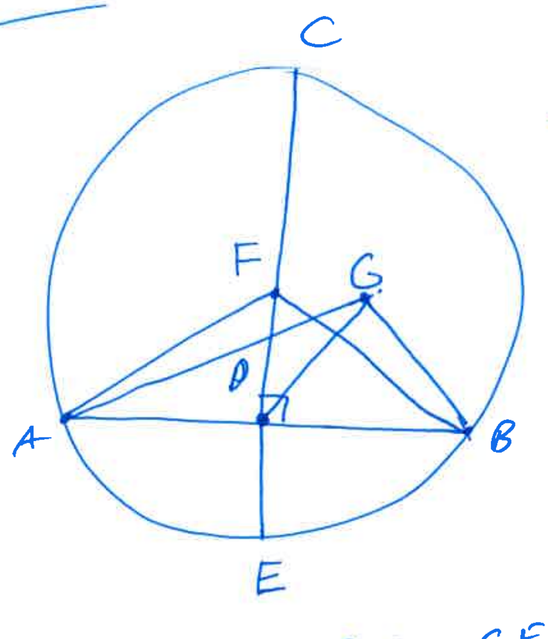
$AD = DB$

$L \perp AB,\ D \in L$

$CF = CE$

VÄITE: F ON YMPYRÄN KESKIPISTE

AT $G \neq F$ ON YMPYRÄN KESKIPISTE



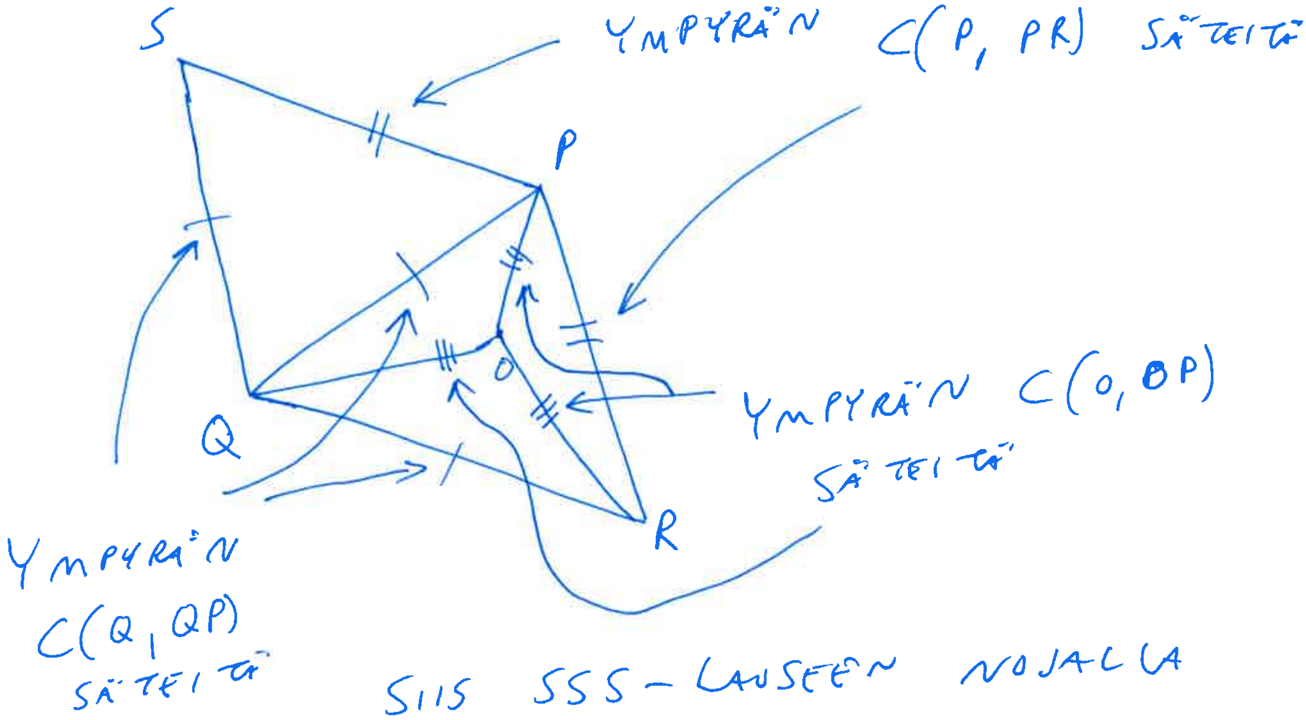
$$\left.\begin{array}{l} AD = DB \\ AG = GB \\ DG = DG \end{array}\right\} \overset{SSS}{\Rightarrow} \triangle ADG \cong \triangle BDG \Rightarrow \measuredangle ADG = 90^\circ = \measuredangle ADF$$

KUVA $\rightarrow\ < \measuredangle ADG$

$\Rightarrow$ RISTIRIITA

SAMOIN $G \in CE$, $G \neq F$ EI VOI OLLA KESKIPISTE, KOSKA $G \neq F \Rightarrow CG \neq EG \Rightarrow$ RR

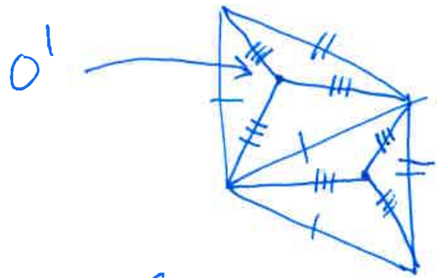
5.



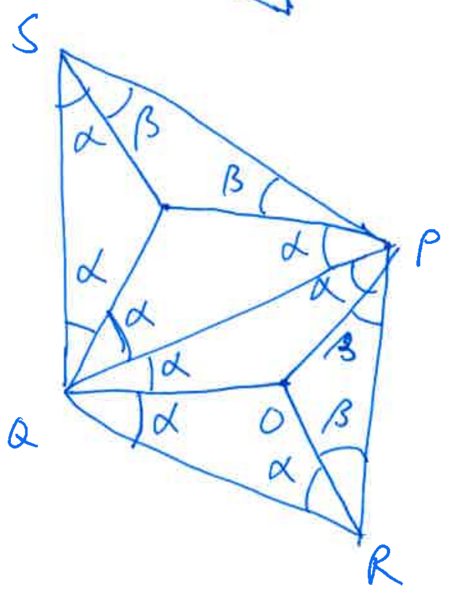
SIIS SSS-LAUSEEN NOJALLA

$\triangle SQP \cong \triangle PQR$

OLKOON O' PISTEEN O KOPIO SAMALLA PAIKALLA KOLMIOSSA $\triangle SQP$



TASA KYLKISYYDESTÄ JOHTUEN SYNTYY YHTÄ SUURIA KULMIA



KOLMIO $\triangle QRP$

$\Rightarrow 4\alpha + 2\beta = 180^\circ$

$\Rightarrow 2\alpha + \beta = 90^\circ$

NYT

$\measuredangle SPO = \beta + 2\alpha = 90^\circ$

NIINKUIN HALUTTIIN