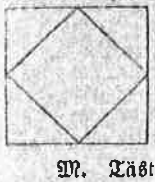
Neljäs Kirja.

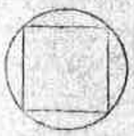
Määritykſiä.

1. Suorawiiwainen kuwio on piirretty toiſeen ſuorawiiwaiſeen kuwioon, jos ſen kaikki kulmat koskewat kuwion kaikkia ſiwuja, johon ſe on piirretty.



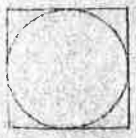
2. Mutta ſuorawiiwainen kuwio on piirretty toiſen ſuorawiiwaiſen kuwion ympäri, jos ſen kaikki ſiwut koskewat kuwion kaikkia kulmia, jonka ympäri ſe on piirretty.

M. Tästä arwaa jokainen, että molemmissa kuwioissa täytyy olla yhtä monta ſiwua.



3. Suorawiiwainen kuwio on piirretty ympyrään, jos kaikki ſen kulmat owat ympyrän kehässä.

4. Mutta kuwio on piirretty ympyrän ympäri, jos ſen kaikki ſiwut ſiwuwat ympyrätä.



5. Samaten ſanotaan ympyrän olewan piirretyn ſuorawiiwaiſeen kuwioon, jos ſen kehä leikkaamatta koskee kaikkia kuwion ſiwuja, jolta ſe ſuljetaan.

6. Mutta ympyrän ſanotaan olewan piirretyn ſuorawiiwaiſen kuwion ympäri, jos ſen kehä koskee kaikkia kuwion kulmia, jonka ympärillä ſe on.

7. Suoran wiiwan ſanotaan olewan ſowitetun ympyrään, jos ſen päät owat ympyrän kehässä.

M. Semmoinen ympyrään ſowitettu ſuora wiiwa on ympyrän jänne, niinkuin jo enſimäiſen kirjan määritykſissä tätä mainittiin.

Neljäs kirja

Eukleideen Alkeiden neljäs kirja käsittelee säännöllisiä monikulmioita, etenkin niiden konstruointia harpilla ja viivoittimella. Kiinnostava ja vaikeudestaan huolimatta vanhaa perua on viisikulmion konstruktio, joka perustuu kultaisen leikkauksen käyttöön. Säännöllisillä monikulmioilla on ollut merkitystä antiikin tähtitieteessä ja n-kulmio on klassinen väline ympyrän pinta-alan arviointiin, siis π:n laskemiseen. Neljäs kirja on lyhyt eikä se juuri sisällä kiintoisia oivalluksia, ellei sellaiseksi lasketa sitä, että kun p ja q ovat alkulukuja, niin n-kulmiosta ja m-kulmiosta voi konstruoida nm-kulmion. Esitys on järjestelmällinen ja käy läpi ympyröiden ja monikulmioiden piirtämiset toistensa sisään.

4.1. Määritelmiä.

(1) Monikulmio on *piirretty toisen monikulmion sisään*, jos ensimmäisen kaikki kulmat ovat jälkimmäisen vastaavilla sivuilla eli *koskevat* niitä.

(2) Monikulmio on *piirretty toisen monikulmion ympäri*, jos ensimmäisen kaikki sivut koskevat jälkimmäisen vastaavia kulmia.

Jälkimmäinen on siis piirretty edellisen ympäri tasan silloin, kun ensimmäinen on piirretty jälkimmäisen sisään. Tilanteet ovat samat, mutta konstruktio eri järjestyksessä.

(3) Monikulmio on *piirretty ympyrän sisään*, jos sen kaikki kärjet ovat ympyrän kehällä.

(4) Monikulmio on *piirretty ympyrän ympäri*, jos sen kaikki sivut ovat ympyrän tangentteja.

(5) Ympyrä on *piirretty monikulmion ympäri*, jos monikulmio on *piirretty ympyrän sisään.*

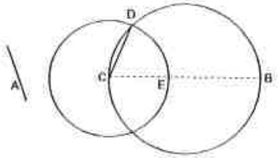
(6) Ympyrä on *piirretty monikulmion sisään*, jos monikulmio on *piirretty ympyrän ympäri.*

(7) Jana on *sovitettu ympyrään*, jos se on ympyrän jänne, eli kun sen päätepisteet ovat ympyrän kehällä.

4.2. Lauseet ja tehtävät.

TEHTÄVÄ 4.1. *Annettuun ympyrään on sovitettava annetun pituinen jana, joka ei ole ympyrän halkaisijaa pitempi.*

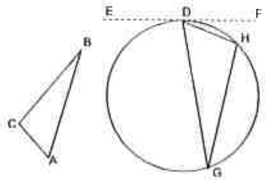
RATKAISU.



Olkoon annettuna jana A ja ympyrä, jonka halkaisija on $BC \geq A$. Jos $BC = A$, niin BC täyttää tehtävän vaatimuksen. Muuten valitaan halkaisijalta, siis janalta BC, piste E siten, että CE on yhtä pitkä kuin A; tämä on mahdollista, koska halkaisija on janoista suurempi [1.3]. Piirretään C-keskinen CE-säteinen ympyrä; missä se kohtaa alkuperäisen ympyrän, siinä olkoon piste D. Nyt $A = CE = CD$ ja CD on sovitettu ympyrään [Määr. 4.7]. □

TEHTÄVÄ 4.2. *Annettuun ympyrään on piirrettävä kolmio, jolla on yhtä suuret kulmat kuin annetulla kolmiolla.*

RATKAISU.

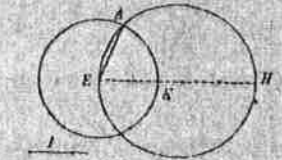


Olkoon annettuna kolmio $\triangle ABC$ ja ympyrä. Piirretään ympyrälle tangentti EF johonkin kehäpisteeseen D [3.17]. Kopioidaan kulma $\measuredangle ABC$ kulmaksi $\measuredangle FDH$ siten, että vapaa kylki on ympyrän puolella; toinen leikkauspiste ympyrän kanssa olkoon juuri H [1.23]. Samalla tavalla kopioidaan $\measuredangle ACB$ kulmaksi $\measuredangle EDG$.
Osoitetaan, että $\triangle EGH$ on halutunlainen. Ainakin se on piirretty annetun ympyrän sisään. Lisäksi lauseen 3.32 ja konstruktion mukaan $\measuredangle DGH = \measuredangle FDH = \measuredangle ABC$ ja $\measuredangle DHG = \measuredangle EDG = \measuredangle ACB$. Kulmasummalauseen 1.32 mukaan siis myös $\measuredangle CAB = \measuredangle HDG$. □

114

1. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tiettyyn ympyrään sowitetaan tietyn wiiwan pituinen suora wiiwa, joka kuitenkaan ei saata olla suurempi kuin halkasia ympyräsä?



Olkoon I tietty suora wiiwa ja EAH tietty ympyrä, jonka halkasia EH ei ole pienempi wiiwaa I. Jos EH = I, niin EH on haettu suora wiiwa. Mutta jos EH on > I, niin leikkaa EK = I. a)

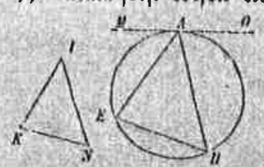
a. 3 Esit. 1.
e. 7 Määr. 4.
h. 15 Määr. 1.
i. 1 Selw. 1.

Ota E keskipisteeksi ja wiiwaa ympyrä pisteetse K. Yhdistä EA, niin EA on ympyrään sowitettu suora wiiwa, e) joka on yhtäpitkä kuin I.

Sillä EA = EK; h) mutta EK tehtiin = I: siis on EA = I. i).

2. Esitelmä. Tehtäwä.

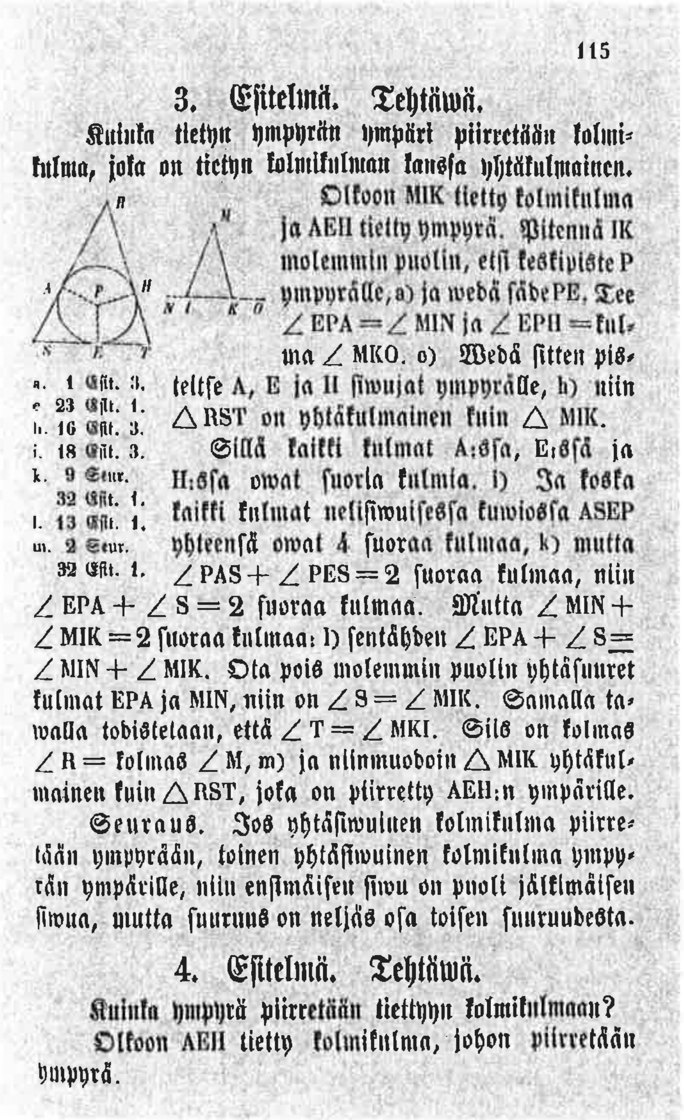
Kuinka tiettyyn ympyrään piirretään kolmikulma yhtäkulmaiseksi toisen tietyn kolmikulman kanssa?



Olkoon IKN tietty kolmikulma ja AHE tietty ympyrä. Wedä joku siwusa MO ympyrälle. a) Tee ∠ OAH = ∠ K ja ∠ MAE = ∠ N. e) Yhdistä E ja H, niin △ AEH on yhtäkulmainen kuin △ IKN.

a. 17 Esit. 3.
e. 23 Esit. 1.
h. 32 Esit. 3.
k. 2 Semr.
32 Esit. 1.

Koska ∠ AEH = ∠ OAH, h) ja ∠ OAH = ∠ K, niin on ∠ AEH = ∠ K. Samaten on ∠ AHE = ∠ MAE, h) ja ∠ MAE = ∠ N: siis on ∠ AHE = ∠ N. Sentähden on myös kolmas ∠ EAH = ∠ I, k) ja niinmuodoin △ IKN yhtäkulmainen kuin △ AHE, joka on piirretty ympyrään AEH.



115

3. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietyn ympyrän ympärt piirretään kolmikulma, joka on tietyn kolmikulman kanssa yhtäkulmainen.

Olkoon MIK tietty kolmikulma ja AEH tietty ympyrä. Pitennä IK molemmin puolin, etsi keskipiste P ympyrälle, a) ja wedä säde PE. Tee ∠ EPA = ∠ MIN ja ∠ EPH = kulma ∠ MKO. c) Wedä sitten pisteitse A, E ja H siwujat ympyrälle, h) niin △ RST on yhtäkulmainen kuin △ MIK.

a. 1 Esit. 3.
e 23 Esit. 1.
h. 16 Esit. 3.
i. 18 Esit. 3.
k. 9 Seur.
32 Esit. 1.
l. 13 Esit. 1.
m. 2 Seur.
32 Esit. 1.

Sillä kaikki kulmat A:ssa, E:ssä ja H:ssa owat suorla kulmia. i) Ja koska kaikki kulmat nelisiwuisessa kuwiossa ASEP yhteensä owat 4 suoraa kulmaa, k) mutta ∠ PAS + ∠ PES = 2 suoraa kulmaa, niin ∠ EPA + ∠ S = 2 suoraa kulmaa. Mutta ∠ MIN + ∠ MIK = 2 suoraa kulmaa: l) sentähden ∠ EPA + ∠ S = ∠ MIN + ∠ MIK. Ota pois molemmin puolin yhtäsuuret kulmat EPA ja MIN, niin on ∠ S = ∠ MIK. Samalla tawalla todistetaan, että ∠ T = ∠ MKI. Siis on kolmas ∠ R = kolmas ∠ M, m) ja niinmuodoin △ MIK yhtäkulmainen kuin △ RST, joka on piirretty AEH:n ympärille.

Seuraus. Jos yhtäsiwuinen kolmikulma piirretään ympyrään, toinen yhtäsiwuinen kolmikulma ympyrän ympärille, niin ensimmäisen siwu on puoli jälkimmäisen siwua, mutta suuruus on neljäs osa toisen suuruudesta.

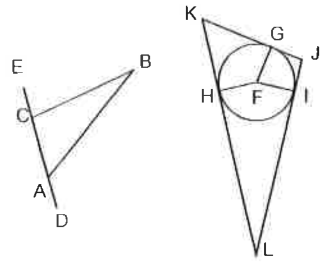
4. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka ympyrä piirretään tiettyyn kolmikulmaan?

Olkoon AEH tietty kolmikulma, johon piirretään ympyrä.

TEHTÄVÄ 4.3. *Annetun ympyrän ympäri on piirrettävä kolmio, jolla on yhtä suuret kulmat kuin annetulla kolmiolla.*

RATKAISU.



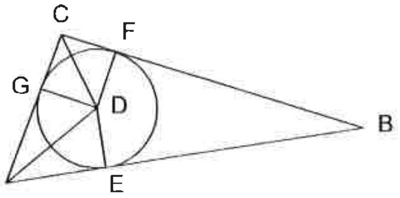
Olkoon annettuna kolmio $\triangle ABC$ ja ympyrä. Jatketaan kolmion sivua AC molemmin puolin janaksi DE [1.3] ja etsitään ympyrän keskipiste F [3.1]. Valitaan ympyrältä kehäpiste G. Kopioidaan ulkokulma $\measuredangle BAD$ kulmaksi $\measuredangle GFH$, missä vapaan kyljen nimetty piste H on kohta, jossa se leikkaa ympyrän [1.23]. Kopioidaan sitten samalla tavalla toinen ulkokulma $\measuredangle BCE$ suoran FG toiselle puolelle kulmaksi $\measuredangle GFI$. Lopuksi piirretään tangentit pisteisiin G, H ja I ja nimetään niiden leikkauspisteet kuvan mukaisesti J, K, L [3.16]. Osoitetaan, että $\triangle JKL$ on halutunlainen. Ainakin se on piirretty annetun ympyrän ympäri. Lisäksi lauseen 3.18 mukaan tangenttien ja säteiden väliset kulmat pisteissä G, H ja I ovat suoria. Lauseen 1.32 seurauksen 9 mukaan nelikulmion $\square FGKH$ kulmien summa on neljä suoraa kulmaa, joten $\measuredangle GFH$ ja $\measuredangle GKH$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa eli yhtä paljon kuin vieruskulmien summa [1.13]. Siis $\measuredangle GFH + \measuredangle GKH = \measuredangle BAD + \measuredangle BAC$. Mutta konstruktion mukaan $\measuredangle GFH = \measuredangle BAD$, joten $\measuredangle GKH = \measuredangle BAC$. Vastaavalla tavalla tarkastetaan, että $\measuredangle GJI = \measuredangle BCA$, jolloin kulmasummalauseen 1.32 nojalla myös $\measuredangle ILH = \measuredangle ABC$. □

SEURAUS. *Jos saman ympyrän sisään ja ympäri piirretään tasasivuiset kolmiot, niin ympäri piirretyn kolmion kukin sivu on kaksi kertaa niin pitkä kuin sisään piirretyn.*

Aschanin tässä esittämä seuraus puuttuu alkuperäisistä Alkeista. Väite huomataan todeksi piirtämällä ympyrän sisään tasasivuinen kolmio ja sitten tangentit kärkipisteisiin, jolloin syntyy tasasivuinen, neljään alkuperäisen kanssa yhtenevään osaan jaettu kolmio.

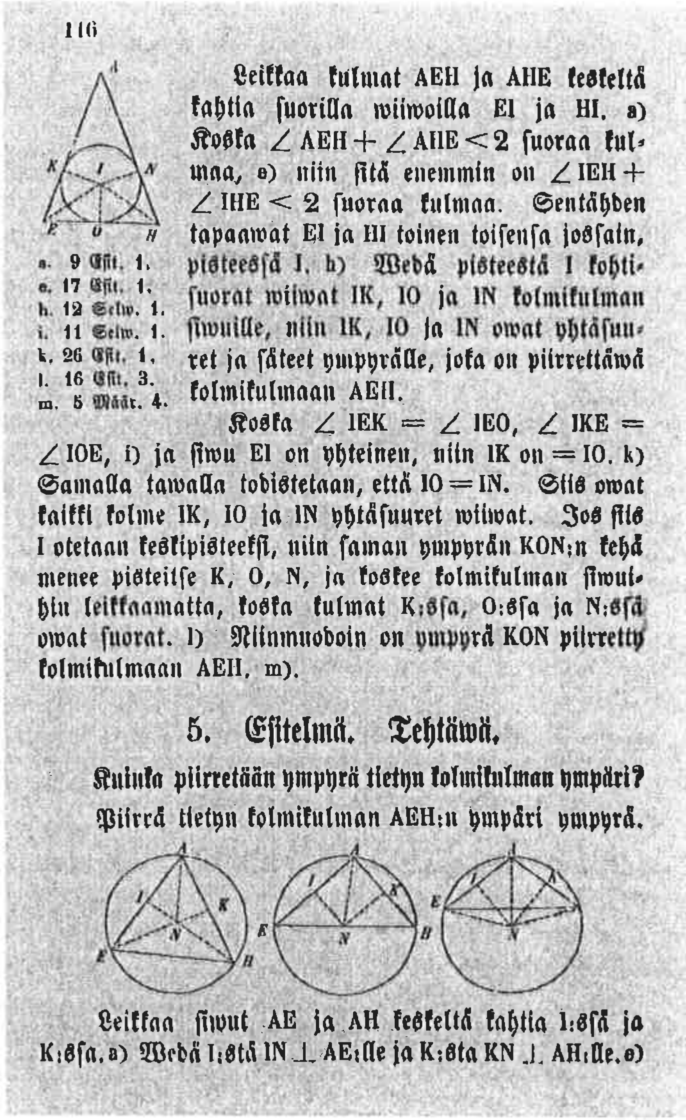
Tehtävä 4.4. *Annetun kolmion sisään on piirrettävä ympyrä.*

Ratkaisu.



Olkoon annettuna kolmio ABC. Puolitetaan sen kulmat $\measuredangle CAB$ ja $\measuredangle CBA$ [1.9]; puolittajat leikkaavat toisensa yhdensuuntaisaksiooman nojalla jossain pisteessä D, sillä kahden kulman puolikkaiden summa on vain puolet kulmien summasta, joka sekin on lauseen 1.17 mukaan alle kaksi suoraa kulmaa. Piirretään D:stä normaalit kolmion sivuille ja nimetään niiden kantapisteet kuten kuvassa. Väitetään, että D-keskinen DE-säteinen ympyrä on piirretty kolmion $\triangle ABC$ sisään, toisin sanoen että $DE = DG = DF$ ja että AB, BC ja CA ovat ympyrän tangentteja.
Konstruktion nojalla $\measuredangle EAD = \measuredangle GAD$ ja suorina kulmina $\measuredangle AED$ ja $\measuredangle AGD$ ovat yhtä suuret. Lisäksi sivu AD on kolmioille $\triangle AED$ ja $\triangle AGD$ yhteinen, joten kolmiot ovat KSK-ehdon 1.26 mukaan yhtenevät ja siis $DE = DG$. Samoin $DE = DF$. Konstruoitu ympyrä kulkee siis pisteiden E, F ja G kautta. Koska kulmat näissä pisteissä ovat suoria, kolmion ABC sivut ovat lauseen 3.16 mukaan ympyrän tangentteja kuten väitettiin. □

Perustelu sille, että kulmien puolittajat leikkaavat toisensa, puuttuu Eukleideen alkuperäisistä kirjoituksista.
Aschan ei huomauta siitä, että samalla periaatteella voi yleisestikin konstruoida kolmea annettua suoraa sivuavan ympyrän, kunhan suorat eivät kaikki ole yhdensuuntaisia.



116

Leikkaa kulmat AEH ja AHE keskeltä kahtia suorilla wiiwoilla EI ja HI. a) Koska ∠ AEH + ∠ AHE < 2 suoraa kulmaa, e) niin sitä enemmin on ∠ IEH + ∠ IHE < 2 suoraa kulmaa. Sentähden tapaawat EI ja HI toinen toisensa jossain, pisteessä I. h) Wedä pisteestä I kohtisuorat wiiwat IK, IO ja IN kolmikulman siwuille, niin IK, IO ja IN owat yhtäsuuret ja säteet ympyrälle, joka on piirrettäwä kolmikulmaan AEH.

a. 9 Esit. 1.
e. 17 Esit. 1.
h. 12 Selw. 1.
i. 11 Selw. 1.
k. 26 Esit. 1.
l. 16 Esit. 3.
m. 5 Määr. 4.

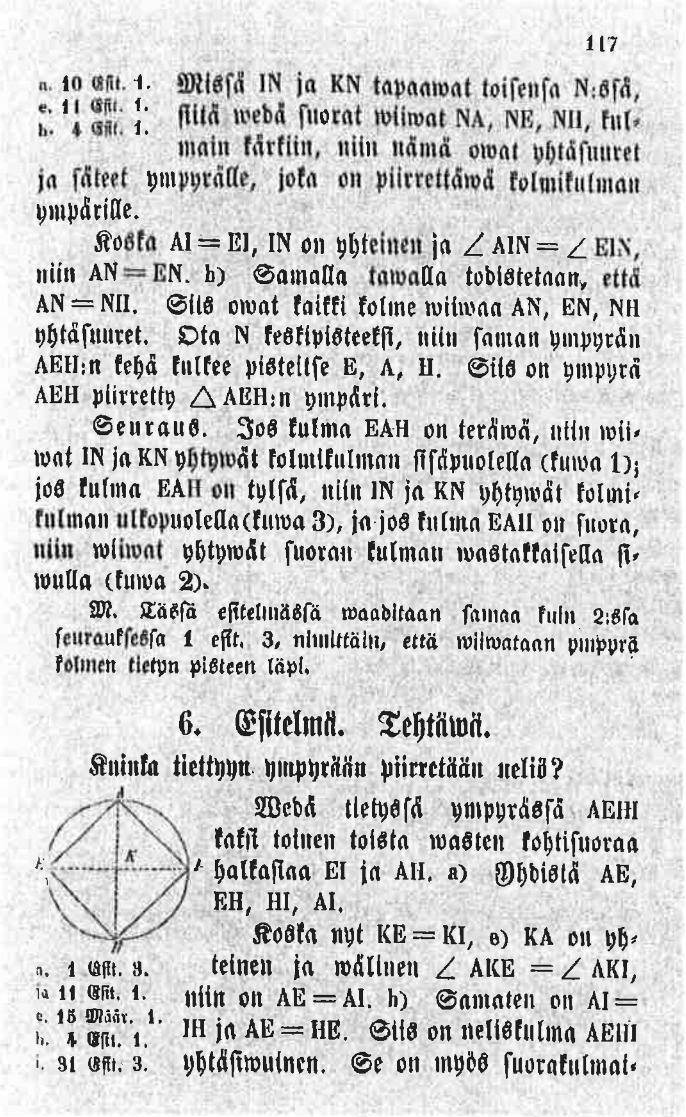
Koska ∠ IEK = ∠ IEO, ∠ IKE = ∠ IOE, i) ja siwu EI on yhteinen, niin IK on = IO. k) Samalla tawalla todistetaan, että IO = IN. Siis owat kaikki kolme IK, IO ja IN yhtäsuuret wiiwat. Jos siis I otetaan keskipisteeksi, niin saman ympyrän KON:n kehä menee pisteitse K, O, N, ja koskee kolmikulman siwuihin leikkaamatta, koska kulmat K:ssa, O:ssa ja N:ssä owat suorat. l) Niinmuodoin on ympyrä KON piirretty kolmikulmaan AEH. m).

5. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka piirretään ympyrä tietyn kolmikulman ympäri?

Piirrä tietyn kolmikulman AEH:n ympäri ympyrä.

Leikkaa siwut AE ja AH keskeltä kahtia I:ssä ja K:ssa, a) Wedä I:stä IN ⊥ AE:lle ja K:sta KN ⊥ AH:lle, e)


117

a. 10 Esit. 1. Missä IN ja KN tapaawat toisensa N:ssä,
e. 11 Esit. 1. siitä wedä suorat wiiwat NA, NE, NH, kul-
h. 4 Esit. 1. main kärkiin, niin nämä owat yhtäsuuret
ja säteet ympyrälle, joka on piirrettäwä kolmikulman ympärille.

Koska AI = EI, IN on yhteinen ja ∠ AIN = ∠ EIN, niin AN = EN. b) Samalla tawalla todistetaan, että AN = NH. Siis owat kaikki kolme wiiwaa AN, EN, NH yhtäsuuret. Ota N keskipisteeksi, niin saman ympyrän AEH:n kehä kulkee pisteitse E, A, H. Siis on ympyrä AEH piirretty △ AEH:n ympäri.

Seuraus. Jos kulma EAH on teräwä, niin wiiwat IN ja KN yhtywät kolmikulman sisäpuolella (kuwa 1); jos kulma EAH on tylsä, niin IN ja KN yhtywät kolmikulman ulkopuolella (kuwa 3), ja jos kulma EAH on suora, niin wiiwat yhtywät suoran kulman wastakkaisella siwulla (kuwa 2).

M. Tässä esitelmässä waaditaan samaa kuin 2:ssa seurauksessa 1 esit. 3, nimittäin, että wiiwataan ympyrä kolmen tietyn pisteen läpi.

6. Esitelmä. Tehtäwä.

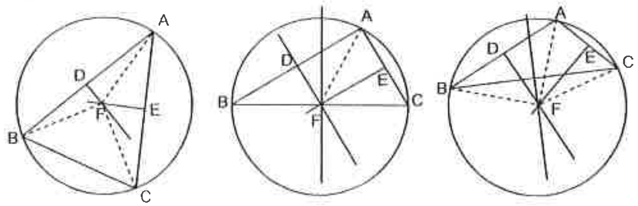
Kuinka tiettyyn ympyrään piirretään neliö?

Wedä tietyssä ympyrässä AEHI kaksi toinen toista wasten kohtisuoraa halkasiaa EI ja AH. a) Yhdistä AE, EH, HI, AI.

a. 1 Esit. 3. Koska nyt KE = KI, e) KA on yh-
ja 11 Esit. 1. teinen ja wälinen ∠ AKE = ∠ AKI,
e. 15 Määr. 1. niin on AE = AI. h) Samaten on AI =
h. 4 Esit. 1. IH ja AE = HE. Siis on neliskulma AEHI
i. 31 Esit. 3. yhtäsiwuinen. Se on myös suorakulmai-

TEHTÄVÄ 4.5. *Annetun kolmion ympäri on piirrettävä ympyrä.*

RATKAISU.



Olkoon annettuna kolmio ABC.
Olkoot sivujen AB ja AC keskinormaalien [1.10] kantapisteet D ja E ja leikkauspiste F. Väitetään, että F on etsityn ympyrän keskipiste. Koska $AD = DB$, kulma $\angle ADF$ on suora ja sivu DF on yhteinen, kolmiot $\triangle ADF$ ja $\triangle BDF$ ovat yhtenevät ja siis $BF = AF$. Samalla tavalla todistetaan, että $CF = AF$, joten $AF = BF = CF$, kuten väitettiin. □

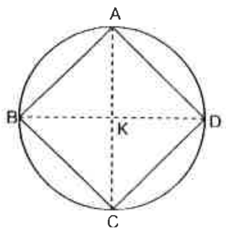
Todistuksessa ei perustella, miksi keskinormaalit leikkaavat toisensa. Aschan huomauttaa, että 4.5 on sama kuin lause 3.1, mutta näin ei ole: nyt on luovuttu oletuksesta, että annetut kolme pistettä olisivat jonkin ympyrän kehällä — tämähän todistetaan. Siksi keskinormaalien leikkauspisteen olemassaolo on tärkeää.[a]
Alkeiden alkuteksteissä käsitellään erikseen kuvan mukaiset tapaukset, joissa F on kolmion $\triangle ABC$ sisällä, reunalla tai ulkopuolella. Aschanin kirjassa tapauksia ei eritellä, mutta kuitenkin on kolme kuvaa. Niistä vasemmanpuoleinen on pahaksi onneksi piirretty melkein säännölliseksi kolmioksi, jolloin on vaikeaa nähdä, että sivujen keskinormaalit eivät välttämättä kulje kärkien kautta. Aschan liittää lauseeseen seurauksen, jonka mukaan ympäri piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion sisällä, reunalla tai ulkopuolella sen mukaan, onko kolmio terävä- suora- vai tylppäkulmainen. Tämä ei alun perin kuulu Alkeisiin.

TEHTÄVÄ 4.6. *Annetun ympyrän sisään on piirrettävä neliö.*

RATKAISU. Olkoon annettuna ympyrä. Etsitään sen keskipiste

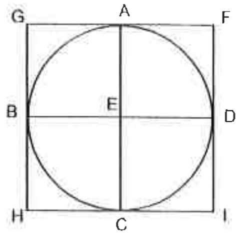
[a] Hyperbolisessa geometriassa on kolmioita, joiden keskinormaalit ovat yhdensuuntaisia. Niiden ympäri ei voi piirtää ympyrää.

K [3.1]. Piirretään pisteen K kautta suora ja sen normaali [1.11], jotka leikatkoon ympyrän pisteissä A, B, C ja D nimettynä kuvan mukaisesti. Väitetään, että $\square ABCD$ on annettuun ympyrään piirretty neliö.

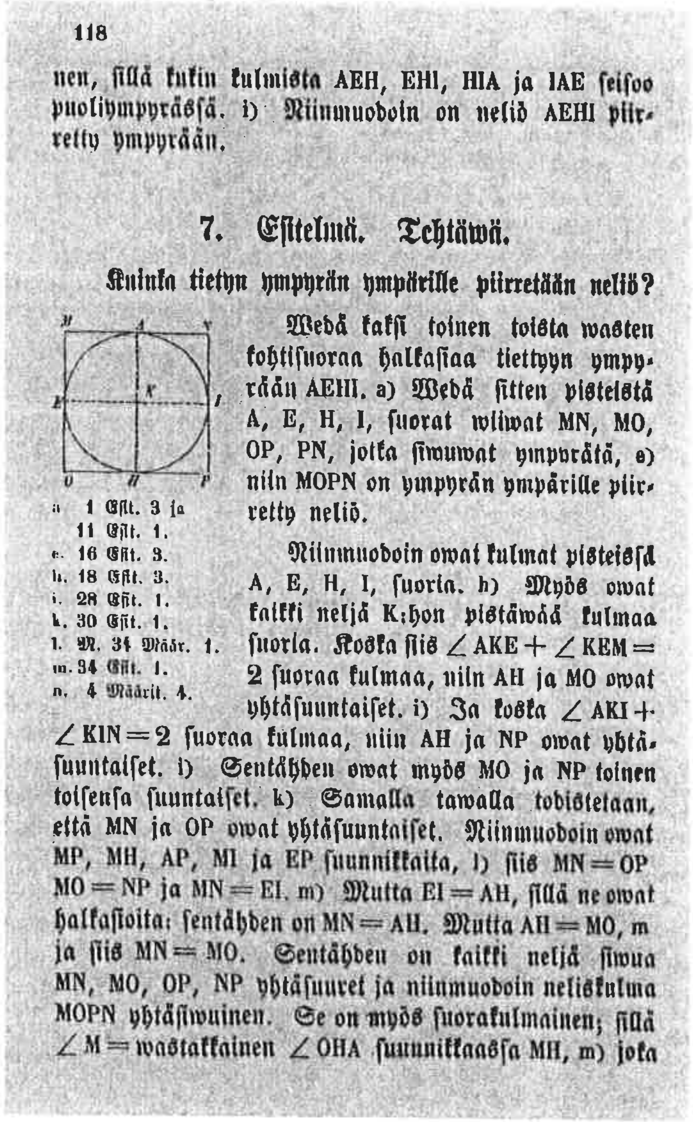


Nelikulmion $\square ABCD$ kärjet A, B, C ja D ovat annetun ympyrän kehällä, joten riittää tarkastaa, että $\square ABCD$ on neliö. Ympyrän määritelmän nojalla $KA = KB$, suorina kulmina $\angle AKB = \angle BKC$ ja sivu KB on yhteinen, joten $\triangle AKB \cong \triangle BKC$ SKS-lauseen 1.4 nojalla. Erityisesti $AB = BC$. Samalla tavalla todistetaan, että $BC = CD = CA$, joten nelikulmion $\square ABCD$ kaikki sivut ovat yhtä pitkät. Lisäksi se on suorakulmio, sillä kaikki sen kulmat ovat Thaleen puoliympyrälauseen 3.31 mukaan suoria. $\square$

TEHTÄVÄ 4.7. *Annetun ympyrän ympärille on piirrettävä neliö.*



RATKAISU. Olkoon annettuna ympyrä. Etsitään sen keskipiste E [3.1]. Piirretään pisteen E kautta suora ja sen normaali [1.11], jotka leikatkoon ympyrän pisteissä A, B, C ja D nimettynä kuvan mukaisesti. Piirretään tangentit pisteisiin A, B, C ja D ja nimetään niiden leikkauspisteet kuvan mukaisesti [3.16]. Väitetään, että $\square FGHI$ on annetun ympyrän ympäri piirretty neliö.



118

nen, sillä kukin kulmista AEH, EHI, HIA ja IAE seisoo puoliympyrässä. i) Niinmuodoin on neliö AEHI piirretty ympyrään.

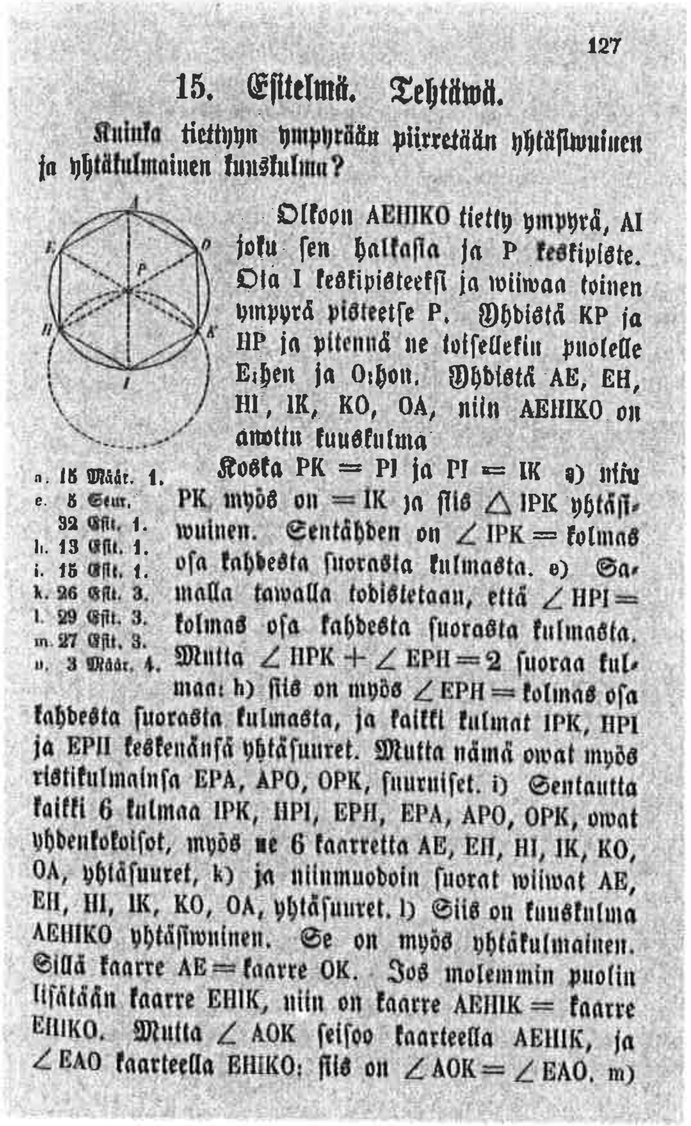
7. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tietyn ympyrän ympärille piirretään neliö?

Wedä kaksi toinen toista wasten kohtisuoraan halkasiaa tiettyyn ympyrään AEHI. a) Wedä sitten pisteistä A, E, H, I, suorat wliwat MN, MO, OP, PN, jotka siwuwat ympyrätä, e) niin MOPN on ympyrän ympärille piirretty neliö.

Niinmuodoin owat kulmat pisteissä A, E, H, I, suoria. h) Myös owat kaikki neljä K:hon pistäwää kulmaa suoria. Koska siis ∠ AKE + ∠ KEM = 2 suoraa kulmaa, niin AH ja MO owat yhtäsuuntaiset. i) Ja koska ∠ AKI + ∠ KIN = 2 suoraa kulmaa, niin AH ja NP owat yhtäsuuntaiset. i) Sentähden owat myös MO ja NP toinen toisensa suuntaiset. k) Samalla tawalla todistetaan, että MN ja OP owat yhtäsuuntaiset. Niinmuodoin owat MP, MH, AP, MI ja EP suunnikkaita, l) siis MN = OP MO = NP ja MN = EI. m) Mutta EI = AH, sillä ne owat halkasioita; sentähden on MN = AH. Mutta AH = MO, m ja siis MN = MO. Sentähden on kaikki neljä siwua MN, MO, OP, NP yhtäsuuret ja niinmuodoin neliskulma MOPN yhtäsiwuinen. Se on myös suorakulmainen; sillä ∠ M = wastakkainen ∠ OHA suunnikkaassa MH, m) joka

a 1 Esit. 3 ja 11 Esit. 1.
e. 16 Esit. 3.
h. 18 Esit. 3.
i. 28 Esit. 1.
k. 30 Esit. 1.
l. M. 34 Määr. 1.
m. 34 Esit. 1.
n. 4 Määrit. 4.



127

15. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tiettyyn ympyrään piirretään yhtäsiwuinen ja yhtäkulmainen kuuskulma?

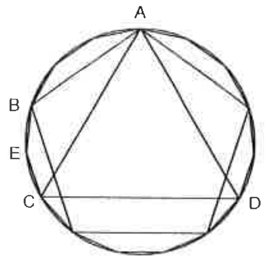
Olkoon AEHIKO tietty ympyrä, AI joku sen halkasia ja P keskipiste. Ota I keskipisteeksi ja wiiwaa toinen ympyrä pisteetse P. Yhdistä KP ja HP ja pitennä ne toisellekin puolelle E:hen ja O:hon. Yhdistä AE, EH, HI, IK, KO, OA, niin AEHIKO on awttu kuuskulma

a. 15 Määr. 1. Koska PK = PI ja PI = IK a) niin
e. 5 Seur. PK myös on = IK ja siis △ IPK yhtäsi-
32 Esit. 1. wuinen. Sentähden on ∠ IPK = kolmas
h. 13 Esit. 1. osa kahdesta suorasta kulmasta. e) Sa-
i. 15 Esit. 1. malla tawalla todistetaan, että ∠ HPI =
k. 26 Esit. 3. kolmas osa kahdesta suorasta kulmasta.
l. 29 Esit. 3. Mutta ∠ HPK + ∠ EPH = 2 suoraa kul-
m. 27 Esit. 3.
n. 3 Määr. 4. maa: h) siis on myös ∠ EPH = kolmas osa kahdesta suorasta kulmasta, ja kaikki kulmat IPK, HPI ja EPH keskenänsä yhtäsuuret. Mutta nämä owat myös ristikulmainsa EPA, APO, OPK, suuruiset. i) Sentautta kaikki 6 kulmaa IPK, HPI, EPH, EPA, APO, OPK, owat yhdenkokoisot, myös ne 6 kaarretta AE, EH, HI, IK, KO, OA, yhtäsuuret, k) ja niinmuodoin suorat wiiwat AE, EH, HI, IK, KO, OA, yhtäsuuret. l) Siis on kuuskulma AEHIKO yhtäsiwuinen. Se on myös yhtäkulmainen. Sillä kaarre AE = kaarre OK. Jos molemmin puolin lisätään kaarre EHIK, niin on kaarre AEHIK = kaarre EHIKO. Mutta ∠ AOK seisoo kaarteella AEHIK, ja ∠ EAO kaarteella EHIKO: siis on ∠ AOK = ∠ EAO. m)

Samoin $\measuredangle DGC$ on $\frac{2}{3}$ suorasta kulmasta. Mutta vieruskulmat $\measuredangle BGC$ ja $\measuredangle CGE$ ovat yhteensä kaksi suoraa kulmaa [1.13], joten myös $\measuredangle BGC$ on $\frac{2}{3}$ suorasta kulmasta. Muut kolme kuusikulmion $ABCDEF$ keskuskulmaa ovat edellä mainittujen ristikulmia, siis nekin yhtä suuria [1.15]. Vastaavat kaaret ovat siis yhtä pitkiä [3.26], samoin vastaavat jänteet [3.27], jotka ovat kuusikulmion $ABCDEF$ sivut. Kuusikulmio on siis tasasivuinen. Osoitetaan vielä tasakulmaisuus. Kaaret AB ja ED ovat yhtä suuret, joten myös kaaret EB ja AD oat yhtä suuret. Lauseen 3.27 mukaan ovat niitä vastaavat kehäkulmatkin yhtä suuret: $\measuredangle EAB = \measuredangle DEA$. Samalla tavalla todistetaan, että kuusikulmion $ABCDE$ muutkin kulmat ovat yhtä suuret. □

SEURAUS. *Ympyrän sisään piirretyn säännöllisen kuusikulmion sivut ovat yhtä suuret kuin ympyrän säde.*

TEHTÄVÄ 4.16. *Ympyrän sisään on piirrettävä säännöllinen viisitoistakulmio.*



RATKAISU. Piirretään annetun ympyrän sisään säännöllinen kolmikulmio ja säännöllinen viisikulmio ja sovitetaan kolmion sivu AC ja viisikulmion sivu AB alkavaksi samasta pisteestä A. [4.2, 4.15 ja 4.1]. Tällöin kaari AC on kolmasosa eli viisi viidestoistaosaa koko ympyrän kehästä ja kaari AB on viidesosa eli kolme viidestoistaosaa koko ympyrän kehästä, joten kaari BC on kaksi viidestoistaosaa koko ympyrän kehästä. Puolittamalla se saadaan siis yksi viidestoistaosa koko ympyrän kehästä. Kaaren BC keskikohta on janan BC keskinormaalin ja kaaren BC leikkauspiste E. Kun se on konstruoitu, on saatu kolme viisitoistakulmion peräkkäistä kulmaa B, E ja C. Muut saadaan sovittamalla EC:n pituisia janoja ympyrään peräkkäin. Todistus on samantapainen kuin edellisissäkin lauseissa.

Kun säännöllinen monikulmio on saatu konstruoitua ympyrän sisään, on sellainen mahdollista piirtää myös ympyrän ympäri, kuten edellä tehtiin viisikulmion tapauksessa. Samoin voidaan ympyrä helposti piirtää säännöllisen monikulmion ympäri ja sisään. □

Edellinen todistus on siinä mielessä tyylillisesti erilainen kuin aikaisemmat, että perustelu esitetään ennen konstruktiota.

Tehtävän 4.16 ratkaisun viimeisessä kappaleessa Aschan puhuu säännöllisestä monikulmiosta yleensä, Eukleides vain viisitoistakulmiosta. Tietenkin ero johtuu ensisijaisesti siitä, että Eukleideen aikana ja kauan sen jälkeenkin tällaiset asiat oli tapana ilmaista esimerkin kautta.

Kuten esikuvansa Strömer Aschankin kiinnittää huomiota siihen, että kaikista tähän asti ympyrän sisään konstruoiduista säännöllisistä n-kulmioista voi tehdä $2n$-kulmioita puolittamalla kaaret. Näin konstruoidaan säännölliset 3,6,12, ... 4,8,16,... 5,10,20,... sekä 15,30,60,... -kulmiot. Aschan mainitsee, että tässä luettelossa eivät suinkaan ole mukana kaikki säännölliset monikulmiot; esimerkiksi 7-kulmio puuttuu. Tässä Aschan antaa "käytännön" sekoittaa teorian käsittelyä kehottamalla tällaisissa tapauksissa piirtämään n-kulmion astelevyn eli "kulmapykälikön" avulla. Hän ei korosta tällaisen menettelyn olennaista eroa harppi-viivainkonstruktioon nähden. Sentään hän huomauttaa, että $\frac{360}{7}$ on vain likimain 51 astetta 26 minuuttia. Aschanilla on kuitenkin ollut käytössään Strömerin ruotsinnos, jossa neljännen kirjan lopussa lukee "Men att inskrifva eller omskrifva hvad för en månghörning som förekommer, kan ej göras genom de här antagna postulaterna (!). 1700-luvulla eläneenä Strömer ei voinut vielä tietää Gaussin havainnosta, että myös säännöllinen 17-kulmio voidaan konstruoida harpilla ja viivoittimella, samoin mikä tahansa n-kulmio, missä n on ns. *Fermat'n alkuluku*.

15-kulmion konstruktiota on antiikin aikana pidetty tärkeänä siitä syystä, että viisitoistakulmion sivun keskuskulma 24 astetta oli yleisesti käytetty arvo maan akselin kaltevuudelle, joka aiheuttaa vuodenajat. Mystinen yhteys tosin menetti hieman merkitystään, kun Eratosthenes mittasi akselin kaltevuuden kulman tarkemmin ja huomasi kulman poikkeavan 24 asteesta noin asteen kuudesosalla.

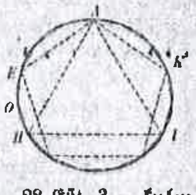
128

Samalla tawalla todistetaan, että muutkin kulmat kuuskulmassa owat yhtäsuuret kuin AOK eli EAO. Siis on yhtäsiwuinen ja yhtäkulmainen kuuskulma piirretty ympyrään AEHIKO. n).

Seuraus. Ympyrään piirretyn säännöllisen kuuskulman siwut owat säteen suuruiset ympyrässä.

16. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka tiettyyn ympyrään piirretään yhtäsiwuinen ja yhtäkulmainen wiisitoistakulmio?



a. 28 Esit. 3.
e. 30 Esit. 3.

Olkoon AH yhtäsiwuisen kolmikulman ja AE yhtäsiwuisen wiiskulman siwu, kolmikulma ja wiiskulma piirretyt ympyrään samasta pisteestä A; niin kaarre AH, kolmikulman siwulla, on kolmas osa, ja kaarre AE, wiiskulman siwulla, on wiides osa koko ympyrän kehästä. a) Sentähden on kaarre EH, molempien wälillä, kolmas osa, wähennetty wiidennellä osalla, tai kaksi wiisitoistas osaa koko kehästä. Jos siis EH leikataan keskeltä kahtia O:ssa, e) ja EO:n suuruisia kaarteita leikataan perättäin kehästä, niin kehä sitten tulee jaetuksi 15 yhtäsuureen kaarteeseen. Jos sitten kaksi ja kaksi likimäistä pistettä yhdistetään suorilla wiiwoilla, niin ympyrän sisään walmistuwa kuwio on yhtäsiwuinen ja yhtäkulmainen wiisitoistakulma.

Todistus löydetään helposti edellisten esitelmäin mukaan.

M. Ympyrään piirretyistä yhtäsiwuisista ja samalla yhtäkulmaisista suorawiiwaisista kuwioista saadaan kaarteiu jakamalla keskeltä kahtia: