Euklidisen geometrian jatkokurssi
Harjoitus 2/2018
Ratkaisut

1. Kuva 1 liittyy sekä sinilauseeseen että summan sinin kaavaan.

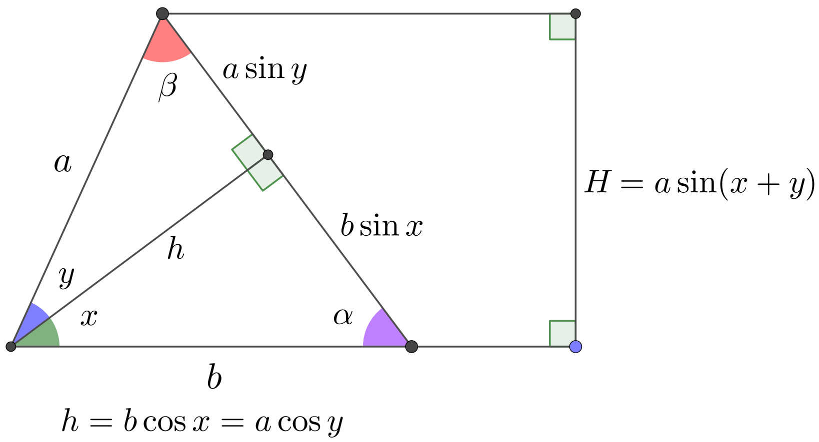
(a) Todista sinilause

$$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b}. \tag{1}$$

(b) Todista summan sinin kaava

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \tag{2}$$

käyttäen kolmion pinta-alan kaavaa.



Kuva 1: Sinilause ja summan sini.

2. Kaavaa (2) apuna käyttäen osoita kaavat

$$
\begin{aligned}
2\sin(x)\cos(y) &= \sin(x+y) + \sin(x-y), && (3)\\
2\sin(x)\sin(y) &= \cos(x-y) - \cos(x+y), && (4)\\
2\cos(x)\cos(y) &= \cos(x+y) + \cos(x-y), && (5)\\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y). && (6)
\end{aligned}
$$

Sitten johda kaavoista (4) ja (5) kaavat

$$
\begin{aligned}
\sin^2(x) &= \frac{1}{2}(1-\cos(2x)), && (7)\\
\cos^2(x) &= \frac{1}{2}(1+\cos(2x)). && (8)
\end{aligned}
$$

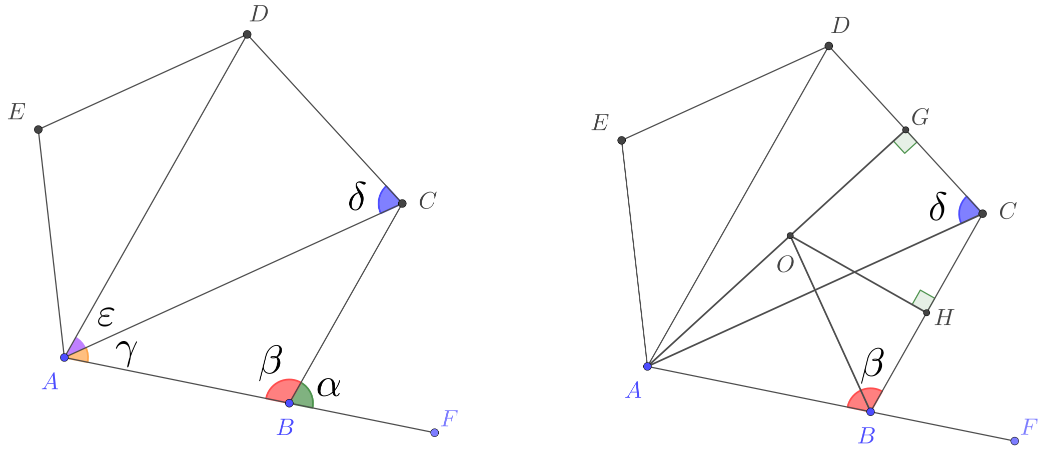
Vinkki. Johda aluksi kaava (3). *Sitten osittaisderivoi kaavoja* (3) *ja* (2).

3. Johda kaavat (2) ja (6) käyttämällä Eulerin identiteettiä

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta), \tag{9}$$

sekä ominaisuuksia $e^{z+w} = e^z \cdot e^w$ ja $i^2 = -1$.

6. Kuvassa 2 on säännöllinen viisikulmio $ABCDE$ (sivun pituus 1). Piste O on viisikulmion $ABCDE$ keskipiste, eli siis yhtä kaukana kärkipisteistä. Jana BO jakaa kulman β kahtia. Trigonometristen funktioiden (sini, kosini, tangentti, ym.) avulla, laske pituudet GA, CA, BO ja HO. Likiarvot riittävät.



Kuva 2: Viisikulmioon $ABCDE$ liittyviä kulmia ja janoja. harjoituksissa (H1T5) laskettiin arvot $\alpha = \delta = 72°$, $\beta = 108°$ ja $\gamma = \varepsilon = 36°$.

Ratkaisu. Siis $BH = GC = 1/2$. Kosinin määritelmän nojalla

$$\cos(\delta) = \frac{1/2}{AC},$$

joten

$$AC = \frac{1}{2\cos(\delta)} = \frac{1}{2\cos(72°)} \quad \text{ja vastaavasti} \quad OB = \frac{1}{2\cos(\beta/2)} = \frac{1}{2\cos(54°)}.$$

Edelleen tangentin määritelmän nojalla

$$\tan(\delta) = \frac{AG}{1/2},$$

joten

$$AG = \frac{\tan(\delta)}{2} = \frac{\tan(72°)}{2} \quad \text{ja vastaavasti} \quad OH = \frac{\tan(\beta/2)}{2} = \frac{\tan(54°)}{2}$$

Saadaan likiarvot

$$\begin{aligned} AC &\approx 1.618 \\ OB &\approx 0.851 \\ OH &\approx 0.688 \\ AG &\approx 1.539. \end{aligned}$$

Tapa II. Lasketaan nyt tarkat arvot

$$\begin{aligned}\cos(72^\circ) &= \frac{\sqrt{5}-1}{4}\\ \tan(72^\circ) &= \sqrt{5+2\sqrt{5}}\\ \cos(54^\circ) &= \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\\ \tan(54^\circ) &= \sqrt{\frac{5+2\sqrt{5}}{5}},\end{aligned}$$

jolloin

$$AC = \frac{1}{2\cos(72^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

eli AC on niinsanottu kultainen luku φ,

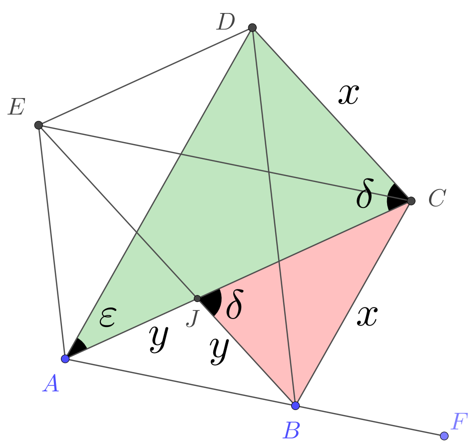
$$OB = \frac{\tan(72^\circ)}{2} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2},$$

ja

$$OH = \frac{1}{\cos(54^\circ)} = \frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}$$

ja

$$AG = \frac{\tan(54^\circ)}{2} = \frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2\sqrt{5}}.$$



Kuva 3: Viisikulmio ja kultainen leikkaus.

Skaalataan viisikulmiota ja tarkastellaan Kuvaa 3. Asetetaan $x + y = 1$, jolloin $y = 1 - x$. Kolmiot $\triangle ADC$ ja $\triangle CBJ$ ovat yhdenmuotoiset. Siis $1/x = x/(1-x)$, josta voidaan ratkaista, että

$$x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}; \quad \varphi = \frac{1}{x} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Sinilauseen nojalla pätee

$$\frac{\sin(\delta)}{1} = \frac{\sin(\varepsilon)}{x},$$

joten neliöön korottamalla ja puolittain luvulla x^2 kertomalla saadaan

$$x^2 \sin^2(\delta) = x^2(1 - \cos^2(\delta)) = \sin^2(\varepsilon) \overset{(7)}{=} \frac{1}{2}(1 - \cos(2\varepsilon)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\delta)),$$

josta voidaan poimia kaava

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{1 - \cos^2(\delta)}{1 - \cos(\delta)} = \frac{(1 + \cos(\delta))(1 - \cos(\delta))}{1 - \cos(2x)} = 1 + \cos(\delta)$$

ja saadaan

$$\cos(\delta) = \frac{1}{2x^2} - 1.$$

Tässä

$$\frac{1}{x} = \varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

joten

$$\frac{1}{2x^2} = \frac{1}{2}\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4} = \frac{3 + \sqrt{5}}{4}$$

ja siis

$$\cos(\delta) = \cos(72^\circ) = \frac{1}{2x^2} - 1 = \frac{\sqrt{5} - 1}{4},$$

mikä toisaalta jo tiedettiin.

Arvon $\tan(72^\circ)$ laskemiseksi huomataan aluksi, että kaikilla $t \in \mathbf{R}$, $t \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, pätee

$$\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)} = \frac{\pm\sqrt{\sin^2(t)}}{\cos(t)} = \pm\sqrt{\frac{1}{\cos^2(t)} - 1}. \tag{10}$$

Nyt

$$\frac{1}{\cos^2(72^\circ)} = \frac{16}{5 - 2\sqrt{5} + 1} = \frac{8}{3 - \sqrt{5}} = \frac{8(3 + \sqrt{5})}{9 - 5} = 6 + 2\sqrt{5},$$

joten, koska $\tan(72^\circ) > 0$, saadaan

$$\tan(72^\circ) = \sqrt{(6 + 2\sqrt{5}) - 1} = \sqrt{5 + 2\sqrt{5}}.$$

Arvon $\cos(54^\circ)$ laskemiseksi huomataan, että $t = 54^\circ = 108^\circ/2 = (180^\circ - 72^\circ)/2$. Siis voidaan käyttää kaavaa (8) ja kaavaa $\cos(s) = -\cos(\pi - s)$, joka seuraa kaavasta (6). Saadaan

$$\cos^2(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2t)) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi - 2t)),$$

joten arvolla $t = 54^\circ$

$$\cos^2(54^\circ) = \frac{1}{2}(1 - \cos(72^\circ)) = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{4} - \frac{\sqrt{5} - 1}{4}\right) = \frac{5 - \sqrt{5}}{8} = \frac{10 - 2\sqrt{5}}{16}.$$

Siis

$$\cos(54^\circ) = \frac{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}}{4}.$$

Nyt voidaan käyttää kaavaa (10). Aluksi

$$\frac{1}{\cos^2(54^\circ)} = \frac{8}{5 - \sqrt{5}} = \frac{8(5 + \sqrt{5})}{25 - 5} = \frac{10 + 2\sqrt{5}}{5},$$

joten

$$\frac{1}{\cos^2(54^\circ)} - 1 = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{5},$$

joten

$$\tan(54^\circ) = \sqrt{\frac{1}{\cos^2(54^\circ)} - 1} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{5}}{5}}.$$