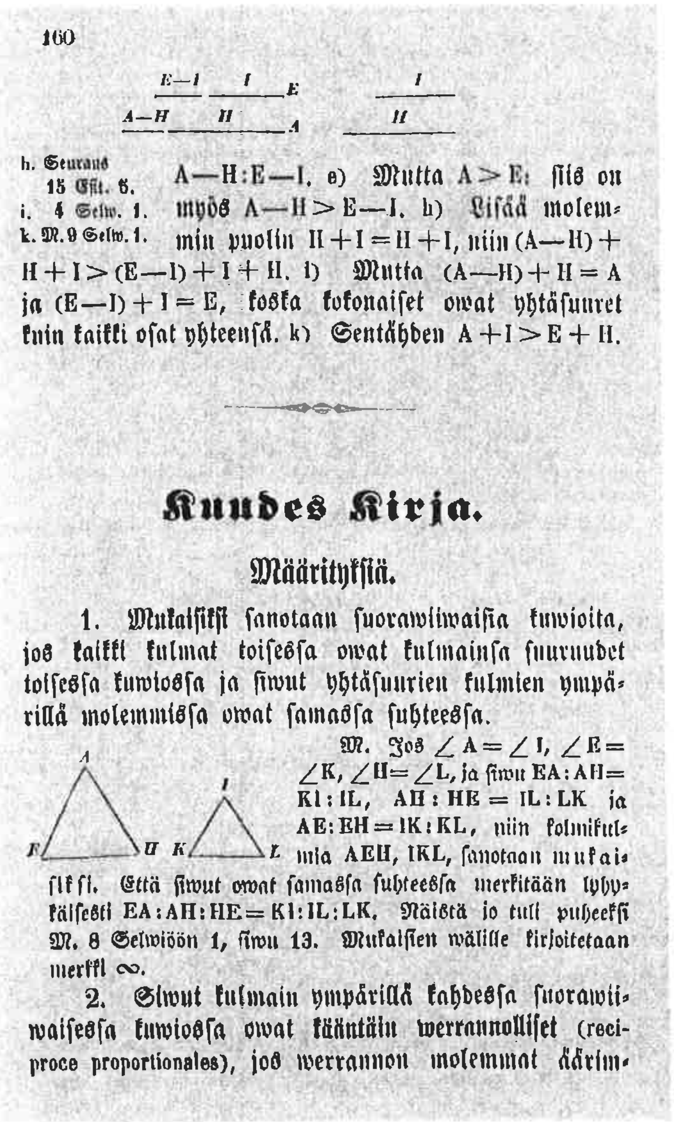
KIRJA 6



$$\frac{E-I}{A-H}\;\frac{I}{H}\,\frac{E}{A}\qquad\frac{I}{H}$$

h. Seurans 15 Esit. 6. A—H:E—I. e) Mutta A > E: siis on
i. 4 Selw. 1. myös A—H > E—I. h) Lisää molem-
k. M. 9 Selw. 1. min puolin H + I = H + I, niin (A—H) + H + I > (E—I) + I + H. l) Mutta (A—H) + H = A ja (E—I) + I = E, koska kokonaiset owat yhtäsuuret kuin kaikki osat yhteensä. k) Sentähden A + I > E + H.

Kuudes Kirja.

Määrityksiä.

1. Mukaisiksi sanotaan suorawiiwaisia kuwioita, jos kaikki kulmat toisessa owat kulmainsa suuruudet toisessa kuwiossa ja siwut yhtäsuurien kulmien ympärillä molemmissa owat samassa suhteessa.

M. Jos ∠A = ∠I, ∠E = ∠K, ∠H = ∠L, ja siwut EA : AH = KI : IL, AH : HE = IL : LK ja AE : EH = IK : KL, niin kolmikulmia AEH, IKL, sanotaan mukaisiksi. Että siwut owat samassa suhteessa merkitään lyhykäisesti EA : AH : HE = KI : IL : LK. Näistä jo tuli puheeksi M. 8 Selwiöön 1, siwu 13. Mukaisien wälille kirjoitetaan merkki ∾.

2. Siwut kulmain ympärillä kahdessa suorawiiwaisessa kuwiossa owat kääntäin werrannolliset (reciproce proportionales), jos werrannon molemmat äärim-

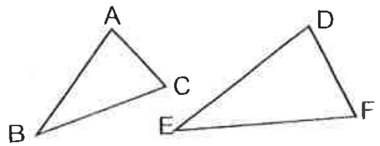
Kuudes kirja

Eukleideen Alkeiden kuudes kirja käsittelee yhdenmuotoisia kuvioita. Tässä tietenkin pituuksien ja pinta-alojen suhteilla on oleellinen rooli. Tarvitaan viidennen kirjan tiedot tai niitä vastaava nykyaikainen teoria reaalilukuineen. Kuudennessa kirjassa perustellaan mm. miksi monikulmiossa, ympyrässä ja viime kädessä missä tahansa kuviossa pituuksien kaksinkertaistaminen nelinkertaistaa pinta-alan. Kaikkien ympyröiden yhdenmuotoisuus antaa lopuksi aiheen ottaa käyttöön π:n.

6.1. Määritelmiä. Eukleides aloittaa kuudennen kirjan kolmella määritelmällä, mutta ei esitä yhtään uutta aksioomaa. Aschanin käännöksessä, jota seuraan, on sen sijaan kuusi määritelmää ja muitakin eroja vanhoihin käsikirjoituksiin verraten.

(1) Kahta monikulmiota sanotaan *yhdenmuotoisiksi* (Aschanilla "mukaiset suorawiiwaiset kuwiot"), mikäli niissä on yhtä suuret vastinkulmat ja sivut vastinkulmien kohdalla ovat samassa suhteessa kummassakin monikulmiossa.

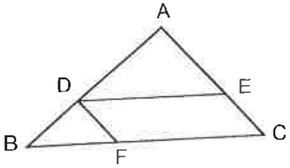
Aschan antaa esimerkkinä kaksi yhdenmuotoista kolmiota ja piirtää kuvan,



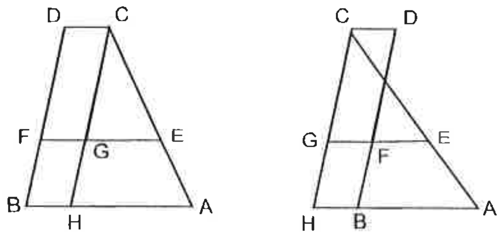
jossa on kulmat $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$ ja $\angle C = \angle F$, sekä sivujen suhteet $BA : AC = ED : DF$, $CB : BA = FE : ED$ ja $AC : CB = DF : FE$, eli lyhyesti $AB : BC : CA = DE : EF : FD$. Lisäksi Aschanin kuvassa vastinsivut ovat yhdensuuntaisia, mistä olen luopunut omassa piirroksessani, koska se ei liity yhdenmuotoisuuden käsitteeseen.

Aschan muistuttaa myös siitä, että on vihjaissut yhdenmuotoisuuden käsitteeseen jo ensimmäisessä kirjassa ja että sille käytetään merkkiä ∞.

SEURAUS 2. *Jos samasta pisteestä D kolmion sivulla AB piirretään toisten sivujen suuntaiset suorat, niin kolmio tulee jaetuksi suunnikkaaksi ja kahdeksi alkuperäisen kanssa yhdenmuotoiseksi kolmioksi.*



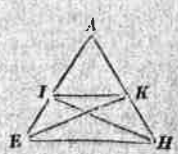
SEURAUS 3. *Jos kaksi suoraa leikataan useammalla yhdensuuntaisella suoralla, niin suorien palaset yhdensuuntaisten välissä ovat toisiinsa verrannolliset.*



TODISTUS. Olkoot leikkaavat yhdensuuntaiset AB,CD ja niiden välissä EF. Jos leikattavana on yhdensuuntaiset suorat kuten kummassakin piirroksessa suorat DB ja CH, niin $BF = HG$ ja $FD = GC$, joten lauseen 5.7 mukaan $BF : FD = HG : GC$, ja seuraus 3 pätee siis yhdensuuntaisten suorien tapauksessa. Jos taas alkuperäiset suorat eivät ole yhdensuuntaiset, vaan leikkaavat toisensa, kuten kummassakin piirroksessa AC ja BD, niin piirretään apuviiva $HC \parallel BD$. Nyt on edellisen lauseen mukaan $AE : EC = HG : GC$. Koska suunnikkaassa vastakkaiset sivut ovat yhtä pitkät [1.34], niin $HG = BF$ ja $GC = FD$. Tästä seuraa $AE : EC = BF : FD$ eli väite. □

LAUSE 6.3. *Kolmion kulman puolittaja jakaa vastakkaisen sivun sellaisessa vastakkaisen sivun pisteessä, joka jakaa sen niin, että osat ovat verrannolliset kolmion samanpuoleisiin sivuihin.*

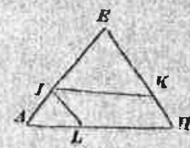
164



myös △ EIK : △ IAK = △ HKI : △ IAK, i) ja niinmuodoin △ EIK = △ HKI. k) Mutta △ EIK ja △ HKI owat samalla asemalla IK ja samalla puolella: sentähden owat IK ja EH yhtäsuuntaiset. l)

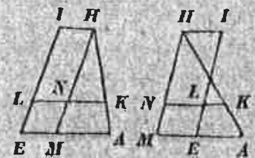
1 Seuraus. Werrannosta EI:IA = HK:KA saadaan nämä uudet werrannot:

Ensin käåntåmällä IA : EI = KA : HK;
Sitten yhdistämällä AE : AI = AH : AK,
eli AE : EI = AH : HK;
Ja wielä wuorottamalla AE : AH = AI : AK j. n. e.



2 Seuraus. Jos samasta pisteestä I kolmikulman siwulla wedetään toisten siwujen suuntaisia suoria wiiwoja IK ja IL, niin kolmikulma jaetaan suunnikkaasen ja kahteen kolmikulmaan, jotka owat keskenänsä ja kokonaisen kanssa mukaiset.

3 Seuraus. Jos kaksi suoraa wiiwaa leikataan useammilta yhtäsuuntaisilta suorilta wiiwoilta, niin suorain wiiwain palaiset yhtäsuuntaisten wälillä owat toisiinsa werrannolliset.



Jos yhtäsuuntaiset IE ja HM leikataan yhtäsuuntaisilta EM, LN ja HI, niin EL = MN ja LI = NH; siis EL : LI = MN : NH. a) Mutta jos AH ja EI, jotka kallistuwat toisiinsa, taikka suorastaan sattuwat toinen toiseensa, leikataan yhtäsuuntaisilta AE, KL, HI, niin wedetään HM yhtä suuntaa kuin IE. Siis on esitelmän mukaan

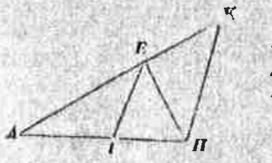
a. M. 7 Esit. 5.
e. 34 Esit. 1.

165

AK:KH = MN:NH. Mutta MN = EL ja NH = LI: o) siis on AK:KH = EL:LI. —

3. Esitelmä. Wäittämä.

Jos joku kulma kolmikulmassa leikataan keskeltä kahtia, niin kulmaa halkasewa wiiwa leikkaa wastakkaisen siwun kahteen osaan, jotka owat werrannolliset samanpuolisiin kolmikulman siwuihin. Ja perki wastoin, jos wastakkaisen siwun osat owat werrannolliset siwuihin, niin suora wiiwa, joka yhdistää jakopisteen ja kulman kärjen, leikkaa kulman keskeltä kahtia.



Jos kolmikulmassa AEH ∠ AEI = ∠ IEH, niin AI:IH = AE:EH; ja jos AI:IH = AE:EH, niin on ∠ AEI = ∠ IEH.

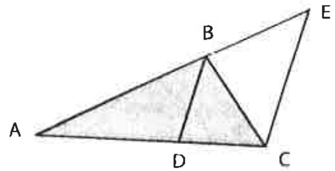
Pitennä AE kulmaan päin ja wedä H:sta HK yhtä suuntaa kuin EI, kunnes tapaa K:ssa pitennetyn AE:n.

Olkoon ensiksi ∠ AEI = ∠ IEH. Koska EI ja HK owat yhtäsuuntaiset, niin ∠ AEI = ∠ EKH ja ∠ IEH = EHK. n) Mutta ∠ AEI = ∠ IEH: sentähden on ∠ EKH = ∠ EHK, ja niinmuodoin EK = EH. e) Kuin nyt AI:IH = AE:EK, h) ja EK = EH; niin on AI:IH = AE:EH. i).

Olkoon toiseksi AI:IH = AE:EH. Mutta AI:IH = AE:EK: h) sentähden on AE:EH = AE:EK, k) ja niinmuodoin EH = EK. l) Kuin nyt EH = EK, niin on myös ∠ EHK = ∠ EKH. m) Mutta ∠ EHK = ∠ IEH ja ∠ EKH = ∠ AEI, sillä EI ja KH owat yhtäsuuntaiset. n) Sentähden on ∠ AEI = ∠ IEH ja niinmuodoin ∠ AEH leikattu keskeltä kahtia suoralta wiiwalta EI.

a. 29 Esit. 1.
e. 6 Esit. 1.
h. 2 Esit. 6.
i. 7 Esit. 5.
k. 11 Esit. 5.
l. 9 Esit. 5.
m. 5 Esit. 1.

Todistus.

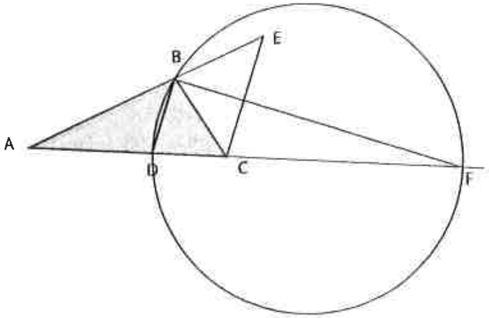


Oletetaan aluksi, että kulman $\measuredangle B$ puolittaja leikkaa sivun AC pisteessä D ja osoitetaan, että $AB : BC = AD : DC$.
Piirretään C:n kautta BD:n suuntainen suora; se leikkaa suoran AB jossain pisteessä E. Koska $BD \parallel EC$, niin vuorokulmalauseen 1.29 nojalla $\measuredangle ABD = \measuredangle BEC$ ja $\measuredangle DBC = \measuredangle BCE$. Oletuksen nojalla $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC$. Siis $\measuredangle BEC = \measuredangle BCE$ ja niinmuodoin kolmio $\triangle CBE$ on tasakylkinen eli $BE = BC$ [1.6]. Edellisen lauseen 6.2 nojalla on $AB : BE = AD : DC$, joten $AB : BC = AD : DC$ [5.7].
Oletetaan seuraavaksi, että D on sivulla AC ja $AB : BC = AD : DC$ ja väitetään, että $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC$. Toisaalta edellisen lauseen 6.2 mukaan $AD : DC = AB : BE$, joten $AB : BC = AB : BE$ [5.11]. Siis $BC = BE$ [5.9] eli kolmio $\triangle CBE$ on tasakylkinen, joten lauseen 1.5 nojalla $\measuredangle BCE = \measuredangle BEC$. Mutta koska $BD \parallel EC$, niin vuorokulmalauseen 1.29 nojalla $\measuredangle ABD = \measuredangle BEC$ ja $\measuredangle CBD = \measuredangle BCE$. Siis $\measuredangle ABD = \measuredangle DBC$. □

Lauseen käänteinen puoli seuraisi ensimmäisestä puolesta, jos olisi tiedossa, että janalla AC on vain yksi piste, joka jakaa sen annetussa suhteessa. Tätä ei ole aikaisemmin todistettu, vaan se seuraa nyt todistetusta lauseesta. Eri asia on, että Eukleideen aksioomista ei tarkkaan ottaen seuraa, että kulman puolittaja ollenkaan leikkaa vastaista sivua. Tätä ns. *puomilausetta* on pidetty itsestäänselvänä 1800-luvulle asti eikä Aschankaan puutu asiaan.
Aschan ei myöskään kiinnitä huomiota lauseen 6.3 mielenkiintoiseen seuraukseen, jonka hahmottelen todistuksineen:

Seuraus. Niiden pisteiden ura, joiden etäisyydet kahdesta annetusta pisteestä ovat verrannolliset (mutta eivät samat), on ympyrä, *Apolloniokseen ympyräksi* sanottu. (Apollonios todisti saman asian eri tavalla.)

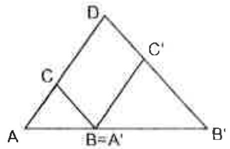
TODISTUS. Lausetta 6.3 voi täydentää todistamalla, että myös ulkokulman $\measuredangle CBE$ puolittaja leikkaa sivun AC jossain pisteessä F, josta etäisyyksillä pisteisiin A ja C on sama suhde, mutta F ei tietenkään ole janalla AB, vaan "jakaa janan ulkoisesti". Koska kulman ja ulkokulman puolittajat ovat toistensa normaalit, on kulma $\measuredangle DBF$ suora ja piste B sijaitsee siis ympyrällä, jonka halkaisija on DF.



□

LAUSE 6.4. **(KKK)** *Jos kahdella kolmiolla on yhtä suuret kulmat, kolmiot ovat yhdenmuotoiset.*

TODISTUS.

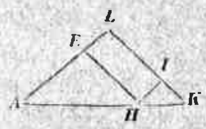


Olkoon kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ yhtä suuret kulmat: $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ ja $\measuredangle C = \measuredangle C'$. Osoitetaan, että $AB : BC : CA = A'B' : B'C' : C'A'$.
Voi olettaa, että B ja A' ovat sama piste ja sivut AB ja $A'B'$ samalla suoralla. Lauseen 1.17 mukaan ovat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B$ yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, joten, koska oletettiin $\measuredangle B = \measuredangle B'$, ovat myös $\measuredangle A$ ja $\measuredangle B'$ yhteensä vähemmän kuin kaksi suoraa kulmaa, joten suorat AC ja $B'C'$ leikkaavat yhdensuuntaisuusaksiooman nojalla toisensa jossain pisteessä D.

166

4. Esitelmä. Wäittämä.

Yhtäkulmaiset kolmikulmat owat toinen toisensa muotaiset.



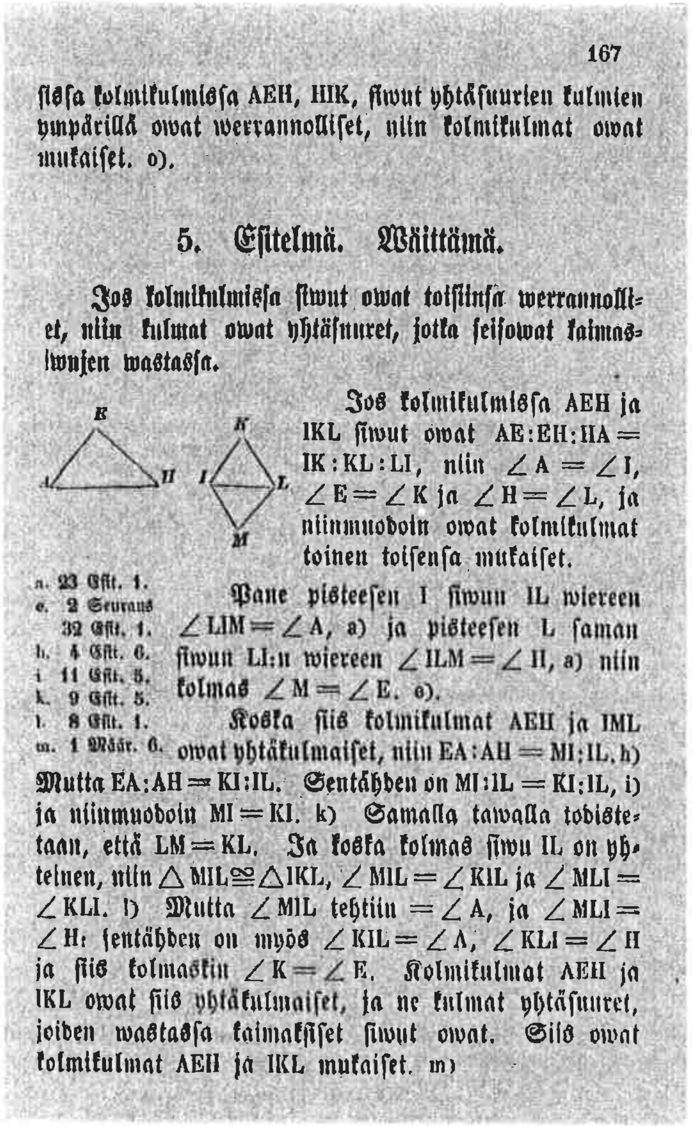
Se on: jos kolmikulmissa AEH ja HIK ∠ A = ∠ IHK, ∠ AEH = ∠ HIK ja ∠ AHE = ∠ HKI; niin AE : EH : HA = HI : IK : KH. Katso M. 1 Määr. 6.

a. 17 Esit. 1.
c. 12 Selw. 1.
h. 28 Esit. 1.
i. 34 Esit. 1.
k. 2 Esit. 6.
l. 7 Esit. 5.
m. 16 Esit. 5.
n. 22 Esit. 5.
o. 1 Määr. 6.

Aseta kolmikulmat yhteen semmoiseen pisteesen H, että siihen pistäwät kulmat AHE ja IHK eiwät ole yhtäsuuret kulmat kolmikulmissa, ja käännä kolmikulmat niin, että siwut AH ja HK, jotka seisowat yhtäsuurien kulmien wastassa, owat yhtenä suorana wiiwana; niin ∠ EAH = ∠ IHK ja ∠ EHA = ∠ IKH.

Koska ∠ EAH + ∠ EHA < 2 suoraa kulmaa, a) ja ∠ EHA = ∠ IKH, niin ∠ EAH + ∠ IKH myös owat < 2 suoraa kulmaa. Sentähden tapaawat AE ja KI toisensa, jos ne pitennetään. e) Tawatkoot siis toisensa L:ssä. Koska ∠ IHK = ∠ EAH, niin HI ja AL owat yhtäsuuntaiset; h) ja koska ∠ AHE = ∠ HKI, niin EH ja LK owat yhtäsuuntaiset. h) Sentähden on EI suunnikas, ja niinmuodoin EH = LI ja HI = EL. i) Mutta koska EH ja LK owat yhtäsuuntaiset, niin AE:EL = AH:HK, k) eli AE:HI = AH:HK, l) ja wuorottamalla AE:AH = HI:HK. m) Ja koska HI ja AL owat yhtäsuuntaiset, niin AH:HK = LI:IK, k) eli AH:HK = EH:IK, l) ja wuorottamalla AH:HE = HK:KI. m) Kerro nämä werrannot

AE : AH = HI : HK ja
AH : HE = HK : KI, niin on myös yhtäläisyydestä AE : HE = HI : KI. n) Koska siis yhtäkulmai-


167

siksa kolmikulmissa AEH, HIK, siwut yhtäsuurien kulmien ympärillä owat werrannolliset, niin kolmikulmat owat mukaiset. o).

5. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kolmikulmissa siwut owat toisiinsa werrannolliset, niin kulmat owat yhtäsuuret, jotka seisowat kaimaswuksen wastassa.

Jos kolmikulmissa AEH ja IKL siwut owat AE:EH:HA = IK:KL:LI, niin ∠A = ∠I, ∠E = ∠K ja ∠H = ∠L, ja niinmuodoin owat kolmikulmat toinen toisensa mukaiset.

a. 23 Essit. 1.
e. 2 Seuraus 32 Essit. 1.
h. 4 Essit. 6.
i. 11 Essit. 5.
k. 9 Essit. 5.
l. 8 Essit. 1.
m. 1 Määr. 6.

Pane pisteesen I siwun IL wiereen ∠LIM = ∠A, a) ja pisteesen L saman siwun LI:n wiereen ∠ILM = ∠H, a) niin kolmas ∠M = ∠E. e).

Koska siis kolmikulmat AEH ja IML owat yhtäkulmaiset, niin EA:AH = MI:IL. h) Mutta EA:AH = KI:IL. Sentähden on MI:IL = KI:IL, i) ja niinmuodoin MI = KI. k) Samalla tawalla todistetaan, että LM = KL. Ja koska kolmas siwu IL on yhteinen, niin △MIL ≅ △IKL, ∠MIL = ∠KIL ja ∠MLI = ∠KLI. l) Mutta ∠MIL tehtiin = ∠A, ja ∠MLI = ∠H: sentähden on myös ∠KIL = ∠A, ∠KLI = ∠H ja siis kolmaskin ∠K = ∠E. Kolmikulmat AEH ja IKL owat siis yhtäkulmaiset, ja ne kulmat yhtäsuuret, joiden wastassa kaimaksiset siwut owat. Siis owat kolmikulmat AEH ja IKL mukaiset. m)

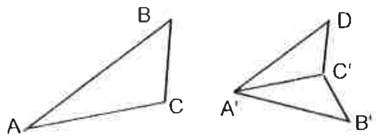
Vuorokulmalauseen 1.28 nojalla AD ja $A'C''$ ovat yhdensuuntaiset, koska $\measuredangle A = \measuredangle A'$. Samoin $BD \parallel B'C''$. Siis $\square BC''DC$ on suunnikas, joten $A'C'' = CD$ ja $A'C = C''D$ [1.34]. Lauseen 6.2 mukaan on siis $AC : CD = AB : A'B'$ eli, koska $CD = A'C''$, on $AC : A'C'' = AB : A'B'$ [5.7], josta vuorottamalla [5.16] saadaan $AC : AB = A'C'' : A'B'$,
Vastaavasti todistetaan, että $BA : BC = B'A' : B'C''$.
Kolmannen kulman viereisten sivujen suhde saadaan lopuksi lauseen 5.22 avulla: Koska $AC : AB = A'C'' : A'B'$ ja $AB : BC = A'B' : B'C''$, niin $AC : BC = A'B' : A'C''$.

□

Vaikka on olemassa lyhempi todistus, olen yllä esittänyt Eukleideen version. Erityisesti olen kuvaillut kolmioiden sijaintia olennaisesti Eukleideen sanoin — aika epätäsmällisesti, mutta hyvällä tahdolla ja kuvan avulla ymmärrettävästi. Aschanin sanamuoto on pitempi, mutta tuskin parempi; kevyesti modernisoiduin merkinnöin tällainen: "Aseta kolmikulmat yhteen semmoiseen pisteeseen $B = A'$, että siihen pistävät kulmat $\measuredangle ABC$ ja $\measuredangle B'A'C''$ eivät ole yhtä suuret kulmat kolmikulmista, ja käännä kolmikulmat niin, että sivut AB ja $A'B'$, jotka seisowat yhtä suurien kulmien wastassa, ovat yhtenä suorana wiiwana; niin $\measuredangle CAB = \measuredangle C''A'B'$."
Aschan on kääntänyt todistuksen muilta osin sanatarkasti, mutta viimeisen vaiheen hän perustelee kertomalla verrannot.

Lause 6.5. *Jos kahdella kolmiolla on toisiinsa verrannolliset sivut, niin vastinsivujen vastaiset kulmat ovat yhtä suuret (ja kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset).*

Todistus.



Olkoon kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ voimassa $A : B : C = A' : B' : C'$. Väitetään, että $\measuredangle A = \measuredangle A'$, $\measuredangle B = \measuredangle B'$ ja $\measuredangle C = \measuredangle C'$ ja että siis kolmiot ovat yhdenmuotoiset. Kopioidaan 1.23 mukaisesti kulmat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle C$ janan $A'C''$ päihin samalle puolelle, jolloin — koska ne yhteensä ovat alle kaksi suoraa kulmaa — vapaat kyljet kohtaavat jossain pisteessä D ja syntyneessä kolmiossa $\triangle A'C''D$ on kulmasummalauseen 1.32 nojalla $\measuredangle D = \measuredangle B$. Kolmioilla $\triangle ACB$ ja $\triangle A'C''D$ on siis yhtä suuret kulmat, joten edellisen lauseen 6.4 mukaan $AB : AC = A'D : A'C'$. Mutta oletuksen mukaan $AB : AC = A'B' : A'C''$, joten $A'D : A'C'' = A'B' : A'C''$ [5.11] ja siis $A'D = A'B$ [5.9]. Vastaavasti myös $C''D = C'B$. Koska kolmas sivu on yhteinen, niin SSS-ehdon 1.8 mukaan $\triangle A'D'C'' \cong \triangle A'B'C'$. Erityisesti $\measuredangle A' = \measuredangle B'A'C'' = \measuredangle DA'C'' = \measuredangle A$ ja $\measuredangle C'' = \measuredangle B'C'A' = \measuredangle DC'A' = \measuredangle C$, jolloin kulmasummalauseen 1.32 mukaan myös $\measuredangle B' = \measuredangle B$. $\square$

"Vastinsivut" on syytä tulkita huolellisesti. Jos kolmiossa on esimerkiksi sivut $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ ja toisessa $a' = 12$, $b' = 15$, $c' = 20$, niin

$$c : a = 5 : 3 = 20 : 12 = c' : a',$$

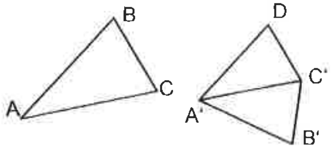
$$a : b = 3 : 4 = 15 : 20 = b' : c' \text{ ja}$$

$$c : b = 5 : 4 = 15 : 12 = b' : a',$$

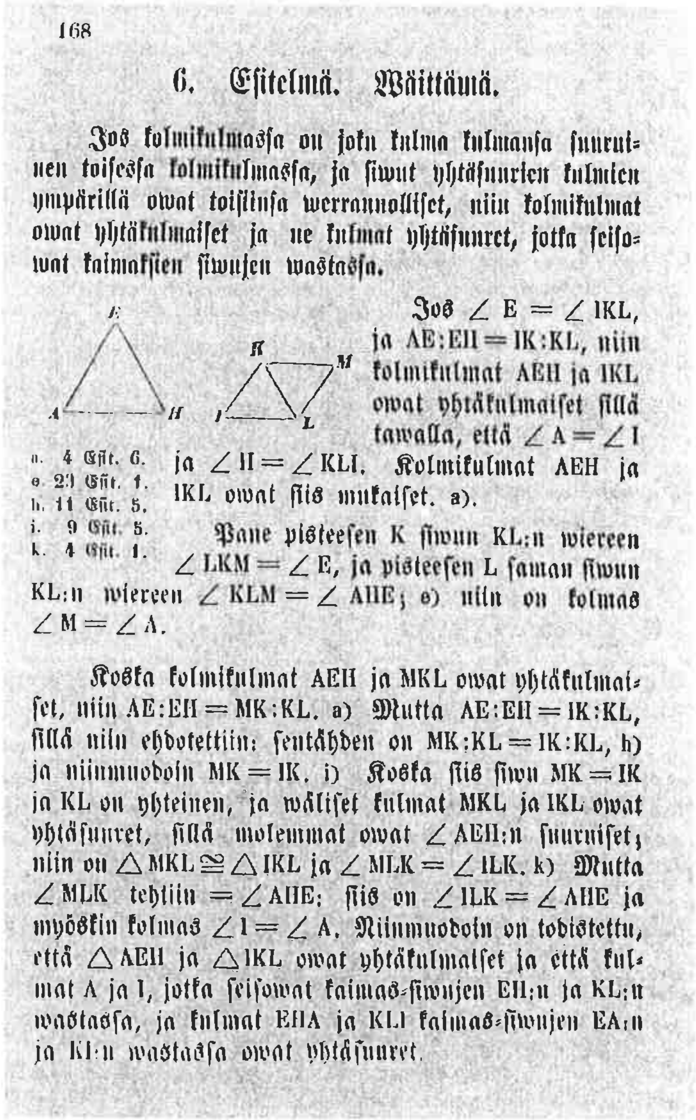
joten kolmioiden sivut ovat "toisiinsa verrannolliset", joskin "väärässä järjestyksessä", eivätkä kolmiot ole yhdenmuotoiset.

LAUSE 6.6. *Jos kahdella kolmiolla on yhtä suuri kulma ja sen viereiset sivut ovat verrannolliset, niin myös vastinsivujen vastaiset kulmat ovat yhtä suuret (ja kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset).*

TODISTUS. Olkoon kolmioissa $\triangle ABC$ ja $\triangle A'B'C'$ yhtä suuret kulmat A ja A' ja olkoon $BA : AC = B'A' : A'C'$. Väitetään, että $\measuredangle B = \measuredangle B'$ ja $\measuredangle C = \measuredangle C'$.



Kuten edellisen lauseen todistuksessa konstruoidaan aluksi alkuperäisen kanssa yhdenmuotoinen kolmio $\triangle A'DC''$ siirtämällä kulmat $\measuredangle A$ ja $\measuredangle C$ janan $A'C''$ päihin ja leikkaamalla vapaat kyljet kohdassa D, johon muodostuu kulma $\measuredangle D$, joka on yhtä suuri kuin $\measuredangle B$. Siis $AB : AC = A'D : A'C''$ [6.4], mutta oletettiin $AB : AC = A'B' : A'C''$, joten $A'D = A'B'$ [5.11]. Kolmioissa $\triangle DA'C''$ ja $\triangle B'A'C''$ on siis yhtä suuret kulmat


168

6. Esitelmä. Wäittämä.

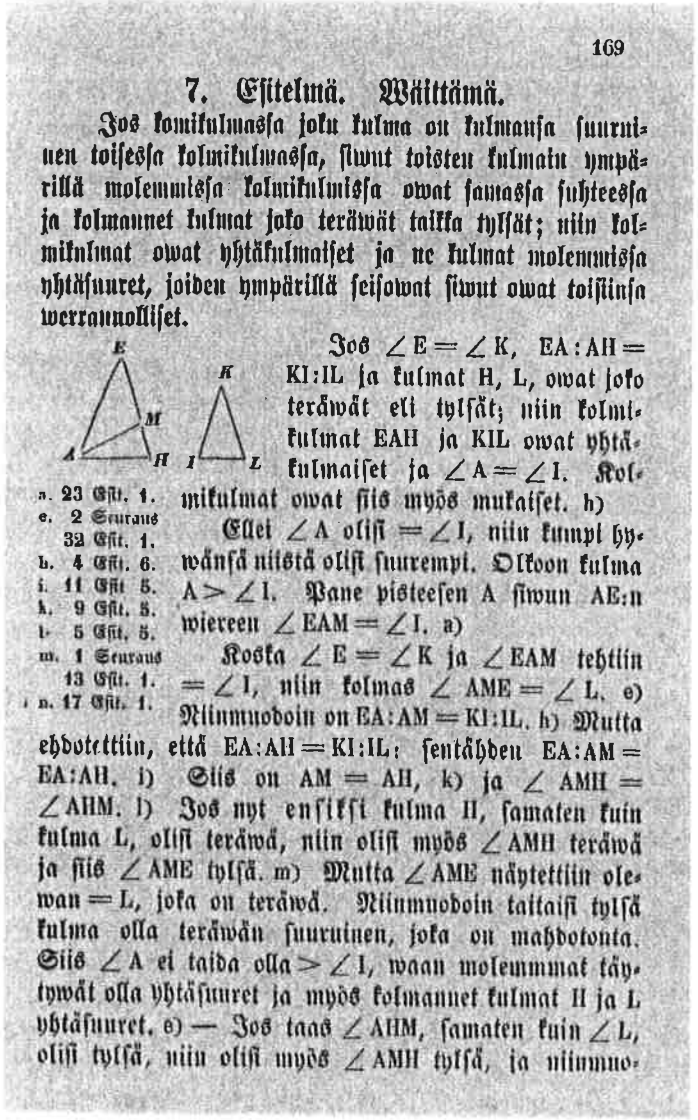
Jos kolmikulmassa on joku kulma kulmansa suuruinen toisessa kolmikulmassa, ja siwut yhtäsuurien kulmien ympärillä owat toisiinsa werrannolliset, niin kolmikulmat owat yhtäkulmaiset ja ne kulmat yhtäsuuret, jotka seisowat kaimaksien siwujen wastassa.

Jos ∠ E = ∠ IKL, ja AE:EH = IK:KL, niin kolmikulmat AEH ja IKL owat yhtäkulmaiset sillä tawalla, että ∠ A = ∠ I ja ∠ H = ∠ KLI. Kolmikulmat AEH ja IKL owat siis mukaiset. a).

a. 4 Esit. 6.
e. 23 Esit. 1.
h. 11 Esit. 5.
i. 9 Esit. 5.
k. 4 Esit. 1.

Pane pisteesen K siwun KL:n wiereen ∠ LKM = ∠ E, ja pisteesen L saman siwun KL:n wiereen ∠ KLM = ∠ AHE; e) niin on kolmas ∠ M = ∠ A.

Koska kolmikulmat AEH ja MKL owat yhtäkulmaiset, niin AE:EH = MK:KL. a) Mutta AE:EH = IK:KL, sillä niin ehdotettiin: sentähden on MK:KL = IK:KL, h) ja niinmuodoin MK = IK. i) Koska siis siwu MK = IK ja KL on yhteinen, ja wäliset kulmat MKL ja IKL owat yhtäsuuret, sillä molemmat owat ∠ AEH:n suuruiset; niin on △ MKL ≅ △ IKL ja ∠ MLK = ∠ ILK. k) Mutta ∠ MLK tehtiin = ∠ AHE; siis on ∠ ILK = ∠ AHE ja myöskin kolmas ∠ I = ∠ A. Niinmuodoin on todistettu, että △ AEH ja △ IKL owat yhtäkulmaiset ja että kulmat A ja I, jotka seisowat kaimas-siwujen EH:n ja KL:n wastassa, ja kulmat EHA ja KLI kaimas-siwujen EA:n ja KI:n wastassa owat yhtäsuuret.



169

7. Esitelmä. Wäittämä.

Jos kolmikulmassa joku kulma on kulmansa suuruinen toisessa kolmikulmassa, siwut toisten kulmain ympärillä molemmissa kolmikulmissa owat samassa suhteessa ja kolmannet kulmat joko teräwät taikka tylsät; niin kolmikulmat owat yhtäkulmaiset ja ne kulmat molemmissa yhtäsuuret, joiden ympärillä seisowat siwut owat toisiinsa werrannolliset.

Jos ∠E = ∠K, EA : AH = KI : IL ja kulmat H, L, owat joko teräwät eli tylsät; niin kolmikulmat EAH ja KIL owat yhtäkulmaiset ja ∠A = ∠I. Kolmikulmat owat siis myös mukaiset. h)

a. 23 Esit. 1.
e. 2 Seuraus
32 Esit. 1.
b. 4 Esit. 6.
i. 11 Esit. 5.
k. 9 Esit. 5.
l. 5 Esit. 5.
m. 1 Seuraus
13 Esit. 1.
n. 17 Esit. 1.

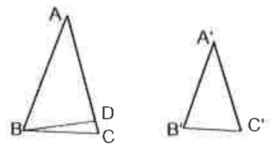
Ellei ∠A olisi = ∠I, niin kumpi hywänsä niistä olisi suurempi. Olkoon kulma A > ∠I. Pane pisteesen A siwun AE:n wiereen ∠EAM = ∠I. a)

Koska ∠E = ∠K ja ∠EAM tehtiin = ∠I, niin kolmas ∠AME = ∠L. e) Niinmuodoin on EA : AM = KI : IL. h) Mutta ehdotettiin, että EA : AH = KI : IL: sentähden EA : AM = EA : AH. i) Siis on AM = AH, k) ja ∠AMH = ∠AHM. l) Jos nyt ensiksi kulma H, samaten kuin kulma L, olisi teräwä, niin olisi myös ∠AMH teräwä ja siis ∠AME tylsä. m) Mutta ∠AME näytettiin olewan = L, joka on teräwä. Niinmuodoin taitaisi tylsä kulma olla teräwän suuruinen, joka on mahdotonta. Siis ∠A ei taida olla > ∠I, waan molemmmat täytywät olla yhtäsuuret ja myös kolmannet kulmat H ja L yhtäsuuret. e) — Jos taas ∠AHM, samaten kuin ∠L, olisi tylsä, niin olisi myös ∠AMH tylsä, ja niinmuo-

$\measuredangle DA'C'' = \measuredangle B'A'C''$ ja sen viereiset kyljet $A'D = A'B'$ ja yhteinen sivu $A'C''$, joten SKS-ehdon 1.4 nojalla $\triangle DA'C'' \cong \triangle B'A'C''$. Erityisesti vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten $\measuredangle A = \measuredangle DA'C'' = \measuredangle B'A'C''$ ja $\measuredangle C = \measuredangle A'C''D = \measuredangle A'B'C''$. Kulmasummalauseen 1.32 mukaan siis myös $\measuredangle B = \measuredangle B'$. □

Lause 6.7. *Jos kahdella kolmiolla on yhtä suuri kulma, ja jonkin toisen kulman viereiset sivut ovat verrannolliset, ja kolmannet kulmat ovat joko kummassakin kolmiossa teräviä tai eivät kummassakaan, niin myös ne kulmat ovat yhtä suuret, joiden viereiset sivut ovat verrannolliset (ja kolmiot ovat siis yhdenmuotoiset).*

Todistus. Olkoon $\measuredangle A = \measuredangle A'$ ja $AB : BC = A'B' : B'C'$ ja olkoon vielä kulmat $\measuredangle C$ ja $\measuredangle C'$ molemmat teräviä tai molemmat tylppiä. On osoitettava, että $\measuredangle B = \measuredangle B'$ (jolloin myös $\measuredangle C = \measuredangle C'$).
Jos $\measuredangle B \neq \measuredangle B'$, niin toinen on suurempi; olkoon $\measuredangle B > \measuredangle B'$. Siirretään kulma B' kärkeen B siten, että yhtenä kylkenä on siitä alkava puolisuora $\overrightarrow{BA}$ ja vapaa kylki on samalla puolella kuin piste C [1.23]; leikatkoon se sivua AC pisteessä D.

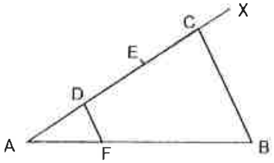


Koska $\measuredangle A = \measuredangle A'$ ja $\measuredangle ABD = \measuredangle B'$, niin $\measuredangle ADB = \measuredangle A'C'B'$ [1.32] ja siis KKK-lauseen 6.4 mukaan $\triangle ABD$ ja $\triangle A'B'C'$ ovat yhdenmuotoiset, erityisesti $AB : BD = A'B' : B'C'$. Oletettiin, että $A'B' : B'C' = AB : BC$, joten $AB : BD = AB : BC$ [5.11]. Siis on $BD = BC$ [5.9] eli kolmio $\triangle BCD$ on tasakylkinen, joten $\measuredangle BDC = \measuredangle C$ [1.5].
Jos $\measuredangle C$ ja $\measuredangle C'$ ovat teräviä, niin siis myös $\measuredangle BDC$ on terävä ja näin ollen $\measuredangle BDA$ tylppä [1.13]. Mutta $\measuredangle BDA = \measuredangle C'$, siis terävä. Tutkittava vaihtoehto on siis mahdoton. Oletuksen mukaan siis molemmat ovat tylppiä tai suoria, joten myös $\measuredangle BDC$ on tylppä tai suora, koska $\measuredangle BDC = \measuredangle C$. Kolmiossa $\triangle BCD$ on nyt vain yksi terävä kulma, mikä on ristiriidassa lauseen 1.17 kanssa ja siis myös mahdotonta. Alkuperäinen vastaoletus $\measuredangle B \neq \measuredangle B'$ on siis väärä. □

SEURAUS 2. *Normaali suorasta kulmasta hypotenuusalle on geometrinen keskiarvo hypotenuusan osista, siis $BD : AD = AD : DC$.*

TEHTÄVÄ 6.9. *Leikkaa annetusta janasta haluttu tasaosa.*

RATKAISU.



Olkoon annettuna jana AB, josta pitää leikata esimerkiksi kolmasosa. Valitaan jokin puolisuora AX, joka muodostaa puolisuoran AB kanssa kulman $\measuredangle XAB$. Valitaan puolisuoralta AX mielivaltainen piste $D \neq A$ ja leikataan janan AD jatkeeksi yhtä pitkät janat DE ja EC [1.3]. Piirretään suoran CB suuntainen suora pisteen D kautta [1.31]. Se leikkaa AB:n pisteessä, joka olkoon F.
Osoitetaan, että AF on kolmasosa janasta AB. Lauseen 6.2 mukaan $CD : DA = BF : FA$, josta yhdistämällä [5.18] saadaan $CA : DA = BA : FA$ ja edelleen vuorottamalla [5.16] $CA : BA = DA : FA$. Mutta CA on kolminkertainen DA, joten lauseen 5.15 toisen seurauslauseen mukaan myös BA on kolminkertainen AF, kuten pitääkin. Samalla tavalla leikataan mikä tahansa tasaosa janasta AB. □

TEHTÄVÄ 6.10. *Leikkaa annetusta janasta osa samassa suhteessa kuin annetun janan annettu osa.*

RATKAISU.
Olkoon leikattavana jana AB ja olkoon toinen annettu jana AC jaettu osiin pisteissä D ja E. Tehtävänä on löytää janan AB jakopisteet F ja G siten, että osat AF, FG ja GB suhtautuvat toisiinsa kuten AD, DE ja EC.


172

2 Seuraus. Kohtisuora wiiwa suoran kulman kärestä wastakkaiselle siwulle on keskimäinen kerto-jäsen wastakkaisen siwun molemmille osille. Se on: EI:IA = IA:III.

9. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka leikataan mikä osa hywänsä tietystä suorasta wiiwasta?

Olkoon AE tietty suora wiiwa, josta pitäisi leikata esim. kolmas osa.

Wedä A:sta suora wiiwa AX, joka tekee AE:n kanssa kulman. Leikkaa AX:stä kolme yhtäsuurta wiiwaa AH, HI ja IK perättäin, ja yhdistä EK; wedä myös H:sta suora wiiwa HL samaa suuntaa kuin EK.

Koska siis HL ja KE owat yhtäsuuntaiset, niin KH:AH = EL:LA, a) yhdistämällä KA:AH = EA:AL, e) ja wuorottamalla KA:EA = HA:AL. h) Mutta AK on kolmikertainen AH:sta, siis on myös AE kolmikertainen AL:stä, eli AL kolmas osa AE:stä. i) Samalla tawalla leikataan mikä osa hywänsä AE:stä.

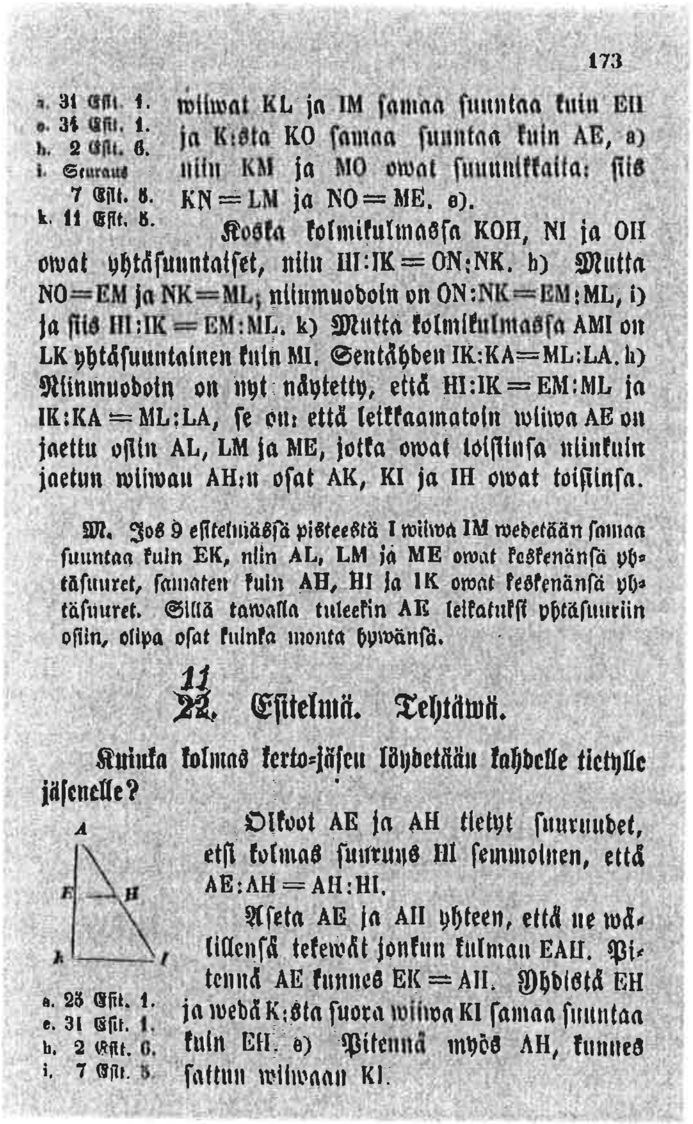
a. 2 Esit. 6.
e. 18 Esit. 5.
h. 16 Esit. 5.
i. 2 Seuraus 15 Esit. 5.

10. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka leikataan suora wiiwa osiin, jotka owat toisiinsa niinkuin leikatun suoran wiiwan osat toisiinsa?

Olkoon AE leikattawa suora wiiwa ja AH pisteissä K ja I leikattu suora wiiwa; leikattakoon AE osiin, jotka owat toisiinsa niinkuin AH:n osat AK, KI ja IH owat toisiinsa.

Tehköön AE ja AH kulman wälillensä. Yhdistä EH ja wedä pisteistä K ja I suorat



173

a. 31 Esit. 1. wiiwat KL ja IM samaa suuntaa kuin EH
e. 34 Esit. 1. ja K:sta KO samaa suuntaa kuin AE, a)
h. 2 Esit. 6. niin KM ja MO owat suunnikkaita: siis
i. Seuraus 7 Esit. 8. KN = LM ja NO = ME. e).
k. 11 Esit. 8. Koska kolmikulmassa KOH, NI ja OH owat yhtäsuuntaiset, niin HI:IK = ON:NK. h) Mutta NO = EM ja NK = ML; niinmuodoin on ON:NK = EM:ML, i) ja siis HI:IK = EM:ML. k) Mutta kolmikulmassa AMI on LK yhtäsuuntainen kuin MI. Sentähden IK:KA = ML:LA. h) Niinmuodoin on nyt näytetty, että HI:IK = EM:ML ja IK:KA = ML:LA, se on: että leikkaamatoin wiiwa AE on jaettu osiin AL, LM ja ME, jotka owat toisiinsa niinkuin jaetun wiiwan AH:n osat AK, KI ja IH owat toisiinsa.

M. Jos 9 esitelmässä pisteestä I wiiwa IM wedetään samaa suuntaa kuin EK, niin AL, LM ja ME owat keskenänsä yhtäsuuret, samaten kuin AH, HI ja IK owat keskenänsä yhtäsuuret. Sillä tawalla tuleekin AE leikatuksi yhtäsuuriin osiin, olipa osat kuinka monta hywänsä.

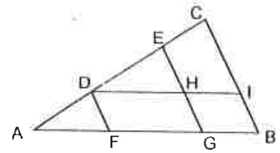
11
22. Esitelmä. Tehtäwä.

Kuinka kolmas kerto-jäsen löydetään kahdelle tietylle jäsenelle?

Olkoot AE ja AH tietyt suuruudet, etsi kolmas suuruus HI semmoinen, että AE:AH = AH:HI.

Aseta AE ja AH yhteen, että ne wälillensä tekewät jonkun kulman EAH. Pitennä AE kunnes EK = AH. Yhdistä EH
a. 23 Esit. 1. ja wedä K:sta suora wiiwa KI samaa suuntaa
e. 31 Esit. 1. kuin EH. e) Pitennä myös AH, kunnes
h. 2 Esit. 6.
i. 7 Esit. 5. sattuu wiiwaan KI.

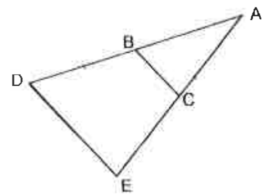
Voidaan olettaa, että C ei ole suoralla AB, vaan $\measuredangle CAB$ on kulma.



Piirretään suoran CB suuntaiset suorat pisteiden D ja E kautta [1.31]. Ne leikkaavat AB:n pisteissä, jotka olkoot F ja G. Piirretään lisäksi AB:n suuntainen pisteen D kautta; leikatkoon se GE:n pisteessä H ja BC:n pisteessä I.
Osoitetaan, että $CE : ED = BG : GF$ ja $DA : ED = FA : GF$.
Nelikulmiot $\square DFGH$ ja $\square HGBI$ ovat suunnikkaita, joten lauseen 1.34 mukaan $HD = GF$ ja $IH = BG$. Koska kolmiossa $\triangle CDI$ jana HE on sivun IC suuntainen, niin lauseen 6.2 mukaan $CE : ED = IH : HD$. Mutta $HD = GF$ ja $IH = BG$, joten $CE : ED = BG : GF$ [5.7].
Vastaavasti kolmiossa $\triangle AGE$ on $DA : ED = FA : GF$. □

TEHTÄVÄ 6.11. *On annettuna kaksi janaa. Konstruoi kolmas jana, jonka suhde jälkimmäiseen annetuista on sama kuin annettujen janojen suhde.*

RATKAISU.



Voidaan olettaa, että annetut janat alkavat samasta pisteestä A niin, että ne ovat AB ja AC ja $\triangle ABC$ on kolmio. Tehtävänä on löytää kolmas jana CE, jolle $AB : AC = AC : CE$.
Jatketaan janaa AB pisteen B yli pituuden AC verran pisteeseen D [1.3]. Piirretään suoran BC suuntainen suora pisteen D kautta [1.31]. Se leikkaa suoran AC pisteessä, joka olkoon E.