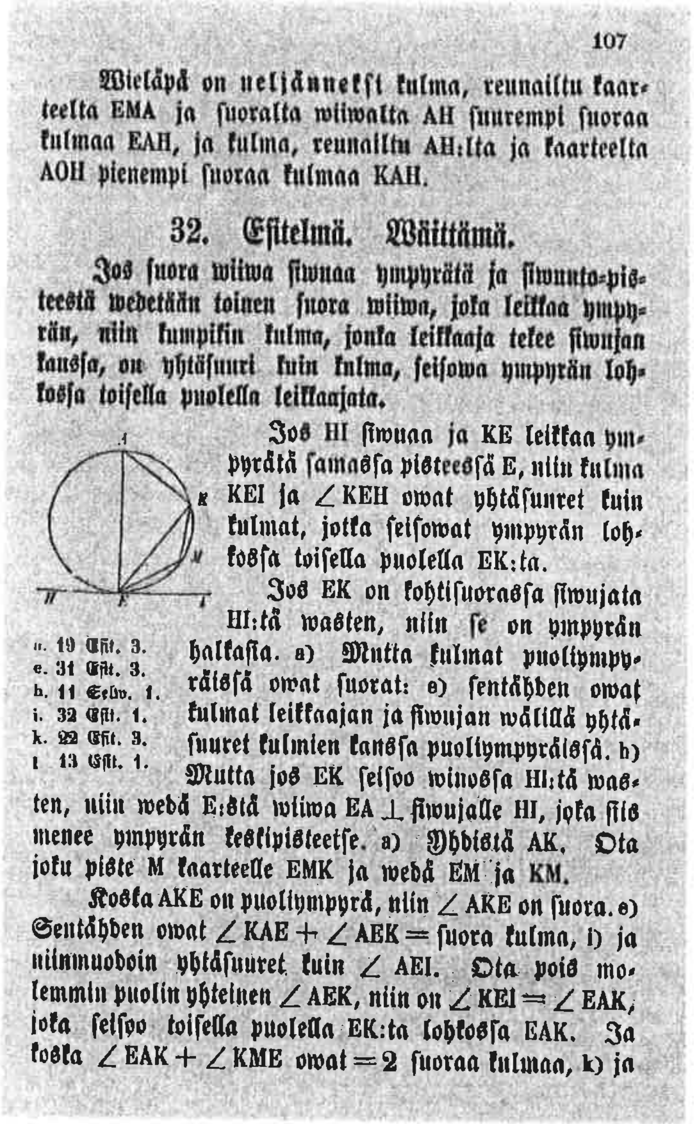

107

Wieläpä on neljännekst kulma, reunailtu kaarteelta EMA ja suoralta wiiwalta AH suurempi suoraa kulmaa EAH, ja kulma, reunailtu AH:lta ja kaarteelta AOH pienempi suoraa kulmaa KAH.

32. Esitelmä. Wäittämä.

Jos suora wiiwa siwuaa ympyrätä ja siwunto-pisteestä wedetään toinen suora wiiwa, joka leikkaa ympyrän, niin kumpikin kulma, jonka leikkaaja tekee siwujan kanssa, on yhtäsuuri kuin kulma, seisowa ympyrän lohkossa toisella puolella leikkaajata.

Jos HI siwuaa ja KE leikkaa ympyrätä samassa pisteessä E, niin kulma KEI ja ∠ KEH owat yhtäsuuret kuin kulmat, jotka seisowat ympyrän lohkossa toisella puolella EK:ta.

Jos EK on kohtisuorassa siwujata HI:tä wasten, niin se on ympyrän halkasia. a) Mutta kulmat puoliympyrässä owat suorat: e) sentähden owat kulmat leikkaajan ja siwujan wälillä yhtäsuuret kulmien kanssa puoliympyrässä. b) Mutta jos EK seisoo winossa HI:tä wasten, niin wedä E:stä wiiwa EA ⊥ siwujalle HI, joka siis menee ympyrän keskipisteetse. a) Yhdistä AK. Ota joku piste M kaarteelle EMK ja wedä EM ja KM.

Koska AKE on puoliympyrä, niin ∠ AKE on suora. e) Sentähden owat ∠ KAE + ∠ AEK = suora kulma, i) ja niinmuodoin yhtäsuuret kuin ∠ AEI. Ota pois molemmin puolin yhteinen ∠ AEK, niin on ∠ KEI = ∠ EAK, joka seisoo toisella puolella EK:ta lohkossa EAK. Ja koska ∠ EAK + ∠ KME owat = 2 suoraa kulmaa, k) ja

a. 19 Esit. 3.
e. 31 Esit. 3.
b. 11 Selw. 1.
i. 32 Esit. 1.
k. 22 Esit. 3.
l. 13 Esit. 1.

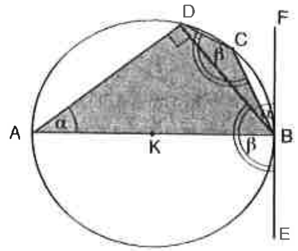
set sisäkulmat yhteensä, siis

$$\measuredangle CAF = \measuredangle EBA + \measuredangle ECA = \measuredangle EAB + \measuredangle EAC = \measuredangle BAC.$$

$\measuredangle BAC$ on siis määritelmän mukaan suora kulma, kuten väitettiin. Koska kolmion $\triangle ABC$ kaksi kulmaa ovat yhteensä kahta suoraa kulmaa pienemmät [1.17] ja $\measuredangle BAC$ on suora, on $\measuredangle CBA$ pienempi kuin suora kulma. Koska nelikulmion $ABCD$ kärjet ovat ympyrällä, sen vastakkaiset kulmat $\measuredangle CBA$ ja $\measuredangle CDA$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa [3.22], joten $\measuredangle CDA$ on tylppä.

Lopuksi on osoitettava, että (kärjessä A) kaaren ABC ja vastaavan jänteen AC välinen (käyräviivainen) kulma on tylppä ja kaaren ADC ja jänteen AC välinen (käyräviivainen) kulma on terävä, mutta nämä väitteet ovat ilmeisiä, koska ensin mainittu kulma sisältää suoran kulman $\measuredangle CAB$ ja jälkimmäinen sisältyy suoraan kulmaan $\measuredangle CAF$. □

Lause 3.32. *Tangentin ja jänteen välinen kulma on yhtä suuri kuin saman jänteen kehäkulma toisella puolella.*



Todistus. Olkoon DB jänne ja EF tangentti kohdassa B ja pisteet nimetty siten, että D ja F ovat samalla puolella suoraa AB. On osoitettava, että jänteeseen liittyvien kahden lohkon kehäkulmat ovat yhtä suuret kuin jänteen ja tangentin väliset kulmat.

Koska saman lohkon kehäkulmat ovat yhtä suuria, riittää tutkia yhtä kulmaa kummassakin lohkossa. Isomman lohkon kehäkulman kärjeksi A valitaan B:stä alkavan halkaisijan toinen pää, jolloin $\measuredangle FBA$ on suora [3.19]. Pienemmän lohkon kehäkulman kärki C valitaan vapaasti. Thaleen puoliympyrälauseen 3.31 mukaan myös kulma BDA

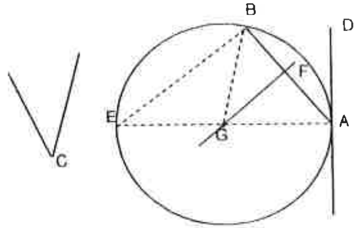
on suora. Kulmasummalauseen 1.32 mukaan ovat siis $\measuredangle BAD$ ja $\measuredangle DBA$ yhteensä suora kulma, joten $\measuredangle BAD + \measuredangle DBA = \measuredangle ABF$. Siis $\measuredangle BAD + \measuredangle DBA = \measuredangle ABF = \measuredangle FBD + \measuredangle DBA$, joten $\measuredangle BAD = \measuredangle FBD$, kuten väitettiin. Lisäksi nelikulmion $ABCD$ kärjet ovat ympyrän kehällä, joten $\measuredangle BAD + \measuredangle BCD$ on kaksi suoraa kulmaa [3.22] eli yhtä paljon kuin vieruskulmien $\measuredangle FBD$ ja $\measuredangle DBE$ summa. Siispä edellisen nojalla

$$\measuredangle BAD + \measuredangle BCD = \measuredangle FBD + \measuredangle DBE = \measuredangle BAD + \measuredangle DBE,$$

mistä samat vähentämällä saadaan $\measuredangle BCD = \measuredangle DBE$ eli toinen väite. □

Aschan käsittelee todistuksen aluksi erikoistapauksen, jossa annettu jänne on halkaisija. Eukleides-käsikirjoituksissa se sivuutetaan.

TEHTÄVÄ 3.33. *On konstruoitava lohko, jolla on annettu jänne ja annetun kulman suuruinen kehäkulma.*



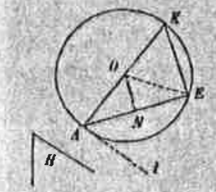
RATKAISU. Olkoon annettuna terävä kulma C ja jana AB. Kopioidaan kulma C konstruktion 1.23 mukaisesti janan päähän A kulmaksi $\measuredangle BAD$. Olkoon G piste, jossa leikkaavat toisensa DA:n normaali pisteessä A ja AB:n keskinormaali eli normaali keskipisteessä F. Olkoon GA jatkettu pisteeseen E siten, että $GE = GA$.
Osoitetaan, että G on pisteiden A, B ja E kautta kulkevan ympyrän keskipiste ja että sen AB-kantainen lohko BEA toteuttaa vaaditun ehdon $\measuredangle BEA = \measuredangle C$. Suorakulmaiset kolmiot $\triangle AFG$ ja $\triangle BFG$ ovat SKS-ehdon 1.4 nojalla yhtenevät, joten $GE = GA = GB$ eli pisteet A, B ja E ovat samalla G-keskisellä ympyrällä. (Koska $AD \perp AG$ ja G on keskipiste niin AD on ympyrän tangentti [3.16 seuraus].)
Lauseen 3.32 mukaan $\measuredangle BEA = \measuredangle BAD = \measuredangle C$. □

108

∠ KEI + ∠ KEH myös owat = 2 suoraa kulmaa; k) niin ∠ EAK + ∠ KME = ∠ KEI + ∠ KEH. Ota molemmin puolin pois yhtäsuuret kulmat EAK ja KEI, niin ∠ KEH on yhtäsuuri kuin ∠ KME, joka seisoo ympyrän lohkossa toisella puolella EK:ta.

33. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietylle suoralle wiiwalle piirretään ympyrän lohko, joka sisältää tietyn kulman suuruisen kulman?



Jos AE on tietty suora wiiwa ja H tietty kulma, niin leikkaa AE keskeltä kahtia N:ssä, josta wedä wiiwa NO ⊥ wiiwalle AE. Pane pisteesen A wiiwan AE:n wiereen ∠ IAE = ∠ H, a) ja wedä AK kohtisuoraan AI:lle. Jossa nyt AK ja NO tapaawat toinen toisensa, nimittäin pisteessä O, siitä wedä suora wiiwa E:hen.

a. 23 Esit. 1.
e. 4 Esit. 1.
h. 32 Esit. 3.

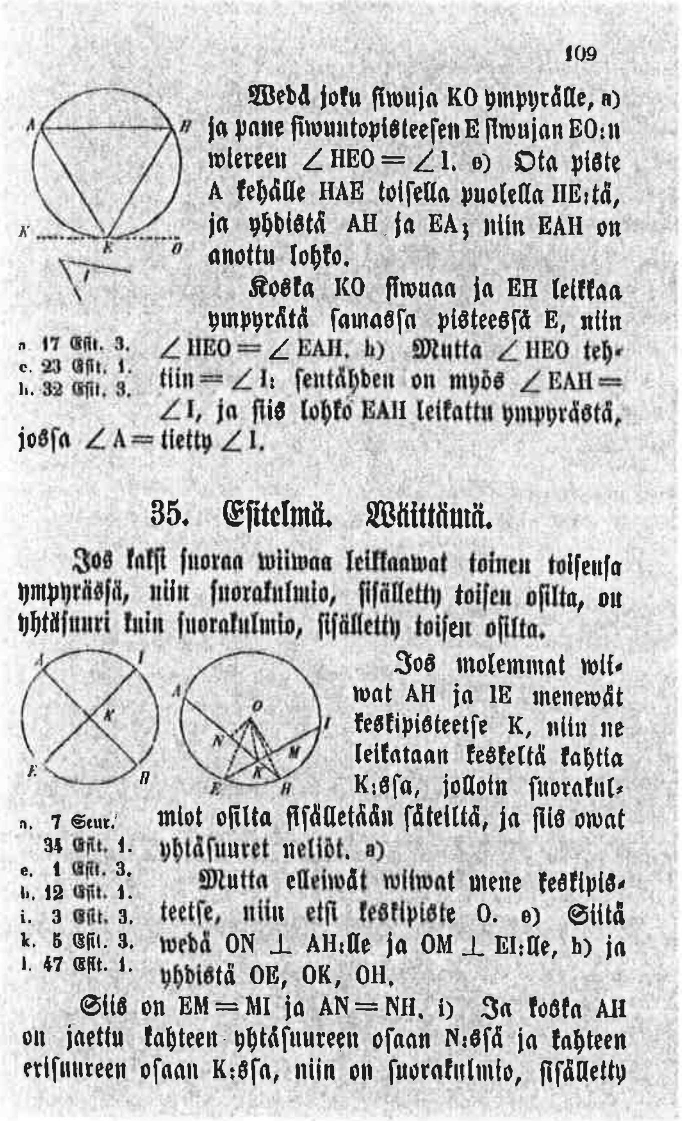
Koska siis AN = NE, NO on yhteinen ja wälinen ∠ ANO = ∠ ENO, niin on AO = OE. e) Ota O keskipisteeksi ja piirrä ympyrä pisteitse A ja E. Pitennä AO kehään ja yhdistä KE; niin ∠ IAE = ∠ AKE. h) Mutta ∠ IAE tehtiin = ∠ H. Sentähden on myös kulma AKE = ∠ H, ja niinmuodoin ympyrän lohko tehty AE:lle, jossa on kulma AKE = tietty ∠ H.

Seuraus. Kuinka tehdään ympyrän lohko tietyn lohkon kanssa yhteelliseksi?

34. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietystä ympyrästä leikataan lohko, jossa kulma on tietyn kulman suuruinen?

Lohkase ympyrästä AEH osa, jossa on kulma yhtäsuuri kuin ∠ I.



109

Wedä joku siwuja KO ympyrälle, a) ja pane siwuuntopisteesen E siwujan EO:n wiereen $\angle$ HEO = $\angle$ I. e) Ota piste A kehälle HAE toisella puolella HE:tä, ja yhdistä AH ja EA; niin EAH on anottu lohko.

a. 17 Esit. 3.
e. 23 Esit. 1.
h. 32 Esit. 3.

Koska KO siwuaa ja EH leikkaa ympyrätä samassa pisteessä E, niin $\angle$ HEO = $\angle$ EAH. h) Mutta $\angle$ HEO tehtiin = $\angle$ I: sentähden on myös $\angle$ EAH = $\angle$ I, ja siis lohko EAH leikattu ympyrästä, jossa $\angle$ A = tietty $\angle$ I.

35. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi suoraa wiiwaa leikkaawat toinen toisensa ympyrässä, niin suorakulmio, sisälletty toisen osilta, on yhtäsuuri kuin suorakulmio, sisälletty toisen osilta.

a. 7 Seur.
34 Esit. 1.
e. 1 Esit. 3.
h. 12 Esit. 1.
i. 3 Esit. 3.
k. 5 Esit. 3.
l. 47 Esit. 1.

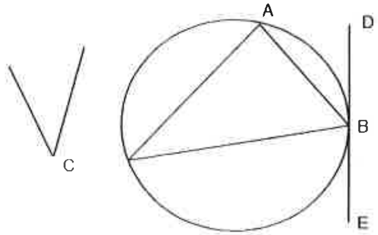
Jos molemmat wiiwat AH ja IE menewät keskipisteetse K, niin ne leikataan keskeltä kahtia K:ssa, jolloin suorakulmiot osilta sisälletään säteiltä, ja siis owat yhtäsuuret neliöt. a)

Mutta elleiwät wiiwat mene keskipisteetse, niin etsi keskipiste O. e) Siitä wedä ON $\perp$ AH:lle ja OM $\perp$ EI:lle, h) ja yhdistä OE, OK, OH.

Siis on EM = MI ja AN = NH. i) Ja koska AH on jaettu kahteen yhtäsuureen osaan N:ssä ja kahteen erisuureen osaan K:ssa, niin on suorakulmio, sisälletty

Aschanin todistuksesta puuttuu sulkeisiin merkitty kohta. Lisäksi jäävät kokonaan käsittelemättä tapaukset, joissa kulma $\measuredangle C$ on suora tai tylppä. Todistukset voi saada etenemään sanasta sanaan samalla tavalla kuin yllä, kunhan piirtää hieman erilaiset kuviot; tilanne on siis samantapainen kuin todistettaessa lausetta 3.25. Eukleideen teksteissä on kuitenkin erilliset todistukset kaikille tapauksille.

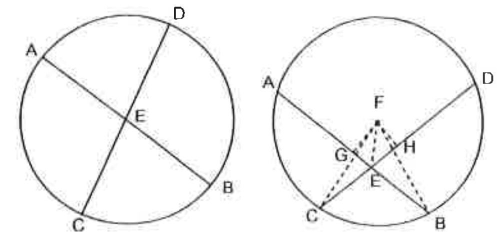
TEHTÄVÄ 3.34. *On konstruoitava annetusta ympyrästä lohko, jolla on annetun kulman suuruinen kehäkulma.*



RATKAISU. Olkoon annettuna kulma C ja ympyrä. Konstruoidaan ympyrälle tangentti BD johonkin pisteeseen B [3.17]. Kopioidaan kulma C konstruktion 1.23 mukaan janan päähän B kulmaksi $\measuredangle DBA$. Nyt AB-kantainen lohko, joka on eri puolella kantaa kuin D, antaa lauseen 3.32 nojalla $\measuredangle ABD$:n ja siis myös $\measuredangle C$:n suuruiset kehäkulmat. □

Ratkaisu ei ole helpoin mahdollinen, mutta edellisen kanssa yhteensopiva kylläkin.

LAUSE 3.35. *Jos kaksi (saman ympyrän) jännettä leikkaavat toisensa, niin kummankin osista muodostetut suorakulmiot ovat yhtä suuret.*



TODISTUS. Leikatkoot jänteet AB ja CD toisensa pisteessä E. Väitetään, että $AE \times EB = CE \times ED$, missä tulon merkillä $\times$ on symbolisoitu sellaisen suorakulmion alaa (toisen kirjan mielessä), jonka sivut ovat "kerrottavien" janojen mittaiset.
Jos leikkauspiste E on keskipiste F, on väite ilmeinen.Jos kumpikaan jänteistä ei ole halkaisija, niin nimetään keskipisteestä F jänteille piirrettyjen normaalien [1.12] kantapisteet G:ksi ja H:ksi kuten kuvassa. Nyt $AG = GB$ ja $CH = HD$ [3.3]. Lauseen 2.5 mukaan

$$AE \times EB + EG^2 = GB^2.$$

Lisäämällä puolittain GF^2 saadaan

$$AE \times EB + (EG^2 + GF^2) = GB^2 + GF^2,$$

joka on Pythagoraan lauseen 1.47 nojalla sama asia kuin

$$AE \times EB + EF^2 = BF^2 = FC^2.$$

Vastaavasti

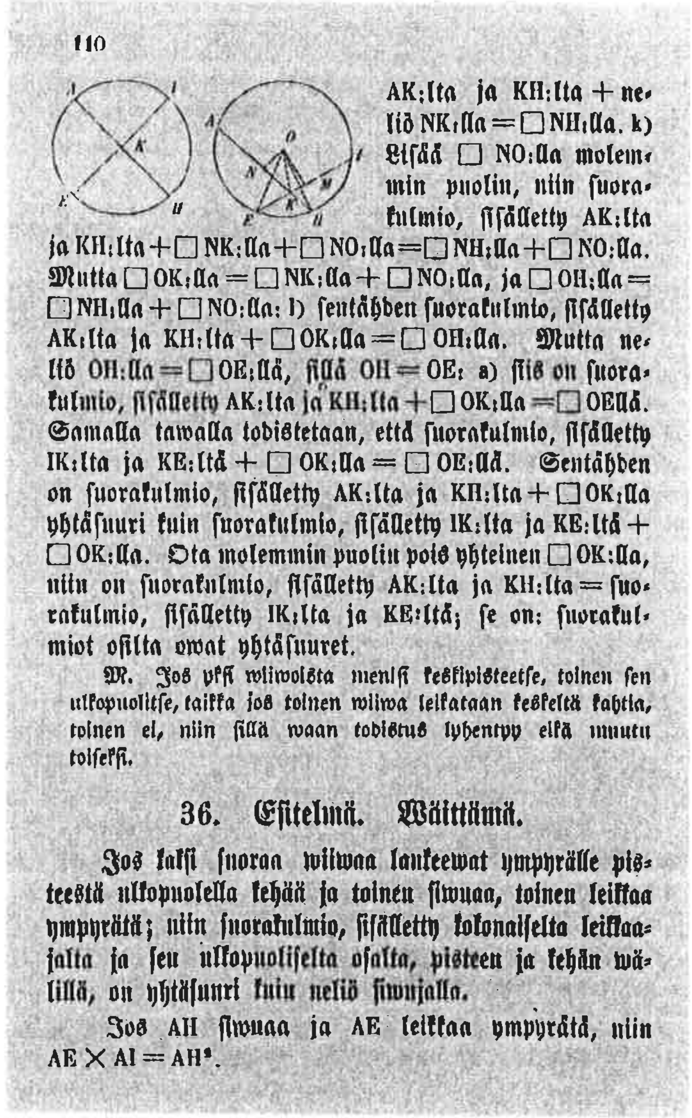
$$CE \times ED + FE^2 = FC^2,$$

joten

$$AE \times EB + EF^2 = CE \times ED + FE^2,$$

mistä väite seuraa vähentämällä puolittain EF^2.
Tapaus, jossa toinen jänteistä on halkaisija, käsitellään samaan tapaan.

□



110

AK:lta ja KH:lta + neliö NK:lla = □ NH:lla. k) Lisää □ NO:lla molemmin puolin, niin suorakulmio, sisälletty AK:lta ja KH:lta + □ NK:lla + □ NO:lla = □ NH:lla + □ NO:lla. Mutta □ OK:lla = □ NK:lla + □ NO:lla, ja □ OH:lla = □ NH:lla + □ NO:lla: l) sentähden suorakulmio, sisälletty AK:lta ja KH:lta + □ OK:lla = □ OH:lla. Mutta neliö OH:lla = □ OE:llä, sillä OH = OE: a) siis on suorakulmio, sisälletty AK:lta ja KH:lta + □ OK:lla = □ OEllä. Samalla tawalla todistetaan, että suorakulmio, sisälletty IK:lta ja KE:ltä + □ OK:lla = □ OE:llä. Sentähden on suorakulmio, sisälletty AK:lta ja KH:lta + □ OK:lla yhtäsuuri kuin suorakulmio, sisälletty IK:lta ja KE:ltä + □ OK:lla. Ota molemmin puolin pois yhteinen □ OK:lla, niin on suorakulmio, sisälletty AK:lta ja KH:lta = suorakulmio, sisälletty IK:lta ja KE:ltä; se on: suorakulmiot osilta owat yhtäsuuret.

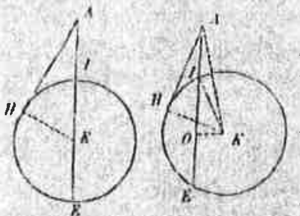
M. Jos yksi wiiwoista menisi keskipisteetse, toinen sen ulkopuolitse, taikka jos toinen wiiwa leikataan keskeltä kahtia, toinen ei, niin sillä waan todistus lyhentyy eikä muutu toiseksi.

36. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi suoraa wiiwaa lankeewat ympyrälle pisteestä ulkopuolella kehää ja toinen siwuaa, toinen leikkaa ympyrätä; niin suorakulmio, sisälletty kokonaiselta leikkaajalta ja sen ulkopuoliselta osalta, pisteen ja kehän wälillä, on yhtäsuuri kuin neliö siwujalla.

Jos AH siwuaa ja AE leikkaa ympyrätä, niin AE × AI = AH².

111



Jos ensiksi leikkaaja AE menee keskipisteetse K, niin yhdistä K ja siwuntopiste H. Siis on $\angle H =$ suora kulma. a) Myös on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä + $\square$ KI:llä = neliö AK:lla. e) Mutta KI = KH. Sentähden on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä + $\square$ KH:lla = $\square$ AK:lla. Mutta $\square$ AK:lla = $\square$ AH:lla + $\square$ KH:lla. h) Sentähden on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä + $\square$ HK:lla = $\square$ AH:lla + $\square$ HK:lla. Ota molemmin puolin pois yhteinen $\square$ KH:lla, niin on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä = $\square$ AH:lla.

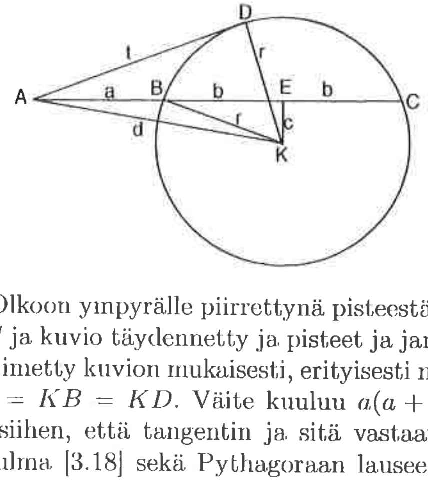
a. 18 Esit. 3.
e. 6 Esit. 2.
h. 47 Esit. 1.
i. 1 Esit. 3.
k. 12 Esit. 1.
l. 3 Esit. 3.

Ellei toiseksi AIE menisi keskipisteetse, niin etsi keskipiste K, i) ja wedä KO $\perp$ AE:lle. k) Yhdistä KH, KI, KA.

Koska nyt EO = OI, l) niin on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä + $\square$ OI:llä = $\square$ AO. e) Lisää molemmin puolin $\square$ KO:lla, niin on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä + $\square$ OI:llä + $\square$ OK:lla = $\square$ AO:lla + $\square$ OK:lla. Mutta $\square$ OI:llä + $\square$ OK:lla = $\square$ KI:llä, h) ja $\square$ AO:lla + $\square$ OK:lla = $\square$ AK:lla. h) Sentähden on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä + $\square$ KI:llä = $\square$ AK:lla. Mutta $\square$ AK:lla = $\square$ AH:lla + $\square$ KH:lla, h) ja $\square$ KI:llä = $\square$ KH:lla, sillä KI = KH. Siis on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä + neliö KH:lla = $\square$ AH:lla + $\square$ KH:lla. Ota molemmin puolin pois $\square$ KH:lla, niin suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä = $\square$ AH:lla.

Seuraus. Jos useampia suoria wiiwoja wedetään samasta pisteestä ulkopuolella ympyrätä leikkaa-

Lause 3.36. *Ympyrän ulkopuolisesta pisteestä A ympyrälle piirretty sekantti leikkaa ympyrän siten, että suorakulmio, jonka sivuina ovat etäisyydet A:sta sekantin ja ympyrän leikkauspisteisiin, on yhtä suuri kuin A:sta ympyrälle piirretyn tangentin neliö, toisin sanoen kuvassa on $AC \times AB = AD^2$.*



Todistus. Olkoon ympyrälle piirrettynä pisteestä A tangentti AD ja sekantti AC ja kuvio täydennetty ja pisteet ja janat esityksen helpottamiseksi nimetty kuvion mukaisesti, erityisesti merkitty $a = BE$, $d = AK$ ja $r = KB = KD$. Väite kuuluu $a(a + 2b) = t^2$. Todistus perustuu siihen, että tangentin ja sitä vastaavan säteen välillä on suora kulma [3.18] sekä Pythagoraan lauseen 1.47 käyttöön. On hyvä muistaa, että merkinnöissämme a,b ja c eivät ole lukuja, vaan edustavat tietynpituisia janoja. Geometrinen laskutoimitus $a(a + 2b) = (a + b)^2 - b^2$ on tarkastettu luvalliseksi kohdassa 2.6. Tapaus, jossa sekantti kulkee keskipisteen kautta on helpompi. Käsitellään vain perustapaus.

$$a(a+2b) \overset{[2.6]}{=} (a+b)^2 - b^2 = AE^2 - b^2 \overset{[1.47]}{=} AK^2 - KE^2 - b^2$$
$$= d^2 - c^2 - b^2$$
$$t^2 = AD^2 \overset{[1.47]}{=} AK^2 - KD^2 = d^2 - r^2$$
$$r^2 = KB^2 \overset{[1.47]}{=} KE^2 + EB^2 = c^2 + b^2.$$

Muuta ei tarvita! $\square$

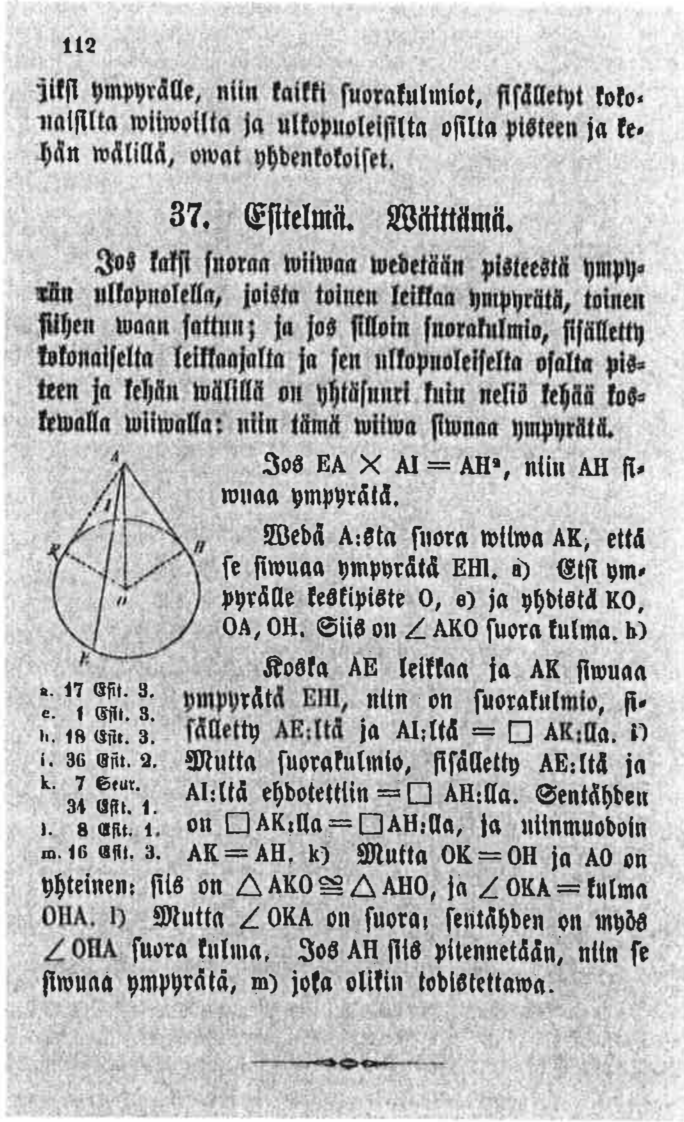
Aschan kiinnittää seurauksessa huomiota siihen, että jos A:sta piirretään ympyrälle kaksi sekanttia tai useampiakin, niin jokaisessa on etäisyyksien tulo yhtä suuri.

LAUSE 3.37. *Jos ympyrän ulkopuolisesta pisteestä A ympyrälle piirretty sekantti leikkaa ympyrän siten, että suorakulmio, jonka sivuina ovat etäisyydet A:sta sekantin ja ympyrän leikkauspisteisiin, on yhtä suuri kuin A:sta johonkin ympyrän pisteeseen P piirretyn janan neliö, niin tuo jana on ympyrän tangentti ja P sen sivuamispiste.*

TODISTUS. Esitän oman todistukseni[a]. Muussa tapauksessa P olisi jollain sekantilla, siis P olisi lauseen 1.36 kuviossa B tai C. Edellisen lauseen seurauksen nojalla olisi siis $AB \times AC = AP^2$, joka olisi oletuksen mukaan AB^2 tai AC^2. Kumpikin on mahdotonta, koska sekantilla $B \neq C$. □

Aschanin esittämä erilainen todistus on hyvä ja sama kuin Eukleideen alkuperäinen. Eukleides lienee tuntenut molemmat todistukset.

[a] Monien keksimän.



112

siksi ympyrälle, niin kaikki suorakulmiot, sisälletyt kokonaisilta wiiwoilta ja ulkopuoleisilta osilta pisteen ja kehän wälillä, owat yhdenkokoiset.

37. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kaksi suoraa wiiwaa wedetään pisteestä ympyrän ulkopuolella, joista toinen leikkaa ympyrätä, toinen siihen waan sattuu; ja jos silloin suorakulmio, sisälletty kokonaiselta leikkaajalta ja sen ulkopuoleiselta osalta pisteen ja kehän wälillä on yhtäsuuri kuin neliö kehää koskewalla wiiwalla: niin tämä wiiwa siwuaa ympyrätä.

Jos $EA \times AI = AH^2$, niin AH siwuaa ympyrätä.

Wedä A:sta suora wiiwa AK, että se siwuaa ympyrätä EHI. a) Etsi ympyrälle keskipiste O, e) ja yhdistä KO, OA, OH. Siis on ∠ AKO suora kulma. h)

Koska AE leikkaa ja AK siwuaa ympyrätä EHI, niin on suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä = □ AK:lla. i) Mutta suorakulmio, sisälletty AE:ltä ja AI:ltä ehdotettiin = □ AH:lla. Sentähden on □ AK:lla = □ AH:lla, ja niinmuodoin AK = AH. k) Mutta OK = OH ja AO on yhteinen: siis on △ AKO ≅ △ AHO, ja ∠ OKA = kulma OHA. l) Mutta ∠ OKA on suora; sentähden on myös ∠ OHA suora kulma. Jos AH siis pitennetään, niin se siwuaa ympyrätä, m) joka olikin todistettawa.

a. 17 Esit. 3.
e. 1 Esit. 3.
h. 18 Esit. 3.
i. 36 Esit. 2.
k. 7 Seur. 34 Esit. 1.
l. 8 Esit. 1.
m. 16 Esit. 3.