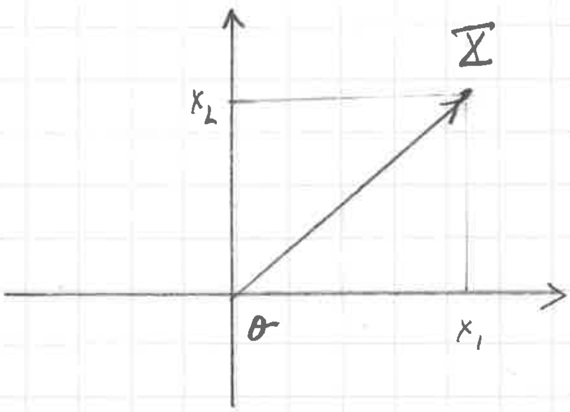
I Euklidista tasogeometriaa

0. Yleistä

Olkoon $\mathbb{R}$ reaalilukujen joukko. <u>Tasolla</u> tarkoitetaan karteesista tuloa

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

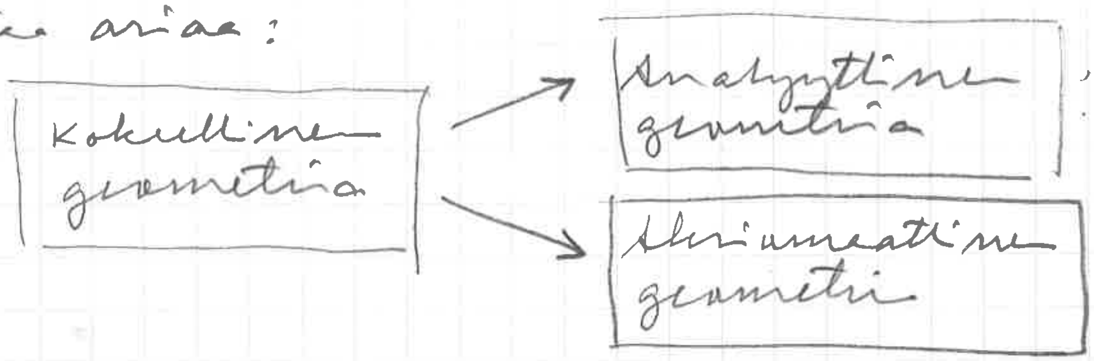
Tason alkioita $X = (x_1, x_2)$ kutsutaan <u>pisteiksi</u>. Piste on siis (tässä katsannossa) järjestetty lukupari, luvut x_1 ja x_2 ovat pisteen <u>koordinaatteja</u>.
Pistettä X voidaan kutsua myös <u>vektoriksi</u>. Voidaan sanoa, että lukupari (x_1, x_2) on pisteen X <u>paikkavektori</u>, jonka kantana on origo $O = (0,0)$. Tätä voidaan <u>havainnollistaa</u> tavanomaisella kuvalla.



Tässä <u>katsantotavassa</u> tai <u>lähestymistavassa</u> emme siis ajattele, että taso ja sen pisteet olisivat olemassa koordinaatistoista riippumattomalla tavalla. Meidän tällä kurssilla käyttämämme katsantotapa johtaa <u>analyyttiseen geometriaan</u>. Jälkimmäinen katsantotapa johtaa <u>aksiomaattiseen</u> <u>geometriaan</u>.

Nämä geometriat ovat loogiselta rakenteeltaan lähes täsmälleen vastakohtia, ne eroavat toisistaan kuin yö ja päivä. Aksiomaattisen geometrian perustana olevat aksioomat ovat analyyttisessä geometriassa lauseita, jotka voidaan todistaa oikeiksi.

Kolmas tapa lähestyä geometriaa on ympäristön havainnointi ja mittaaminen. Tämä on vielä luonnontiedettä ja näin parhaimmillaan esimatematiikkaa. Kaavio havainnollistaa asiaa:



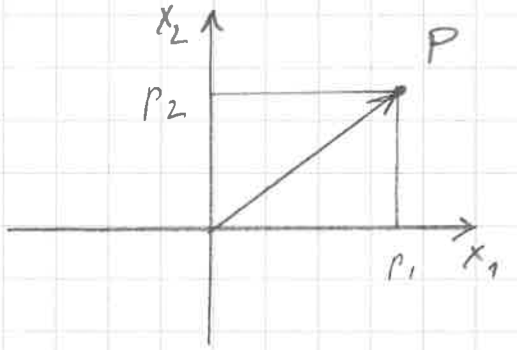
Kun puhutaan geometriasta, opiskellaan geometriaa tai opetetaan geometriaa, on koko ajan mietittävä, missä laatikossa ollaan. Yhden laatikon tuloksia ei voida käyttää toisen laatikon väitteen perustelemiseen. Aksiomaattisen geometrian aksioomeja ei voida todistaa oikeiksi tai vääriksi analyyttisen geometrian avulla. Ulkoisen maailman geometrisia ominaisuuksia ei voida päätellä aksiomaattisen tai analyyttisen geometrian avulla. Maailmankaikkeuden rakenne ei todellakaan ole analyyttisen geometrian pisteiden, suorien ja tasojen kaltainen. Jos tämän ymmärtää ja pitää mielessä, monet ongelmat geometrian opiskelussa tai opetuksessa poistuvat.

- tietokoneiden geometrian opetusohjelmat
- useampiulotteiset geometriat

[# I Euklidista tasogeometriaa]

1. Sisätulo

[Järjestetty lukupari (p_1, p_2) määrää täsmälleen yhden pisteen P tasossa $\mathbb{R}^2$. Luvut p_1 ja p_2 ovat pisteen P koordinaatteja.



Tämä voidaan kuvata yksi- tällä o. yleisesti.

Tavallisesti pari (p_1, p_2) voidaan tulkita pisteen P paikkavektoriksi, jonka kantana on origo $O = (0, 0)$.]

Sanoihin "piste" ja "vektori" liittyy hyvin erilaisia mielikuvia. Eo. mielessä nämä sanat ovat kuitenkin matemaattiselta sisällöltään synonyymejä. Voimme siis puhua pisteestä $P = (p_1, p_2)$ tai vektorista $P = (p_1, p_2)$. Monesti on tarkoituksenmukaista käyttää pistemerkinnässä suuria kirjaimia

$$P = (p_1, p_2), \quad X = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2)$$

ja vektorimerkinnässä pieniä

$$p = (p_1, p_2), \quad x = (x_1, x_2), \quad y = (y_1, y_2).$$

Vanhastaan tiedämme, että vektoreita voidaan laskea yhteen ja kertoa reaaliluvuilla

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$

$$cx = (cx_1, cx_2), \quad c \in \mathbb{R}.$$

Kahden vektorin sisätulo ("pistetulo") määritellään kaavalla

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

ja vektorin pituus eli normi kaavalla

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

Näiden laskutoimitusten perusominaisuudet ovat hyvin tuttuja. Seuraavat kaksi todistusta on kuitenkin aina syytä kerrata.

Cauchyn epäyhtälö. $|\langle x, y \rangle| \le |x|\,|y|$.

Todistus. Jos $|x||y| = 0$, on väite ilmeinen. Olkoon $|x| > 0$ ja $|y| > 0$. Tarkastellaan funktiota

$$f(t) = |x + ty|^2, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Selvästi $f(t) \ge 0$ ja $f(t) = 0$, jos ja vain jos $x = -ty$. Toisaalta $f(t)$ on t:n toisen asteen polynomi

$$f(t) = |x|^2 + 2t\langle x, y\rangle + t^2 |y|^2$$

$$= at^2 + 2bt + c \qquad a = |y|^2,\ b = \langle x, y \rangle,\ c = |x|^2$$

Koska $f(t) \ge 0$, on

$$4b^2 - 4ac \le 0$$

$$b^2 \le ac \quad \text{eli} \quad \langle x, y \rangle^2 \le |x|^2 |y|^2. \ \square$$

(1)

Huom: $|\langle x,y\rangle| = |x||y|$ jos ja vain jos $4b^2-4ac=0$. Tällöin polynomilla $f(t)$ on täsmälleen yksi nollakohta eli $x = t_0 y$ ~~jollakin~~ täsm. yhdellä $t_0 \in \mathbb{R}$.

Keksiminen ja todistaminen toimivat usein vastakkaisessa järj.

Kolmioepäyhtälö. $|x+y| \le |x| + |y|$.

Todistus. $$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = |x|^2 + 2\langle x,y\rangle + |y|^2$$
$$\underset{\text{Cauchy}}{\le} |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2$$
$$= (|x|+|y|)^2. \quad \square$$

Huom: $|x+y| = |x|+|y|$, jos ja vain jos $x = cy$, $c>0$.

Harj. teht.

[$\langle x,y\rangle = |\langle x,y\rangle| = |x||y|$ $\quad |x||y| \neq 0$

Tällöin siis $x = cy$ ja lisäksi $\langle cy, y\rangle = |\langle cy, y\rangle|$, mistä seuraa, että
$$c|y|^2 = |c||y|^2,$$
joten $c>0$.]

Havainnollisesti kuvalla tarkasteltuna

Sisätulo määrittelee tavan sekä etäisyyden että kulman suuruuden. Keskeinen Schwarzin epäyhtälö todistetaan toisen asteen yhtälön $at^2+2bt+c=0$ ratkaisukaavan
$$t = \frac{-2b \pm \sqrt{4b^2-4ac}}{2a}$$
avulla. Tällä on monenlaisia muunnelmia sekä matematiikassa tyypillisesti erilaisten kuvausten teoriassa kompleksianalyysissä.

Muuntelemalla sisätuloa voidaan muunnella geometriaa.

2. Euklidinen taso

Algebrallisesta kannalta katsottuna $\mathbb{R}^2$ on lineaariavaruus l. vektoriavaruus, jossa on määritelty sisätulo. Tämän sisätulon avulla saadaan tasoon $\mathbb{R}^2$ myös geometrinen rakenne. Lähtökohdaksi voidaan ottaa euklidinen etäisyys l. metriikka

$$d(P, Q) = |Q - P|, \quad P, Q \in \mathbb{R}^2.$$

Määritelmä 1. Metristä avaruutta $E^2 = (\mathbb{R}^2, d)$ kutsutaan euklidiseksi tasoksi.

Edellisen pykälän mukaisesti voimme puhua sekä vektoreista $v \in E^2$ että pisteistä $P \in E^2$. Vaikka niillä tarkoitetaan samaa asiaa, on eri nimitysten käyttö osoittautunut hyödylliseksi.

Määritelmä 2. Olkoon $v \in E^2 \setminus \{0\}$ vektori ja $P \in E^2$ piste. Joukkoa

$$[v] = \{tv \mid t \in \mathbb{R}\}$$

kutsutaan suunnaksi ja joukkoa

$$l = \{X \mid X - P \in [v]\}$$

pisteen P kautta kulkevaksi suoraksi, jonka suuntana on $[v]$. Merkitään lyhyesti

$$l = P + [v].$$

Jos P ja Q ovat kaksi eri pistettä, niin niiden kautta kulkee (~~täsmälleen yksi~~) suora

$$\overleftrightarrow{PQ} = P + [Q-P] = \{ \bar{X} \mid \bar{X} - P \in [Q-P] \}.$$

Tästä saadaan

$$\bar{X} - P = t(Q-P), \quad \bar{X} = P, \text{ kun } t = 0; \quad \bar{X} = Q, \text{ kun } t = 1$$

$$\bar{X} = P + t(Q-P) = (1-t)P + tQ, \quad t \in \mathbb{R}.$$

$\bar{X} - Q = (1-t)(P-Q)$

Havaitaan, että $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$. Täydellisyyden vuoksi todistetaan suoran yksikäsitteisyys:

<u>Lause 1.</u> Olkoon $l = R + [v]$ jokin pisteiden P ja Q kautta kulkeva suora. Silloin $l = \overleftrightarrow{PQ}$. (Ts. kahden eri pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora.)

Todistus. Koska $P \in l$, $Q \in l$ ja $P \neq Q$, on

$$P = R + t_1 v \text{ ja } Q = R + t_2 v$$

Harj. tehtävä

joillekin $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, $t_1 \neq t_2$. Silloin

$$v = \frac{1}{t_2 - t_1}(Q-P),$$

joten $[v] = [Q-P]$. Koska $R = P - t_1 v$, on

$$l = R + [v] = P - t_1 v + [v] = P + [v]$$

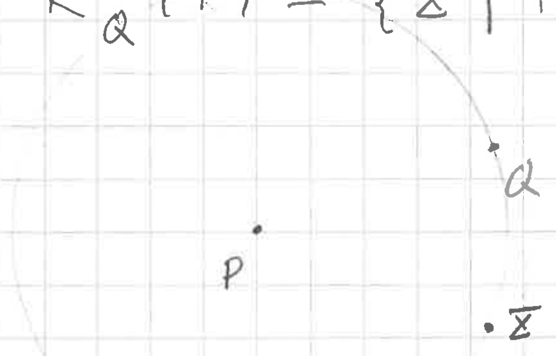
$$= P + [Q-P] = \overleftrightarrow{PQ}. \ \square$$

Kaksi suoraa voi siis leikata toisensa korkeintaan yhdessä pisteessä. Suoria, jotka leikkaavat toisensa samassa pisteessä P, sanotaan <u>konkurrenteiksi</u>. Pisteitä, jotka ovat samalla suoralla l, kutsutaan <u>kollineaarisiksi</u>.

Viivoittimella tarkoitetaan toimintaa, joka liittää kahteen pisteeseen P ja Q suoran $\overline{PQ}$.

Harpilla tarkoitetaan toimintaa, joka liittää kahteen pisteeseen P ja Q ympyrän

$$K_Q(P) = \{ X \mid |X-P| = |Q-P| \}$$



$K_Q(P)$

kehäpiste

keskipiste

$r = |Q-P|$

$$K_r(P) = \{ X \mid |X-P| = r \}$$

säde

Huom: jos r ja P vaihtavat paikkaa

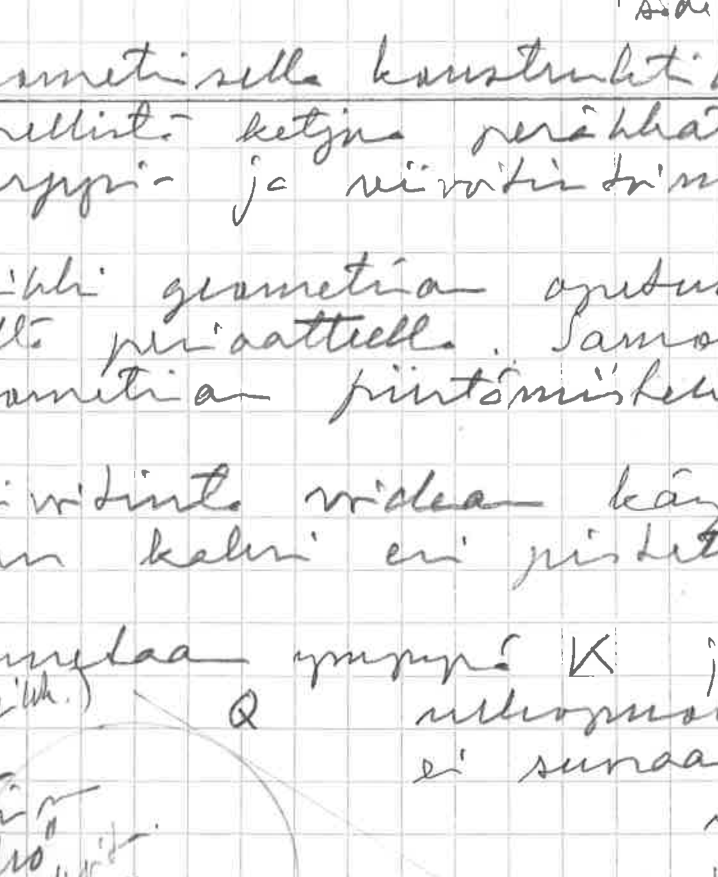
Geometrisella konstruktiolla tarkoitetaan äärellistä ketjua peräkkäin suoritettavia harppi- ja viivoitintoimintoja.

Kaikki geometrian opetusohjelmat toimivat tällä periaatteella. Samoin kaikki koulugeometrian piirtämistehtävät.

Viivoitinta voidaan käyttää vain silloin, kun kaksi eri pistettä on annettu.

Esim. Annetaan ympyrä K ja piste P sen ulkopuolelta. Viivoittimella ei suoraan voida piirtää ympyrälle tangenttia, joka kulkee pisteen P kautta. Ensin on jollakin tavalla etsittävä sivuamispiste ja vasta sitten tangentti voidaan piirtää.

(kreikk.) Thales n. 600 eKr. "Ensimmäinen matemaatikko" todisti teoreemoja. Tieteen historiassa



Lause 2. Olkoot P, Q ja $\bar{X}$ kolme ei pistettä ja $t \in \mathbb{R}$. Silloin

$$(*)\begin{cases} d(\bar{X}, P) = |t|\, d(P, Q) \text{ ja} \\ d(Q, \bar{X}) = |1-t|\, d(P, Q) \end{cases}$$

jos ja vain jos $\bar{X} = P + t(Q-P)$. (jolloin $\bar{X} \in \overleftrightarrow{PQ}$)

Todistus. Jos $\bar{X} = P + t(Q-P)$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, niin yhtälöt $(*)$ ovat voimassa.

Oletetaan käänteisesti, että yhtälöt $(*)$ ovat voimassa jollakin $t \in \mathbb{R}$. Tapaukset $t = 0$ ja $t = 1$ ovat ilmeisiä.

Harj. teht.

1. Olkoon $0 < t < 1$. Silloin

$$|P - \bar{X}| + |\bar{X} - Q| = d(\bar{X}, P) + d(Q, \bar{X}) =$$

$$(t + 1 - t)\, d(P, Q) = |P - Q|.$$

Koska kolmioepäyhtälössä on voimassa yhtäsuuruus, on

$$P - \bar{X} = c(\bar{X} - Q) \quad \text{jollakin } c > 0.$$

Lisäksi

$$c = \frac{|P - \bar{X}|}{|\bar{X} - Q|} = \frac{t}{1-t},$$

joten $(1-t)(P - \bar{X}) = t(\bar{X} - Q)$, mistä

$$\bar{X} = P + t(Q - P).$$

2. Jos $t > 1$, havaitaan että

$$|Q - P| + |\bar{X} - Q| = |\bar{X} - P|,$$

mistä väite seuraa samalla tavalla kuin kohdassa 1.

Harj. teht.

1. vko 2005

6/a 6''

3. Jos $t < 0$, niin vastaavasti

$$|P-\bar{X}| + |Q-P| = |Q-\bar{X}|. \qquad \square$$

Määritelmä 3. Olkoot P, Q ja $\bar{X}$ kolme eri pistettä. Piste $\bar{X}$ on pisteiden P ja Q välissä, jos

$$(*) \qquad d(P,\bar{X}) + d(\bar{X},Q) = d(P,Q).$$

Lause 3. Piste $\bar{X}$ on pisteiden P ja Q välissä, jos ja vain jos ($\bar{X} \in \overleftrightarrow{PQ}$ ja)

$$(**) \qquad \bar{X} = (1-t)P + tQ \quad \text{jollakin } 0 < t < 1.$$
$$= P + t(Q-P)$$

— 1. viikko

Todistus. Oletetaan ensin, että $(**)$ pätee. Silloin

$$d(P,\bar{X}) = |\bar{X}-P| = t\,|Q-P| = t\,d(P,Q),$$

$$d(\bar{X},Q) = |Q-\bar{X}| = (1-t)|Q-P| = (1-t)\,d(P,Q),$$

joten $(*)$ on voimassa.

Oletetaan kääntäen, että $(*)$ pätee. Olkoon

$$t = \frac{d(P,\bar{X})}{d(P,Q)}.$$

Silloin $0 < t < 1$, joten $t = |t|$, $(1-t) = |1-t|$ ja

$$\begin{cases} d(P,\bar{X}) = |t|\,d(P,Q) \\ d(\bar{X},Q) = |1-t|\,d(P,Q). \end{cases}$$

Lauseen 2 nojalla $(**)$ on voimassa. $\square$

Huom. Jos Määritelmässä 3 metriikka d korvataan taksiautoetäisyydellä d_T

$$d_T(P,Q) = |q_1 - p_1| + |q_2 - p_2|,$$

$P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$, eivät Lauseet 2 ja 3 ole enää voimassa.

Arko 07

Korollaari 1. Olkoot P, Q ja R kolme eri kollineaarista pistettä. Silloin niistä täsmälleen yksi on kahden muun välissä. □

Korollaari 2. Olkoon P ja Q kaksi eri pistettä. Silloin suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$ on pisteitä X, Y ja Z, joille

P on pisteiden X ja Q välissä,
Y on pisteiden P ja Q välissä,
Q on pisteiden P ja Z välissä! □

Määritelmä 4. Olkoot P ja Q kaksi eri pistettä. Janalla PQ tarkoitetaan joukkoa, joka koostuu pisteistä P ja Q sekä kaikista näiden välissä olevista pisteistä.

Lauseesta 3 seuraa:

Lause 4. $PQ = \{X \mid X = (1-t)P + tQ,\ 0 \le t \le 1\}$. □

Lisäksi havaitaan, että $PQ = QP$.

Määritelmä 5. Olkoot P, Q ja M kolme eri pistettä. Piste M on janan PQ keskipiste, jos

$$d(P,M) = d(M,Q) = \frac{1}{2} d(P,Q).$$

Lause 5. Piste M on janan PQ keskipiste, jos ja vain jos M (on pisteiden P ja Q välissä ja) $M = \frac{1}{2}(P+Q)$.

Todistus. Lauseet 2 ja 3. □

3. Kohtisuoruudesta

Määritelmä 1. Vektorit v ja w ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos $\langle v, w \rangle = 0$. Tällöin merkitään $v \perp w$.

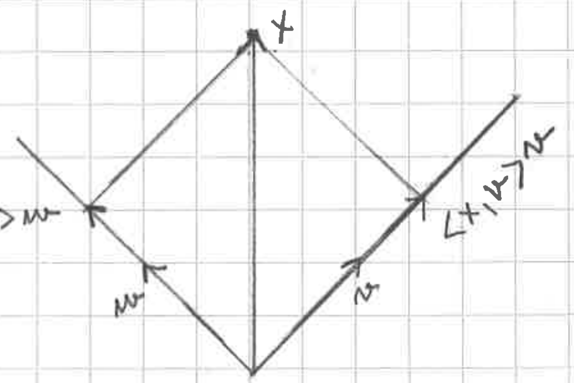
Jos $v \perp w$, niin myös $w \perp v$. Jos $v = (v_1, v_2)$ ja $v^\perp = (-v_2, v_1)$, niin $v \perp v^\perp$ ja $|v| = |v^\perp|$. Jos $|v| = 1$, niin v on yksikkövektori. Jos v ja w ovat yksikkövektoreita ja $v \perp w$, niin $\{v, w\}$ on ortonormaali pari.

Jos $|v| = 1$, niin $\{v, v^\perp\}$ on ortonormaali pari. Lisäksi $v^{\perp\perp} = -v$. [Todistamatta otamme käyttöön seuraavan lineaarialgebrasta tutun lauseen:]

9' →

Lause 1. Olkoon $\{v, w\}$ ortonormaali pari ja $x \in E^2$. Silloin

$$x = \langle x, v \rangle v + \langle x, w \rangle w. \quad \square$$

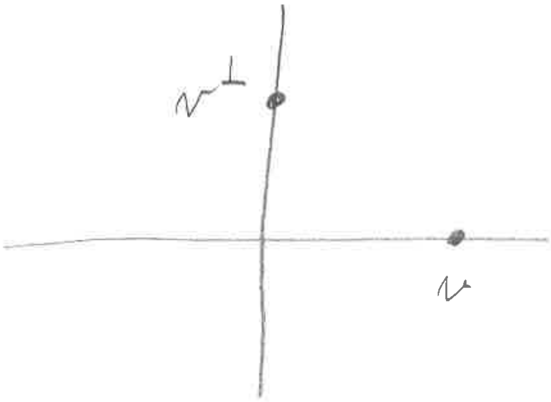


19.1.2005

Olkoon $l = P + [v]$ suora. Silloin v on l:n suuntavektori ja $v^\perp$ sen normaalivektori. Olkoon $l = Q + [w]$ toinen esitys samalle suoralle l. Silloin on olemassa reaaliluku $t \neq 0$ siten, että (harjoitustehtävä)

$$w = tv \text{ ja } w^\perp = tv^\perp.$$

Tavallisin ortonormaalipari on
$v = (1, 0)$, $v^\perp = (0, 1)$ eli tavallinen tason kanta.



Olk. $P = (p_1, p_2)$ piste. Silloin

$$P = (p_1, 0) + (0, p_2),$$

joten $p_1 v + p_2 v^\perp$.

Lisäksi
$$\langle P, v \rangle = p_1 \cdot 1 + p_2 \cdot 0 = p_1$$
$$\langle P, v^\perp \rangle = p_1 0 + p_2 1 = p_2$$

Siis

$$P = \langle P, v \rangle v + \langle P, v^\perp \rangle v^\perp.$$

Tod (Lause 1) Lineaarialgebrasta tiedetään, että $\{v, w\}$ on tason kanta. Silloin on olemassa reaaliluvut λ ja μ s.e.

$$x = \lambda v + \mu w,$$

joten

$$\langle x, v \rangle = \lambda \langle v, v \rangle + \mu \langle v, w \rangle.$$

$|v| = 1 \Rightarrow \langle v, v \rangle = |v|^2 = 1.$
$v \perp w \Rightarrow \langle v, w \rangle = 0.$ Siis $\lambda = \langle x, v \rangle$.
Vast. $\mu = \langle x, w \rangle$. □

Lause 2. Olkoon P piste ja $N \neq 0$ vektori. Silloin

$$\{ \bar{X} \mid \langle \bar{X} - P, N \rangle = 0 \}$$

on pisteen P kautta kulkeva suora, jonka normaali on N.

Todistus. Voidaan olettaa, että $|N| = 1$. Olkoon $v = N^{\perp}$. Silloin $\{v, N\}$ on ortonormaali pari, joten (Lause 1)

$$\bar{X} - P = \langle \bar{X} - P, v \rangle v + \langle \bar{X} - P, N \rangle N$$

kaikille $\bar{X} \in \mathbb{E}^2$. Riittää näyttää, että $\bar{X} - P = tv$ jollakin $t \in \mathbb{R}$, jos ja vain jos $\langle \bar{X} - P, N \rangle = 0$.
Jos $\bar{X} - P = tv$, niin $\langle \bar{X} - P, N \rangle = t \langle v, N \rangle = 0$.
Jos kääntäen $\langle \bar{X} - P, N \rangle = 0$, niin $\bar{X} - P = tv$, $t = \langle \bar{X} - P, v \rangle$. □

xy-taso

x ja y muuttujina
Lisää: koordinaatti[illegible]

Korollaari. Olkoot a, b ja c kolme reaalilukua. Silloin $l = \{(x, y) \mid ax + by + c = 0\}$ on

(i) tyhjä joukko, jos $a = b = 0$, $c \neq 0$,
(ii) koko taso, jos $a = b = c = 0$,
(ii) suora, jonka normaali on $N = (a, b)$, jos $a^2 + b^2 > 0$.

Todistus. Tapaukset (i) ja (ii) ovat selviä. Olkoon $a^2 + b^2 > 0$. Silloin $l \neq \emptyset$, koska

$$\left(-\frac{c}{a}, 0\right) \in l, \quad \text{jos } a \neq 0,$$

$$\left(0, -\frac{c}{b}\right) \in l, \quad \text{jos } b \neq 0.$$

Olkoon $P = (x_1, y_1) \in l$. (Tässä tarvitaan tietoa $l \neq \emptyset$.) Silloin $c = -(ax_1 + by_1)$ ja $ax + by + c = 0$, jos ja vain jos

$$a(x - x_1) + b(y - y_1) = 0. \quad \square$$

n. 500 eKr   100 [illegible]

Kahden suoran l ja m on kohtisuorassa toisiaan vastaan, jos niiden suuntavektorit ovat toisiaan vastaan kohtisuorassa. Tällöin merkitään $l \perp m$. Suorat l ja m ovat toistensa normaaleja.

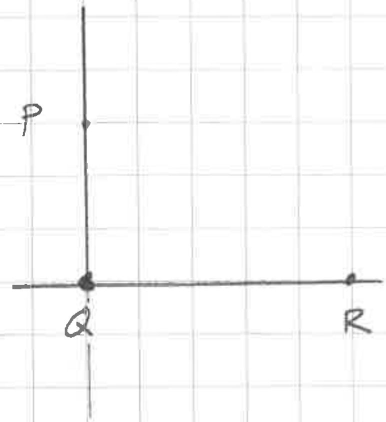
Lause 3 (Pythagoras). Olkoot P, Q ja R kolme eri pistettä. Tällöin

(*) $\quad |R-P|^2 = |Q-P|^2 + |R-Q|^2$

jos ja vain jos $\overleftrightarrow{QP} \perp \overleftrightarrow{RQ}$.

x, y merkitsevät tässä vektoreita

Todistus. Merkitään



$$x = Q - P, \quad y = R - Q.$$

Silloin $x + y = R - P$. Lisäksi

$|x+y|^2 = \langle x+y, x+y \rangle =$

$\langle x, x \rangle + 2\langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle =$

$|x|^2 + 2\langle x, y \rangle + |y|^2$.

Näin ollen (*) pätee, jos ja vain jos

$$\langle x, y \rangle = \langle Q-P, R-Q \rangle = 0$$

eli $\overleftrightarrow{QP} \perp \overleftrightarrow{RQ}$. □

Lause 4. Jos $l \perp m$, niin suorat l ja m leikkaavat toisensa.

19.1.06

Todistus. Koska $l \neq m$, on suorilla l ja m korkeintaan yksi yhteinen piste. Valitaan esitykset

$$l = P + [v] \quad \text{ja} \quad m = Q + [w]$$

siten, että $\{v, w\}$ on ortonormaali pari.

Silloin (Lause 1)

$$P-Q = \langle P-Q, v\rangle v + \langle P-Q, w\rangle w.$$

Olkoon

$$F = P - \langle P-Q, v\rangle v = Q + \langle P-Q, w\rangle w.$$

Silloin $F \in l \cap m$. □

– 11' – 15h

Lause 5. Olkoon Q piste ja $l = P+[v]$ suora. Silloin pisteen Q kautta kulkee täsmälleen yksi suoran l normaali m. Lisäksi on voimassa:

(i) $m = Q + [N]$, missä N on suoran l yksikkönormaalivektori.

(ii) l ja m leikkaavat pisteessä $F = Q + \langle P-Q, N\rangle N$

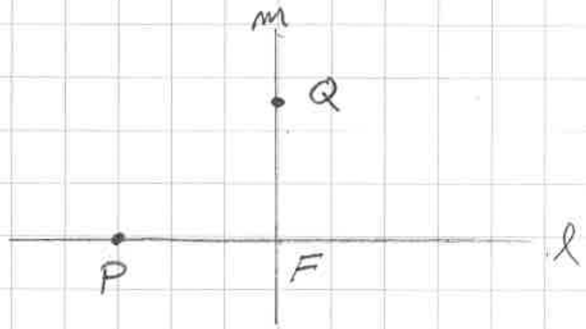
(iii) $d(Q, F) = |\langle Q-P, N\rangle|$. □

Lause 6. Olkoon l suora, Q sen ulkopuolella oleva piste, m pisteen Q kautta kulkeva l:n normaali ja F suorien l ja m leikkauspiste. Silloin

$$d(P, Q) \geq d(F, Q) \quad \text{kaikille } P \in l.$$

Todistus. Pythagoraan lauseen nojalla on

$$d(P,Q)^2 = d(P,F)^2 + d(F,Q)^2.$$



Näin ollen $d(P, Q) \geq d(F, Q)$ kaikille $P \in l$. □

Huom. $d(P, Q) = d(F, Q)$ jos ja vain jos $P = F$.

Määritelmä 2. $d(Q, l) = d(F, Q)$ on pisteen Q etäisyys suorasta l.

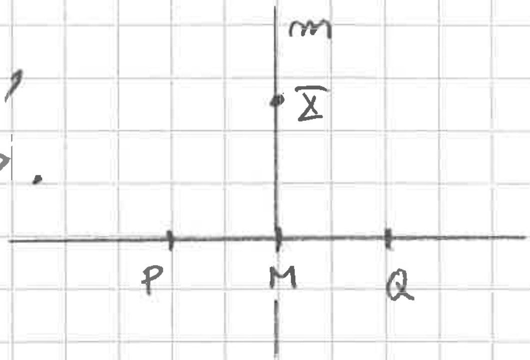
Huom. $d(Q, l) = |\langle Q-P, N\rangle|$ kaikille $P \in l$. (Lause 5 (ii)) ③

Määritelmä 3. Olkoon M janan PQ keskipiste. Pisteen M kautta kulkevaa suoran $\overleftrightarrow{PQ}$ normaalia kutsutaan janan PQ keskinormaaliksi.

Lause 7. Janan keskinormaali on niiden pisteiden ura, jotka ovat yhtä kaukana janan päätepisteistä.

Todistus. Olk. $\bar{X} \in E^2$. Olkoon $m = M + [w]$ suora janan PQ keskipisteen $M = \frac{1}{2}(P+Q)$ kautta siten, että $\bar{X} \in m$. Silloin

$$(*)\begin{cases} |\bar{X}-P|^2 = |\bar{X}|^2 + |P|^2 - 2\langle \bar{X}, P\rangle, \\ |\bar{X}-Q|^2 = |\bar{X}|^2 + |Q|^2 - 2\langle \bar{X}, Q\rangle. \end{cases}$$



Suora m on janan PQ keskinormaali, jos ja vain jos $w \perp P-Q$.
Näin ollen $\bar{X}$ on janan PQ keskinormaalilla, jos ja vain jos

$$0 = \langle \bar{X}-M, P-Q\rangle = \langle \bar{X} - \tfrac{1}{2}(P+Q), P-Q\rangle.$$

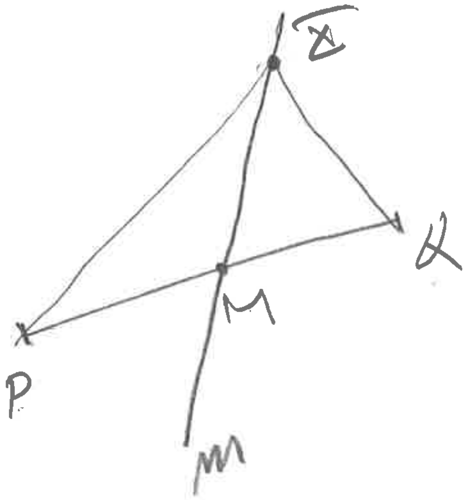
Tämä toteutuu, jos ja vain jos

$$2\langle \bar{X}, P-Q\rangle = \langle P+Q, P-Q\rangle = |P|^2 - |Q|^2.$$

Toisaalta $|\bar{X}-P|^2 - |\bar{X}-Q|^2 = 0$ jos ja vain jos ((*):n perusteella)

$$|P|^2 - |Q|^2 - 2\langle \bar{X}, P-Q\rangle = 0$$

eli jos ja vain jos $\bar{X}$ on janan PQ keskinormaalilla. □



Lauseen 7 todistus:

Annetaan jana PQ

Olkoon $M = \frac{1}{2}(P+Q)$
janan PQ keskipiste.

Olkoon $X \in E^2$ mieliv. piste.

Merk. $m = \overleftrightarrow{MX} = M + [X - M]$.

$|X-P|^2 = \langle X-P, X-P \rangle$

Silloin

$$(*)\begin{cases} |X-P|^2 = |X|^2 + |P|^2 - 2\langle X, P\rangle \\ |X-Q|^2 = |X|^2 + |Q|^2 - 2\langle X, Q\rangle. \end{cases}$$

Tarkastellaan kahta ehtoa:

(**) X on janan keskinormaalilla

(***) X on yhtä etäällä P:stä ja Q:sta.

On näytettävä, että (**) $\Longleftrightarrow$ (***).

1) (**) $\Longleftrightarrow$
[m on janan PQ keskinormaali] $\Longleftrightarrow$

$\langle X - M, P - Q \rangle = 0 \Longleftrightarrow$

$\langle X - \frac{1}{2}(P+Q), P - Q \rangle = 0 \Longleftrightarrow$

$$\langle 2\overline{X} - (P+Q), P-Q \rangle = 0 \iff$$

$$\langle 2\overline{X}, P-Q \rangle - \langle P+Q, P-Q \rangle = 0 \iff$$

$$\langle 2\overline{X}, P-Q \rangle - |P|^2 + |Q|^2 = 0.$$

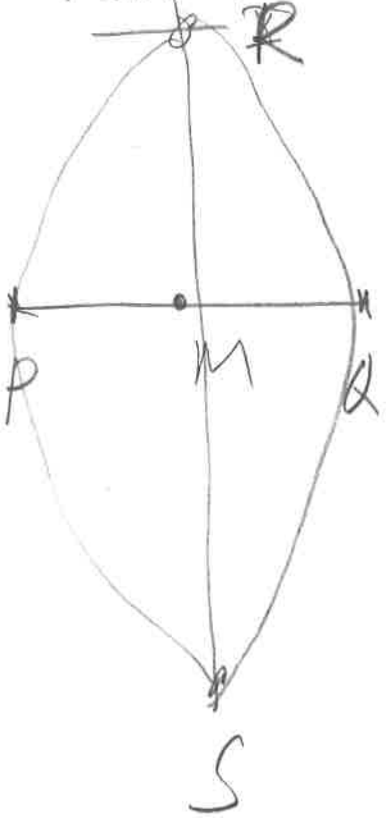
2) $(***) \iff$

$$|\overline{X} - P|^2 - |\overline{X} - Q|^2 = 0 \overset{(*)}{\iff}$$

$$|P|^2 - |Q|^2 - 2\langle \overline{X}, P-Q \rangle = 0$$

Sin $(**) \iff (***)$. $\square$

Sovellutus: ~~Jana~~ Annettu jana PQ on jaettava harpin ja viivoittimen avulla kahteen yhtä suureen osaan.



Piirretään ympyrät

keskipiste

$K_Q(P)$ ja

$K_P(Q)$

Ne leikkaavat kahdessa pisteessä R ja S, jotka ovat PQ:n keskinormaalilla m.
~~(sillä keskinormaalille ...)~~
(Lause 7)

Piirretään suora RS = m. Se leikkaa janan PQ ~~etsittyyn~~ sen keskipisteessä M. Piste N täyttää vaaditun ehdon.

4. Yhdensuuntaiset suorat

Määritelmä 1. Kahta eri suoraa l ja m, jotka eivät leikkaa toisiaan, sanotaan yhdensuuntaisiksi. Tällöin merkitään $l \parallel m$.

Lause 1. Suorat $l = P + [v]$ ja $m = Q + [w]$ ovat yhdensuuntaiset, jos ja vain jos $l \neq m$ ja $[v] = [w]$.

Todistus. Oletetaan ensin, että l ja m ($l \neq m$) leikkaavat pisteessä F. Silloin $l = F + [v]$ ja $m = F + [w]$. Koska $l \neq m$, on $[v] \neq [w]$, vrt. Lause 2.1.

14' Oletetaan kääntäen, että $[v] \neq [w]$. Jos $P = Q$, niin $l \nparallel m$. Oletetaan, että $P \neq Q$. Koska $[v] \neq [w]$ on joukko $\{v, w\}$ lineaarisesti riippumaton. Lineaarialgebran perustulosten nojalla on olemassa $t, s \in \mathbb{R}$, joille $P - Q = tv + sw$. Näin ollen $P - tv = Q + sw \in l \cap m$, joten $l \nparallel m$. □

07 2.vko Korollaari: Jos suora leikkaa toisen kahdesta yhdensuuntaisesta suorasta, niin se leikkaa toisenkin.

Todistus. Olkoot $l = P + [v]$ ja $m = Q + [v]$ kaksi yhdensuuntaista suoraa. Oletetaan, että suora $n = R + [w]$ leikkaa suoran l. Silloin $n \nparallel l$, joten $[v] \neq [w]$.
Antiteesi: Suorat n ja m eivät leikkaa. Silloin $n \parallel m$, joten $[v] = [w]$. Ristiriita. □

Lauseesta 1 seuraa yhtä helposti myös seuraava lause:

Lause 4.1 Tod.

1. Oletetaan, että $l \parallel m$. Silloin $l \neq m$.

Antitesi: $[v] \neq [w]$.

Koska $l \parallel m$, on $P \neq Q$.

Koska $[v] \neq [w]$, on jonukko $\{v, w\}$ lineaarisesti riippumaton. Silloin on olemassa $t, s \in \mathbb{R}$, joille (vrt. Lause 3.1.)

$$P - Q = tv + sw.$$

Silloin $P - tv = Q + sw \in l \cap m$, joten $l \nparallel m$. R.R.

2. Oletetaan, että $l \neq m$ ja $[v] = [w]$

Antitesi: $l \nparallel m$

Silloin suorat leikkaavat (täsmälleen yhdessä) pisteessä $F \in l \cap m$.

Siis $l = F + [v]$ ja $m = F + [w]$, joten $l = m$. R.R.

Lause 2. (i) Jos $l \parallel m$ ja $m \parallel n$, niin joko $l = n$ tai $l \parallel n$.
(ii) Jos $l \parallel m$ ja $m \perp n$, niin $l \perp n$.
(iii) Jos $l \perp m$ ja $m \perp n$, niin joko $l = n$ tai $l \parallel n$.

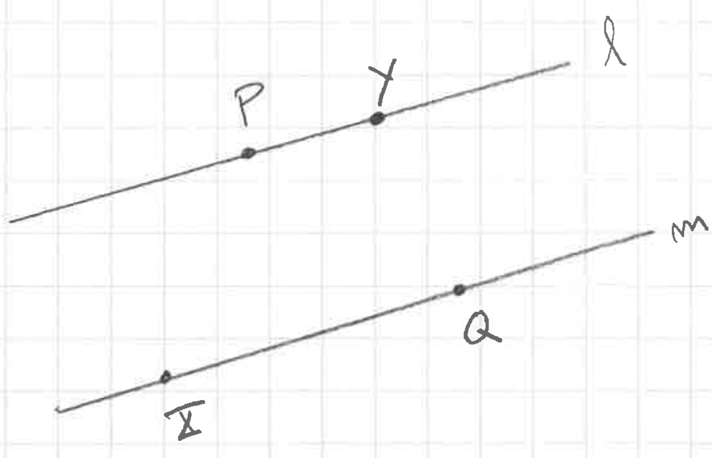
Todistus. (iii) Olkoon $l = P + [v]$, $m = Q + [w]$ ja $n = R + [u]$. Koska $l \perp m$, on $[w] = [v^{\perp}]$. Koska $m \perp n$, on $[u] = [w^{\perp}] = [v^{\perp\perp}] = [v]$. □

Lause 3. Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi tämän suoran suuntainen suora.

Todistus. Olkoon $l = P + [v]$ ja $Q \notin l$. Olkoon $m = Q + [v]$. Silloin $m \neq l$, joten $m \parallel l$ (Lause 1).
Olkoon kääntäen m suora, jolle $m \parallel l$ ja $Q \in m$. Silloin $m = Q + [v]$ (Lause 1). □

Lause 4. Olkoon $l \parallel m$. Luku $d(\bar{X}, l)$ on riippumaton pisteen $\bar{X} \in m$ valinnasta ja vastaavasti luku $d(Y, m)$ on riippumaton pisteen $Y \in l$ valinnasta. Lisäksi nämä luvut ovat yhtäsuuria.

Todistus. Olkoot $l = P + [v]$, $m = Q + [v]$ ja N suorien l ja m yhteinen yksikkönormaalivektori (Lause 1). Olkoot $\bar{X} = Q + t_1 v \in m$ ja $Y = P + t_2 v \in l$. Silloin (Lause 3.5 ja Määritelmä 3.2)



$$d(\bar{X}, l) = |\langle \bar{X} - P, N \rangle|$$
$$= |\langle Q - P + t_1 v, N \rangle|$$
$$= |\langle Q - P, N \rangle + t_1 \langle v, N \rangle| = |\langle Q - P, N \rangle|.$$

Vastaavasti $d(Y, m) = |\langle P-Q, N\rangle| = |\langle Q-P, N\rangle|$. (4) $\square$

Pisteistä $X \in m$ ja $Y \in l$ riippumatonta lukua

$$d(l, m) = d(X, l) = d(Y, m)$$

kutsutaan yhdensuuntaisten suorien l ja m <u>välimatkaksi</u>. Kaksi yhdensuuntaista suoraa on siis joka kohdassa yhtä etäällä toisistaan.

Eukleideen Alkeet

5. Yhtenevyys ja isometriat

Määritelmä 1. Kuvausta $T: E^2 \to E^2$ sanotaan *isometriaksi*, jos

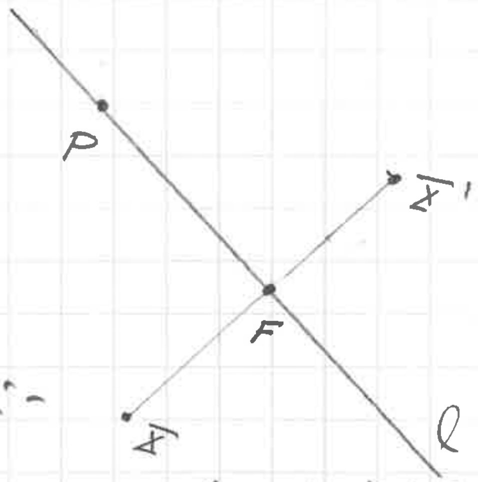
$$d(T(X), T(Y)) = d(X, Y)$$

kaikille $X, Y \in E^2$.

Isometria säilyttää siis pisteiden väliset etäisyydet. Isometria on siis injektio.

Perusisometria on ~~Ensimmäinen isometria tarkastelemme~~ peilaus ~~X~~ eli symmetria annetun suoran l suhteen.

17' Pisteitä X ja X' sanotaan (akselisesti) *symmetrisiksi* suoran l suhteen, jos ~~[jana XX' keskipiste~~



$$\cancel{F = \tfrac{1}{2}(X + X')}$$

4.2.2004

~~on myös pisteestä X suoralle l piirretyn normaalin kantapiste, ts. jos $l \perp \overleftrightarrow{XX'}$ ja $F \in l$.~~] (Suora l on janan XX' keskinormaali.)

Olkoon $l = P + [v]$ ja N suoran l yksikkönormaalivektori. Lauseen 3.5 kohdan (ii) perusteella on silloin

$$F = \tfrac{1}{2}(X + X') = X + \langle P - X, N \rangle N.$$

Tästä saadaan

$$X' = X - 2\langle X - P, N \rangle N.$$

Havaitaan, että X' ei riipu pisteen $P \in l$ valinnasta.

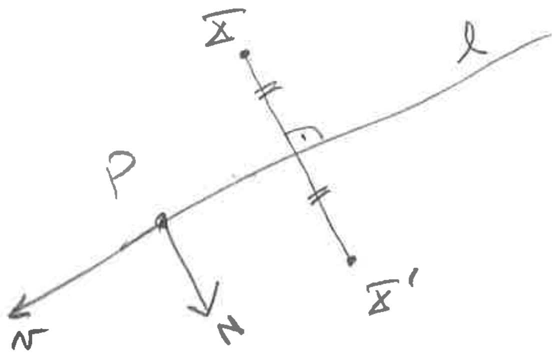
5.2.2014

Pyritään muodostamaan pisteen $\bar{X}$ symmetrinen piste l. peilikuva suoran $l = P + [v]$ suhteen. eli $l = \{\bar{X} \mid \langle \bar{X} - P, N \rangle 0\}$

$$N = \frac{v^{\perp}}{|v|}$$

(Lause 3.2)

1) Havainnollinen



$\left(\begin{array}{l} v = (1,0) \\ N = (0,1) \end{array} \right)$

2) Verbaalinen: Suora l on janan $\bar{X}\bar{X}'$ keskinormaali $\Rightarrow$ janan $\bar{X}\bar{X}'$ keskipiste ~~$F = \frac{1}{2}(\bar{X} + \bar{X}')$~~ on suoralla l ja suorat $\overleftrightarrow{X\bar{X}'}$ ja l ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan $\Rightarrow$ janan $\bar{X}\bar{X}'$ keskipiste on pisteen $\bar{X}$ suoralle l piirretyn normaalin kantapiste. Nyt muistetaan Lause 3.5

3) Lauseke (abstrahointi): Halutaan ~~Lasketaan~~ $\bar{X}'$:lle esitys $\bar{X}$:n ja suoran l yhtälön avulla.

Janan $\bar{X}\bar{X}'$ keskipiste on $F = \frac{1}{2}(\bar{X} + \bar{X}')$
Normaalin kantapiste (Lause 3.5.(ii)) on $\bar{X} + \langle P - \bar{X}, N \rangle N$, missä N on l:n yksikkönormaalivektori. Siis

$$\frac{1}{2}(\bar{X} + \bar{X}') = \bar{X} + \langle P - \bar{X}, N \rangle N ,$$
$$= \bar{X} - \langle \bar{X} - P, N \rangle N$$

joten

$$\bar{X}' = \bar{X} - 2\langle \bar{X} - P, N \rangle N$$

24.1.07

Määritelmä 2. Kuvausta $\Omega_l : E^2 \to E^2$,

$$\Omega_l(\bar{X}) = \bar{X} - 2\langle \bar{X} - P, N\rangle N$$

kutsutaan peilaukseksi suoran l suhteen.

26.1.06 Lause 1. Peilaus Ω_l on isometria.

Todistus. Koska $\Omega_l(\bar{X}) - \Omega_l(Y) = (\bar{X} - Y) - 2\langle \bar{X} - Y, N\rangle N$, on

$$|\Omega_l(\bar{X}) - \Omega_l(Y)|^2 = |\bar{X} - Y|^2 - 4\langle \bar{X} - Y, N\rangle\langle \bar{X} - Y, N\rangle$$

$$+ 4\langle \bar{X} - Y, N\rangle^2 \underbrace{\langle N, N\rangle}_{=1} = |\bar{X} - Y|^2. \square$$

Lause 2. (i) $\Omega_l \circ \Omega_l = Id$
(ii) $\Omega_l(\bar{X}) = \bar{X}$ jos ja vain jos $\bar{X} \in l$.

Todistus. (i) On näytettävä, että $\Omega_l(\Omega_l(\bar{X})) = \bar{X}$ kaikilla $\bar{X} \in E^2$. [Merkitään $a = \langle \bar{X} - P, N\rangle$]. Silloin

$$\Omega_l(\Omega_l(\bar{X})) = \Omega_l(\bar{X} - 2\langle \bar{X} - P, N\rangle N) \overset{\text{laske}}{=} \ldots$$

$$[\bar{X} - 2aN - 2\langle \bar{X} - 2aN - P, N\rangle N =$$

$$\bar{X} - 2aN - 2\underbrace{\langle \bar{X} - P, N\rangle}_{=a} N + 4a\langle N, N\rangle N =$$

$$\bar{X} - 4aN + 4aN] = \bar{X}.$$

(ii) $\Omega_l(\bar{X}) = \bar{X}$, jos ja vain jos $\langle \bar{X} - P, N\rangle = 0$. Väite seuraa Lauseesta 3.2. $\square$ (Suoran yhtälö)

Seuraavaksi:

Lause 3. Jos T on isometria ja l suora, niin myös $T(l)$ on suora.

Todistus. Olkoon $l = \overleftrightarrow{PQ}$ ja $\bar{X} = P + t(Q - P)$ suoran l piste. Lauseen 2.2 perusteella on
(jos ja vain jos)

$$\begin{cases} d(\bar{X}, P) = |t|\, d(P, Q) \\ d(Q, \bar{X}) = |1-t|\, d(P, Q) \end{cases}$$

Koska T on isometria, on

$$d(T(\bar{X}), T(P)) = |t|\, d(T(P), T(Q))$$

$$d(T(Q), T(\bar{X})) = |1-t|\, d(T(P), T(Q)).$$

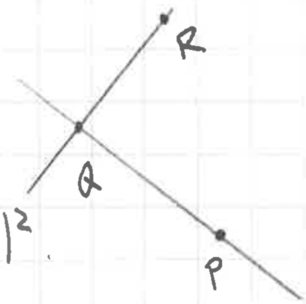
Lauseen 2.2 nojalla $T(\bar{X}) \in \overleftrightarrow{T(P)T(Q)}$. □

$= T(P) + t(T(Q) - T(P))$

<u>Lause 4.</u> Jos $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{QR}$ ja T on isometria, niin $\overleftrightarrow{T(P)T(Q)} \perp \overleftrightarrow{T(Q)T(R)}$.

Todistus. Pythagoraan lauseen nojalla on

$$|R-P|^2 = |Q-P|^2 + |R-Q|^2.$$



Koska T on isometria, on

$$|T(R)-T(P)|^2 = |T(Q)-T(P)|^2 + |T(R)-T(Q)|^2.$$

Pythagoraan lauseen nojalla on

$$\overleftrightarrow{T(P)T(Q)} \perp \overleftrightarrow{T(Q)T(R)}. \ \square$$

<u>Korollaari 1</u> Jos $l \parallel m$ ja T on isometria, niin $T(l) \parallel T(m)$.

Todistus. Lauseen 4.2 nojalla väite seuraa Lauseesta 4. □

<u>Korollaari 2</u>

Olkoon $l = \overleftrightarrow{PQ}$ suora ja T isometria. Lauseen 3 todistuksen nojalla T kuvaa l:n bijektiivisesti suoralle $T(l)$. Tästä seuraa

<u>Lause 5.</u> Isometria $T: E^2 \to E^2$ on bijektio.

28.1.05
3 vko

(Lause 4 jatkuu)

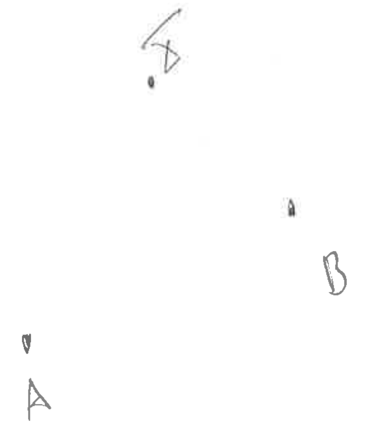
<u>Korollaari</u> 2 (i) $\Omega_l(X) = Y \iff$ joko $X = Y \in l$ tai l on janan XY keskinormaali.

(ii) Olkoot A, B ja X kolme ei-kollineaarista pistettä. Silloin on olemassa täsmälleen yksi piste $Y \neq X$ siten, että

$$\begin{cases} d(A,X) = d(A,Y) \\ d(B,X) = d(B,Y) \end{cases}$$

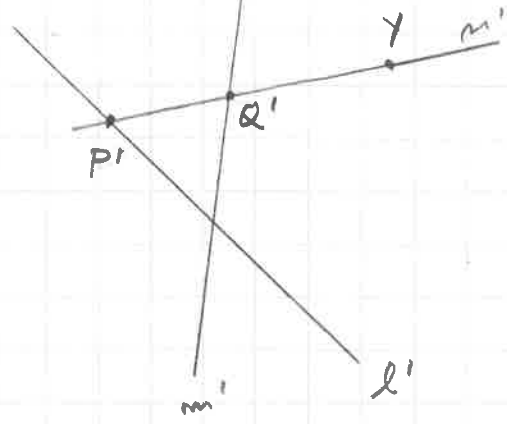
Tällöin $\Omega_{\overleftrightarrow{AB}}(X) = Y$. □

Tod. (i) selvä (ii) Harj. teht. 4.2. □



⑤

Todistus. Riittää osoittaa, että T on surjektio. Olkoot l ja m kaksi toisiaan leikkaavaa suoraa, jolloin myös $l' = T(l)$ ja $m' = T(m)$ ovat kaksi toisiaan leikkaavaa suoraa (Lause 3). Olkoon $Y \in E^2$ sekä n' pisteen Y kautta kulkeva suora, joka leikkaa suorat l' ja m' pisteissä P' ja Q', $P' \neq Q'$. Jos



$$Y = P' + t(Q' - P'),$$

niin $Y = T(X)$, missä
$X = P + t(Q - P)$ ja
$P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$
(vrt. Lauseen 3 todistus). □

Huomautus: Isometrian surjektiivisyys on epätriviaali asia. Olkoon esimerkiksi $H = \{X = (x_1, x_2) \mid x_1 > 0\}$ oikeanpuoleinen puolitaso ja $T : H \to H$ kuvaus, jolle $T(x_1, x_2) = (x_1 + 1, x_2)$. Silloin T on isometria, mutta T ei ole surjektio. Puolitason isometria ei siis välttämättä ole surjektio, vaikka koko tason isometria aina on. Tämän seikan on heijastuttava jollakin tavalla Lauseen 5

3.vko 07 todistuksessa. $S : H \to H$, $S(x_1, x_2) = (x_1, x_2 + 1)$ on bijektio

Isometrian käänteiskuvaus on isometria, samoin identtinen kuvaus $Id : E^2 \to E^2$.

Lause 6. Isometriat $T : E^2 \to E^2$ muodostavat ryhmän, jonka laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen ja neutraalialkiona identtinen kuvaus. □

5.2.2007

Määritelmä 3. Tasokuviot F_1 ja F_2 ovat yhteneviä, jos on olemassa isometria $T : E^2 \to E^2$, jolle $T(F_1) = F_2$.

Isometrioita voidaan kutsua myös yhtenevyyskuvauksiksi tai kongruensseiksi.

→

6. Isometrioiden esityslause

Jokainen peilaus Ω_ℓ on isometria (Lause 5.1). Lauseesta 5.6 seuraa, että kaikki äärelliset yhdistetyt

(*) $$\Omega_{\ell_m} \circ \Omega_{\ell_{m-1}} \circ \dots \circ \Omega_{\ell_1}$$

ovat isometrioita. Osoitamme aluksi, että kaikki isometriat ovat muotoa (*), ja että jokainen yhdiste (*) voidaan jopa esittää korkeintaan kolmen sopivasti valitun peilauksen yhdisteenä.

Tarkastelemme aluksi isometrioiden kiintopisteitä.

<u>Lause 1.</u> Jos $T: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ on isometria, $T(P) = P$, $T(Q) = Q$ ja $P \neq Q$, niin $T(\bar{X}) = \bar{X}$ kaikille $\bar{X} \in \overleftrightarrow{PQ}$.

Todistus. Olkoon $\bar{X} = P + t(Q-P)$. Silloin

$$\begin{cases} |\bar{X} - P| = |t|\,|P-Q| \\ |\bar{X} - Q| = |1-t|\,|P-Q|. \end{cases}$$

Koska T on isometria ja P ja Q ovat sen kiintopisteitä, on

$$\begin{cases} |T(\bar{X}) - P| = |t|\,|P-Q| \\ |T(\bar{X}) - Q| = |1-t|\,|P-Q|. \end{cases}$$

Lauseen 2.2. nojalla on

$$T(\bar{X}) = P + t(Q-P) = \bar{X}. \;\square$$

Lauseen 5.3 todistuksen mukaan

$$T(\bar{X}) = T(P) + t(T(Q) - T(P)) = P + t(Q-P) = \bar{X} \;\square$$

Lause 2. Isometrialla T on kolme ei-kollineaarista kiintopistettä, jos ja vain jos $T = Id$. (vrt. Lause 5.5. tod.)

Todistus. Olkoot P, Q ja R kolme ei-kollineaarista pistettä, joille $T(P) = P$, $T(Q) = Q$ ja $T(R) = R$. Olkoon $\overline{X} \in E^2$. Jos $\overline{X} \in \overleftrightarrow{PQ}$, $\overline{X} \in \overleftrightarrow{PR}$ tai $\overline{X} \in \overleftrightarrow{QR}$, niin $T(\overline{X}) = \overline{X}$ Lauseen 1 perusteella. Olkoon $\overline{X}$ näiden suorien ulkopuolella oleva piste. Olkoon l pisteen $\overline{X}$ kautta kulkeva suora, joka ei ole yhdenkään em. suoran suuntainen. Silloin l leikkaa näitä suoria vähintään kahdessa eri pisteessä P' ja Q'. Koska $T(P') = P'$ ja $T(Q') = Q'$, on $T(\overline{X}) = \overline{X}$ Lauseen 1 perusteella. Näin ollen $T = Id$.

Jos $T = Id$, niin $T(\overline{X}) = \overline{X}$ kaikille $\overline{X} \in E^2$. □

Korollaari. Olkoot T_1 ja T_2 isometrioita. Jos on olemassa kolme ei-kollineaarista pistettä P, Q ja R siten, että $T_1(P) = T_2(P)$, $T_1(Q) = T_2(Q)$ ja $T_1(R) = T_2(R)$, niin $T_1 = T_2$.

Todistus. Koska P, Q ja R ovat isometrian $T_2^{-1} \circ T_1$ kiintopisteitä, on $T_2^{-1} \circ T_1 = Id$ Lauseen 2 perusteella. □

Lause 3. Olkoon $T \neq Id$ isometria. Silloin T on peilaus, kahden sopivasti valitun peilauksen yhdiste tai kolmen sopivasti valitun peilauksen yhdiste.

Todistus. Olkoot $\overline{X}_1$, $\overline{X}_2$ ja $\overline{X}_3$ kolme ei-kollineaarista pistettä. Merkitään

Sivut 22'–22''

$$Y_1 = T(\overline{X}_1), \quad Y_2 = T(\overline{X}_2), \quad Y_3 = T(\overline{X}_3).$$

Olkoon l_1 janan $\overline{X}_1 Y_1$ keskinormaali. Silloin (~~Lause 5.2, seur. 2~~ perusteella) Korollaari 5.2:n

vrt. ~~Isom. ominaisuus~~ ~~(Lauseen 5.2 jälkeen)~~

Lauseen 3 todistus: Olkoot $\bar X_1, \bar X_2, \bar X_3$ kolme ei-kollineaarista pistettä. Merkitään

$$Y_1 = T(\bar X_1), \quad Y_2 = T(\bar X_2), \quad Y_3 = T(\bar X_3).$$

Silloin $|\bar X_1 - \bar X_2| = |Y_1 - Y_2|$, $|\bar X_1 - \bar X_3| = |Y_1 - Y_3|$ ja $|\bar X_2 - \bar X_3| = |Y_2 - Y_3|$.
Olkoon l_1 janan $\bar X_1 Y_1$ keskinormaali. Silloin

$$Y_1 = \Omega_{l_1}(\bar X_1). \qquad \text{(Lause 5.4, Kpl. 2)}$$

(Jos $\bar X_1 = Y_1$, olkoon $\Omega_{l_1} = Id$).

Merkitään

$$\bar X_2' = \Omega_{l_1}(\bar X_1), \quad \bar X_3' = \Omega_{l_1}(\bar X_2)$$

Koska Ω_{l_1} ja T_1 ovat isometrioita, on

$$|\bar X_1 - \bar X_2| \overset{\Omega_{l_1}}{=} |Y_1 - \bar X_2'|$$
$$|\bar X_1 - \bar X_2| \underset{T}{=} |Y_1 - Y_2|$$

Siis Y_1 on janan $\bar X_2' Y_2$ keskinormaalilla.
Olkoon l_2 janan $\bar X_2' Y_2$ keskinormaali.

Silloin

$$\Omega_{l_2}(\bar X_2') = Y_2, \quad \Omega_{l_2}(Y_1) = Y_1$$

(Jos $\bar X_2' = Y_2$, olkoon $\Omega_{l_2} = Id$.)

Olkoon

$$\bar X_3'' = \Omega_{l_2}(\bar X_3')$$

olkoon ℓ_3 janan $X_3''Y_3$ keskinormaali.

Koska T ja $\Omega_{\ell_2}\circ\Omega_{\ell_1}$ ovat isometrioita, on

$$|X_1 - X_3| \overset{T}{=} |Y_1 - Y_3|$$

$$|X_1 - X_3| \underset{\Omega_{\ell_2}\circ\Omega_{\ell_1}}{=} |Y_1 - X_3''|,$$

joten $Y_1 \in \ell_3$

Vastaavasti

$$|X_2 - X_3| \overset{T}{=} |Y_2 - Y_3|$$

$$|X_2 - X_3| \underset{\Omega_{\ell_2}\circ\Omega_{\ell_1}}{=} |Y_2 - X_3''|,$$

joten $Y_2 \in \ell_3$.

Siis $\Omega_{\ell_3}(Y_1) = Y_1$, $\Omega_{\ell_3}(Y_2) = Y_2$ ja

$\Omega_{\ell_3}(X_3'') = Y_3$.

(Jos $X_3'') = Y_3$, olkoon $\Omega_{\ell_3} = Id$.)

③

Näin ollen

$$T(\Sigma_j) = (\Omega_{l_3} \circ \Omega_{l_2} \circ \Omega_{l_1})(\Sigma_j),$$
$$j = 1, 2, 3.$$

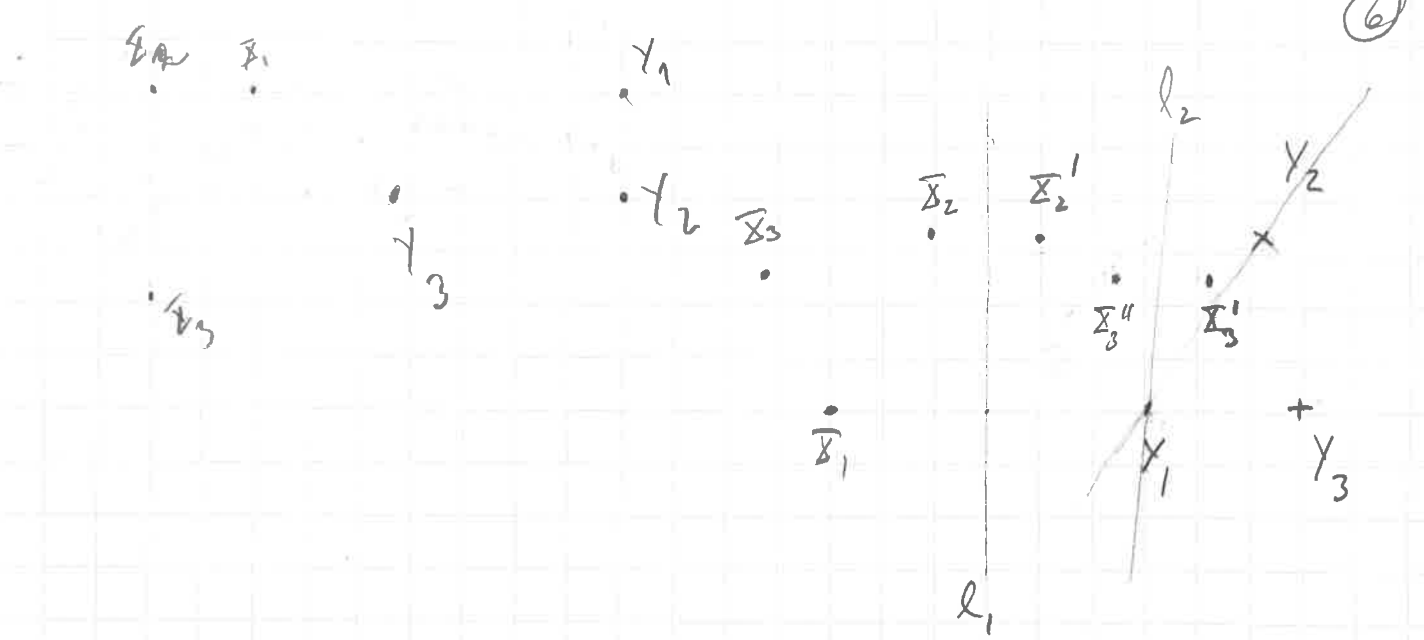
Väite seuraa Lause 2 Korollaarista. □

~~Edellisestä todistuksesta~~ seuraa myös

Lause 3! Olkoot $F_1 = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3\}$ ja $F_2 = \{Y_1, Y_2, Y_3\}$ kaksi [ei-kollineaarisista] pisteiden muodostamaa kolmikkoa siten, että

$$|\Sigma_1 - \Sigma_2| = |Y_1 - Y_2|,$$
$$|\Sigma_1 - \Sigma_3| = |Y_1 - Y_3|,$$
$$|\Sigma_2 - \Sigma_3| = |Y_2 - Y_3|.$$

Silloin F_1 ja F_2 ovat yhtenevät, ts. on olemassa (yksikäs. määrätty) isometria T, jolle $T(\Sigma_i) = Y_i$, $i = 1, 2, 3$. □



$\Omega_{l_1}(\bar{X}_1) = Y_1$. (Jos $\bar{X}_1 = Y_1$, niin olkoon $\Omega_{l_1} = Id$.) Merkitään

$$\bar{X}_2' = \Omega_{l_1}(\bar{X}_2), \quad \bar{X}_3' = \Omega_{l_1}(\bar{X}_3).$$

2.2.05 →

Koska Ω_{l_1} ja T ovat isometrioita, on

$$|\bar{X}_1 - \bar{X}_2| = |Y_1 - \bar{X}_2'| = |Y_1 - Y_2|.$$

Olkoon l_2 janan $\bar{X}_2' Y_2$ keskinormaali. Silloin (Korall. 5.2)

$$\Omega_{l_2}(\bar{X}_2') = Y_2, \quad \Omega_{l_2}(Y_1) = Y_1.$$

(Jos $\bar{X}_2' = Y_2$, olkoon $\Omega_{l_2} = Id$.) Olkoon

$$\bar{X}_3'' = \Omega_{l_2}(\bar{X}_3').$$

Ψ: $\Omega_{l_2} \circ \Omega_{l_1}$ ja T ovat isometrioita

Olkoon l_3 janan $\bar{X}_3'' Y_3$ keskinormaali. Koska Ψ $|\bar{X}_3'' - Y_1| = |Y_3 - Y_1|$ ja $|\bar{X}_3'' - Y_2| = |Y_3 - Y_2|$, joten (L. 5.2 seuraus 3)

$$\Omega_{l_3}(\bar{X}_3'') = Y_3, \quad \Omega_{l_3}(Y_1) = Y_1, \quad \Omega_{l_3}(Y_2) = Y_2.$$

(Jos $\bar{X}_3'' = Y_3$, olkoon $\Omega_{l_3} = Id$). Nyt $(\Omega_{l_3} \circ \Omega_{l_2} \circ \Omega_{l_1})(\bar{X}_i) = T(\bar{X}_i)$, $i = 1, 2, 3$. Väite seuraa Lauseen 2 korollaarista. □

Harj. teht.: Piirrä kuva ja seuraa todistusta

Todistamamme isometrioiden erityslause on yllättävä ja vahva tulos. Lauseen mukaan jokaista isometriaa $T \neq Id$ vastaa kolme peilausta Ω_{l_1}, Ω_{l_2} ja Ω_{l_3} siten, että

$$T = \Omega_{l_3} \circ \Omega_{l_2} \circ \Omega_{l_1}.$$

Näistä peilauksista korkeintaan kaksi on triviaaleja, ts. $\Omega_{l_i} = Id$ korkeintaan kahdelle indeksille i.

Jokainen äärellisen monen peilauksen yhdiste (*) on isometria. Erityslauseen nojalla jokainen yhdiste (*) on joko identtinen kuvaus, peilaus, kahden peilauksen yhdiste tai kolmen peilauksen yhdiste. Kuitenkaan mikään näistä peilauksista ei yleensä ole alkuperäisessä erityisessä (*) esiintyvä peilaus.

Erityslauseen (lauseet) mukaan saamme selville kaikki mahdolliset isometriatyypit, kun käymme läpi kaikki mahdolliset korkeintaan kolmen peilauksen yhdisteet. Osoittautuu, että identtisen kuvauksen ja peilausten lisäksi on kolme eri tyyppiä olevia isometrioita.

~~Sen jälkeen kun isometriat l yhdenmuotoisuuskuvaukset on opittu tuntemaan, geometristen tulosten perusteleminen sujuu helposti ja täsmällisesti. Kolmiulotteisuus ja havainto eivät enää ole ainoita tapoja perustella asioita.~~

Tämä antaa mahdollisuuden selvittää, milloin isometria T on lineaarikuvaus.

$T(0) = T(0+0) = T(0) + T(0) \Rightarrow T(0) = 0$ on.

T:llä kiintopiste on origo.

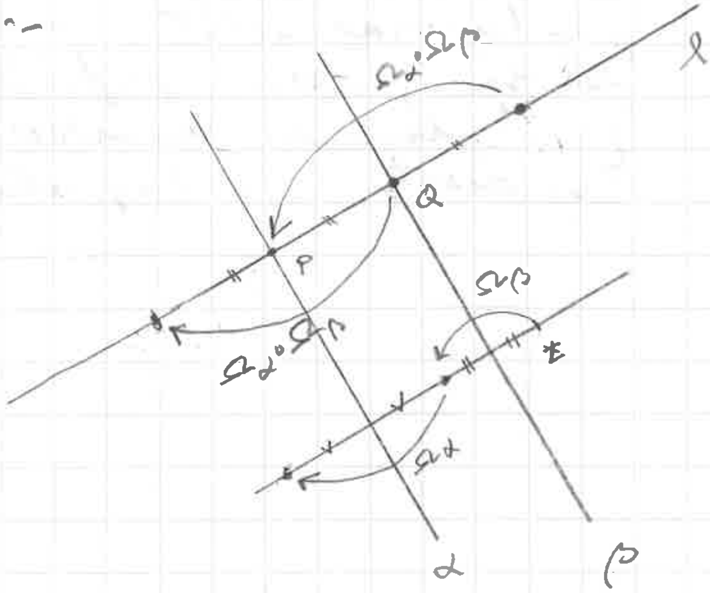
$\Rightarrow$ T on joko peilaus origon kautta kulkevan suoran suhteen tai kahden tällaisen peilauksen yhdiste (kierto) origon ympäri.

11.2
2004

7. Siirrot

(*) → Olkoot α ja β kaksi keskenään yhdensuuntaista suoraa. Olkoon N suorien yhteinen yksikkönormaalivektori. Valitaan $P \in \alpha$ ja $Q \in \beta$ siten, että

$$\overleftrightarrow{PQ} \perp \alpha .$$



Silloin (Lause 3.5)

$$d(\alpha,\beta) = |\langle P-Q, N\rangle| = |P-Q|.$$

Laskemalla saadaan

$$\Omega_\alpha(\Omega_\beta(\overline{X})) = \overline{X} + 2(P-Q)$$

Tästä seuraa:

(i) Jos $P' \in \alpha$ ja $Q' \in \beta$ siten, että

$$\overleftrightarrow{P'Q'} \perp \alpha ,$$

niin $\Omega_\alpha(\Omega_\beta(\overline{X})) = \overline{X} + 2(P'-Q')$.

(ii) Jos $v \neq 0$ mielivaltainen vektori, niin on olemassa suorat α ja β, $\alpha \parallel \beta$, siten että

$$\Omega_\alpha(\Omega_\beta(\overline{X})) = \overline{X} + v$$

kaikilla $\overline{X} \in \mathbb{E}^2$. Lisäksi $v \perp \alpha$ (ja $v \perp \beta$), ja

$$|v| = 2\, d(\alpha,\beta)$$

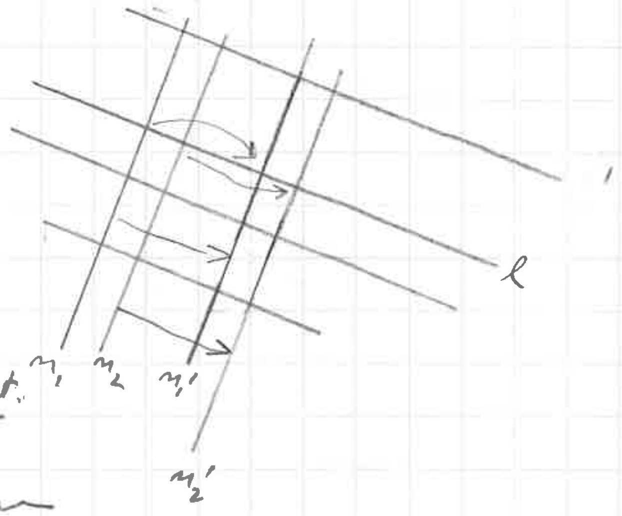
Määritelmä 1. Olkoon l kahden yhdensuuntaisen suoran α ja β yhteinen normaali, joka leikkaa α:n pisteessä P ja β:n pisteessä Q. Kuvaus $T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ on siirto pitkin suoraa l ja $v = 2(P-Q)$ on sen siirtovektori.

Jos T on siirto pitkin suoraa l ja $l \parallel l'$, niin T on myös siirto pitkin suoraa l'. $T(l) = l$ ja $T(l') = l'$ kaikille $l' \parallel l$. Jos $n \perp l$, niin $T(n) \perp l$.

Suoran l suuntaisten suorien l' parvi kuvautuu itselleen.

Suoran l normaalien n parvi kuvautuu itselleen.

Suoran l suuntaisten suorien parven jokainen suora kuvautuu itselleen. Virtausviivat.



Normaalien parvessa jokainen normaali kuvautuu jollekin toiselle normaalille.

4.2.2005

Lause 1. (Ensimmäinen kolmen peilauksen lause) Olkoot α, β ja γ kolme keskenään yhdensuuntaista suoraa. Silloin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty näiden suorien suuntainen suora δ siten, että

2.2.2006

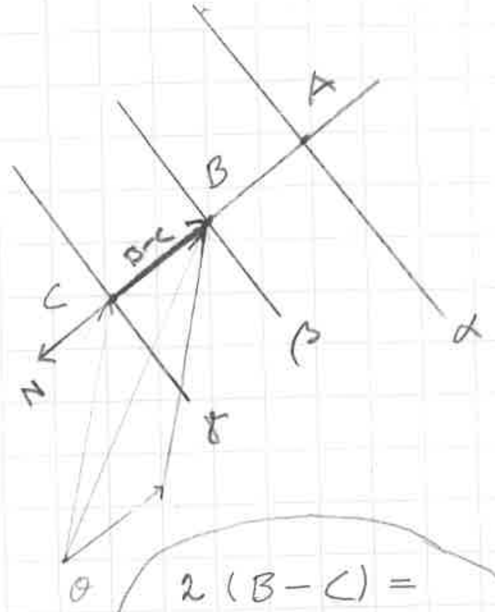
$$T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \Omega_\delta .$$

Todistus. Olkoon N suorien α, β ja γ yhteinen yksikkönormaalivektori, l jokin suorien yhteinen normaali sekä $A \in \alpha$, $B \in \beta$ ja $C \in \gamma$ näiden suorien ja normaalin l leikkauspisteet.

Sillä:

$$(\Omega_\beta \circ \Omega_\gamma)(\bar{X}) = \bar{X} + 2(B-C),$$

$$\begin{aligned} T(\bar{X}) &= \Omega_\alpha\big(\bar{X} + 2(B-C)\big) \\ &= \bar{X} + 2(B-C) - 2\langle \bar{X} + 2(B-C) - A, N\rangle N \\ &= \bar{X} - 2\langle \bar{X} - (A-B+C), N\rangle N \end{aligned}$$



$2(B-C) = 2\langle B-C, N\rangle N$

Näin ollen T on peilaus suorassa δ joka kulkee pisteen $A-B+C$ kautta ja jolla on N yksikkönormaalivektorina. Näin ollen δ on suora α, β ja γ suuntainen. Lisäksi nämä ehdot määräävät δ:n yksikäsitteisesti. □

(*) Huom.

Lause 2. (Siirtojen esityslause) Olkoot α ja β kaksi suoran l normaalia ja $T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ siirto pitkin suoraa l. Jos $m \perp l$ ja $m \perp l$, niin on olemassa suorat $m' \perp l$ ja $m' \perp l$ siten, että

$$T = \Omega_m \circ \Omega_{m'} = \Omega_{m'} \circ \Omega_m .$$

Todistus. Kolmen peilauksen lauseen nojalla on olemassa $m' \perp l$, jolle

$$\Omega_m \circ \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \Omega_{m'} .$$

Koska $\Omega_m = \Omega_m^{-1}$, on $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \Omega_m \circ \Omega_{m'}$. Suoran n' olemassaolo todistetaan vastaavalla tavalla. □

(7)

(*) Huom. Tapaukset $\delta = \alpha$ tai $\delta = \gamma$ ovat mahdottomia (koska $A - B + C \neq A$ tai C), mutta $\delta = \beta$, jos ja vain jos $B = \frac{1}{2}(A+C)$.

Lause 2

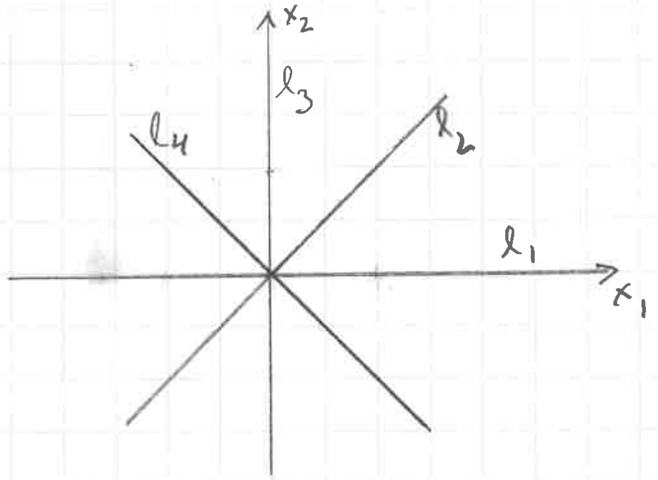
Esimerkki. Tarkastellaan (x_1, x_2)-koordinaatistossa neljää suoraa ja peilauksia niiden suhteen.

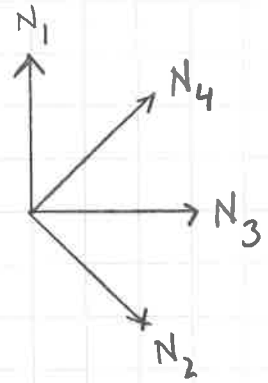
$$l_1 : x_2 = 0 \qquad N_1 = (0,1) \qquad ax + by + c = 0$$

$$l_2 : x_1 - x_2 = 0 \qquad N_2 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, -\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad N = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}(a,b)$$

$$l_3 : x_1 = 0 \qquad N_3 = (1, 0)$$

$$l_4 : x_1 + x_2 = 0 \qquad N_4 = \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$$





$$\bar{X} = (x_1, x_2), \quad Y = (y_1, y_2)$$

$$Y = \Omega_{l_1}(\bar{X}) = \bar{X} - 2\langle \bar{X}, N_1 \rangle N_1$$

$$= (x_1, x_2) - 2x_2(0,1) = (x_1, -x_2)$$

$$\Omega_{l_1} : \begin{cases} y_1 = x_1 \\ y_2 = -x_2 \end{cases}$$

Harj. Lauseke matriisitulona

$$Y = \Omega_{\ell_2}(\bar{X}) = \bar{X} - 2\langle \bar{X}, N_2\rangle N_2$$

$$= (x_1, x_2) - 2\,\frac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= (x_1, x_2) + (-x_1 + x_2,\ x_1 - x_2)$$

$$= (x_2, x_1)$$

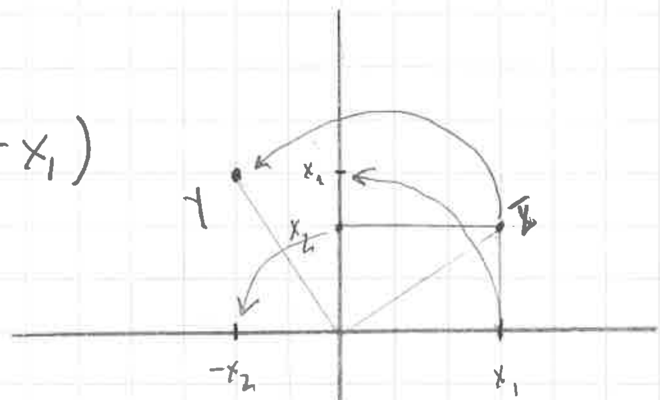
$$\Omega_{\ell_2}: \begin{cases} y_1 = x_2 \\ y_2 = x_1 \end{cases}$$

$$Y = \Omega_{\ell_3}(\bar{X}) = (-x_1, x_2)$$

$$\Omega_{\ell_3}: \begin{cases} y_1 = -x_1 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

$$Y = \Omega_{\ell_4}(\bar{X}) = (-x_2, -x_1)$$

$$\Omega_{\ell_4}: \begin{cases} y_1 = -x_2 \\ y_2 = -x_1 \end{cases}$$



$$\langle (x_1, x_2), (-x_2, x_1)\rangle = 0$$

$$(\Omega_{\ell_2}\circ\Omega_{\ell_1})(\bar{X}) = \Omega_{\ell_2}(x_1, -x_2) = (-x_2, x_1)$$

Geometrisesti kierto $\frac{\pi}{2}$:n verran origon ympäri
Peilausakselien välinen kulma on $\pi/4$

$$(\Omega_{\ell_3}\circ\Omega_{\ell_1})(\bar{X}) = \Omega_{\ell_3}(x_1, -x_2) = (-x_1, -x_2)$$

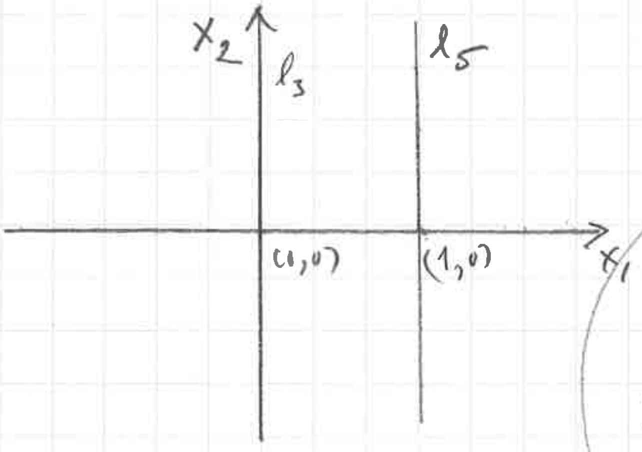
Kierto π:n verran origon ympäri
Peilausakselien välinen kulma $\pi/2$

$$(\Omega_{\ell_3}\circ\Omega_{\ell_2}\circ\Omega_{\ell_1})(\bar{X}) = \Omega_{\ell_3}(-x_2, x_1) = (x_2, x_1)$$

$$= \Omega_{\ell_2}(\bar{X})$$

(Kolmen peilauksen lauseen tyyppinen tulos)

Lisätään yksi suora ja yksi peilaus (7)



$\Omega_{l_3}(\Omega_{l_5}(\bar{x})) =$
$\Omega_{l_3}(-x_1+2,\ x_2) =$
$(x_1-2,\ x_2)$

Siirto pitkin x_1-akselia vektorin $(-2,0)$ verran

$l_5: \ x_1 = 1$

$$\Omega_{l_5}(\bar{x}) = \bar{x} - 2\langle \bar{x}-(1,0), N_3\rangle N_3$$
$$= (x_1, x_2) - 2(x_1-1)(1,0)$$
$$= (-x_1+2,\ x_2)$$

$$\Omega_{l_5}: \begin{cases} y_1 = -x_1+2 \\ y_2 = x_2 \end{cases}$$

12.2.2009

$$(\Omega_{l_5} \circ \Omega_{l_1})(\bar{x}) = \Omega_{l_5}(x_1, -x_2)$$
$$= (-x_1+2,\ -x_2)$$

Kierto π:n verran pisteen $(1,0)$ ympäri
Peilausakselien välinen kulma $\pi/2$

Merk. $\underbrace{H_1 = \Omega_{l_3} \circ \Omega_{l_1}}_{\text{kierto origon ympäri}}$, $H_2 = \Omega_{l_5} \circ \Omega_{l_1}$

$$(H_2 \circ H_1)(\bar{x}) = H_2(-x_1, -x_2) = (x_1+2,\ x_2)$$

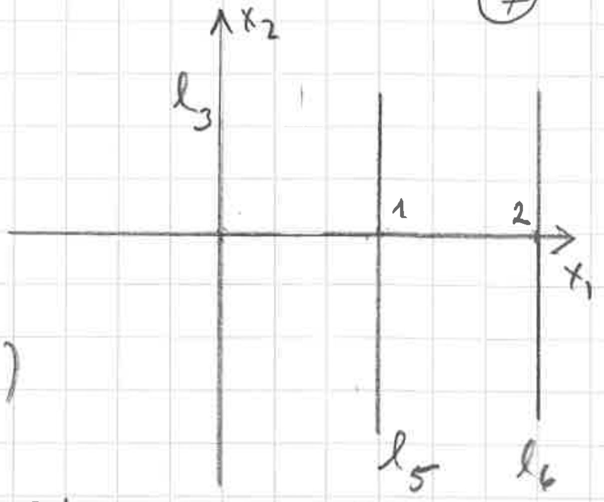
Siirto pitkin suoraa l_1 vektorin $(2,0)$ verran

$H_2 \circ H_1 = \Omega_{l_5} \circ \Omega_{l_3}$,

sillä:

$(\Omega_{l_5} \circ \Omega_{l_3})(\bar{x}) =$

$\Omega_{l_5}(-x_1, x_2) = (x_1 + 2, x_2)$



peilikäännöksen

Kahden "peiliviivan" yhdiste on siirto.

Lisäksi:

$\Omega_{l_5} \circ \Omega_{l_1} \circ \Omega_{l_3} \circ \Omega_{l_1} = \Omega_{l_5} \circ \Omega_{l_3}$.

Lisätään vielä suora $l_6 : x_1 = 2$:

$$\begin{aligned}\Omega_{l_6} &= \bar{x} - 2\langle \bar{x} - (2,0), N_3 \rangle N_3 \\ &= (x_1, x_2) - 2\langle (x_1 - 2, x_2), (1,0) \rangle (1,0) \\ &= (x_1, x_2) - 2(x_1 - 2)(1,0) \\ &= (-x_1 + 4, x_2).\end{aligned}$$

Silloin:

$(\Omega_{l_6} \circ \Omega_{l_5} \circ \Omega_{l_3})(\bar{x}) = \Omega_{l_6}(x_1 + 2, x_2) =$

$(-x_1 + 2, x_2) = \Omega_{l_5}(\bar{x})$.

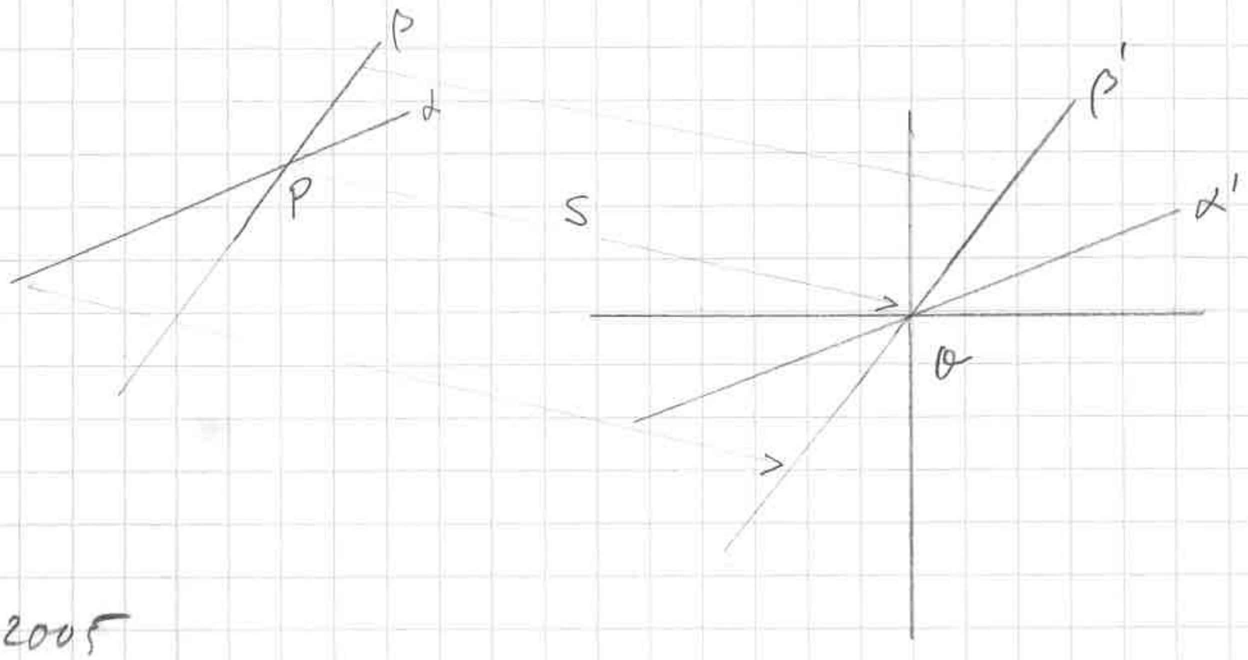
(Kolmen peilauksen lause. Tässä tapauksessa $1 = \frac{1}{2}(0 + 2)$, joten $\delta = \beta$.)

Kaikenkaikkiaan havaitaan, että yksinkertaiset geometriset asiat voidaan esittää yksinkertaisilla kaavoilla ja laskuilla vetoamatta kuvioon tai kuvailuihin. Näin ollen geometrian opetusohjelman teko tietokoneelle ei ole periaatteessa ongelmallinen asia.

kks

8. Kierrot

Olkoot α ja β kaksi toisiaan leikkaavaa suoraa. Osoitamme, että $T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ on nyt kierto suorien leikkauspisteen P ympäri. Olkoon S siirto, jolle $S(P) = O$.



9.2.2005

Merkitään $\alpha' = S(\alpha)$ ja $\beta' = S(\beta)$. Silloin

$$\Omega_\alpha = S^{-1} \circ \Omega_{\alpha'} \circ S$$

$$\Omega_\beta = S^{-1} \circ \Omega_{\beta'} \circ S$$

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = S^{-1} (\Omega_{\alpha'} \circ \Omega_{\beta'}) \circ S,$$

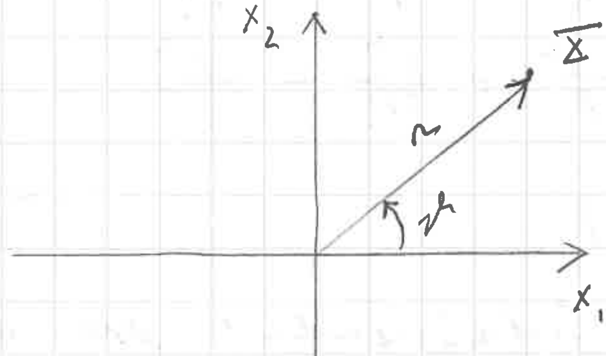
Harj. teht.

jolloin $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ toimii samalla tavalla pisteen P kuin $\Omega_{\alpha'} \circ \Omega_{\beta'}$ origossa O. Laskujen yksinkertaistamiseksi voimme siis yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että $P = O$. (Tätä on syytä miettiä tarkasti.)

Olkoot siis α ja β kaksi suoraa, jotka leikkaavat toisensa origossa. Olkoon

$$T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta.$$

Siirrytään napakoordinaattiesitykseen (8)



$r = |\bar{X}|$
$x_1 = r\cos\vartheta$
$x_2 = r\sin\vartheta$

($\sin\varphi$ ja $\cos\varphi$ määritellään put sarjoilla. Voidaan mm. todistaa, että jokainen yksikkövektori voidaan esittää muodossa $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$)

Olkoot (suoria) siis α ja β [kaksi origon kautta kulkevaa suoraa, joiden] yksikkösuuntavektorit [ovat] $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ ja $v = (\cos\psi, \sin\psi)$. Silloin

$$\Omega_\beta(\bar{X}) = \bar{X} - 2\langle \bar{X}, v^\perp\rangle v^\perp$$

missä $v^\perp = (-\sin\psi, \cos\psi)$. Jos merkitään

$$\Omega_\beta(\bar{X}) = (y_1, y_2),$$

niin laskemalla saadaan

Huom

$$\begin{cases} y_1 = x_1\cos 2\psi + x_2 \sin 2\psi \\ y_2 = x_1 \sin 2\psi - x_2\cos 2\psi. \end{cases}$$

Harj. teht.

Tai siis samassa matriisimuodossa

$$\Omega_\beta(\bar{X}) = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

Tämä peilausmatriisi

joten

$$\Omega_\alpha(\Omega_\beta(\bar{X})) = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\ldots = \begin{pmatrix} \cos 2(\varphi-\psi) & -\sin 2(\varphi-\psi) \\ \sin 2(\varphi-\psi) & \cos 2(\varphi-\psi) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r\cos\vartheta \\ r\sin\vartheta \end{pmatrix} = (z_1, z_2)$$

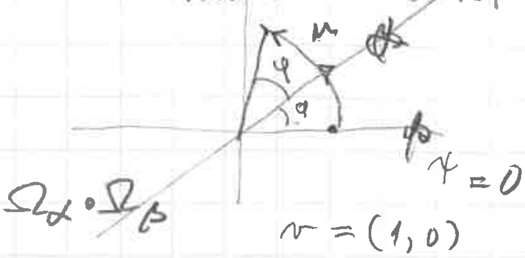
$$\Omega_\alpha(\Omega_\beta(r\cos\vartheta, r\sin\vartheta)) = (r\cos(\vartheta + 2(\varphi-\psi)), r\sin(\ ))$$

missä

$$z_1 = r\cos[\vartheta + 2(\varphi - \psi)]$$

$$z_2 = r\sin[\vartheta + 2(\varphi - \psi)].$$

Muistikuvio: Kiertokulma on 2φ



Määritelmä 1. Olkoot $\alpha = P + [u]$ ja $\beta = P + [v]$ kaksi pisteen P kautta kulkevaa suoraa, $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ ja $v = (\cos\psi, \sin\psi)$. Kuvaus $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ on kierto kulman $2(\varphi - \psi)$ verran pisteen P ympäri, joka on kierron keskipiste.

Jos $u \perp v$, on $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ kierto kulman π verran pisteen P ympäri. Tällaiselle kierrolle voidaan antaa nimeksi vaikkapa puolikierto (puolikierroskierto) tai puolikäännös.

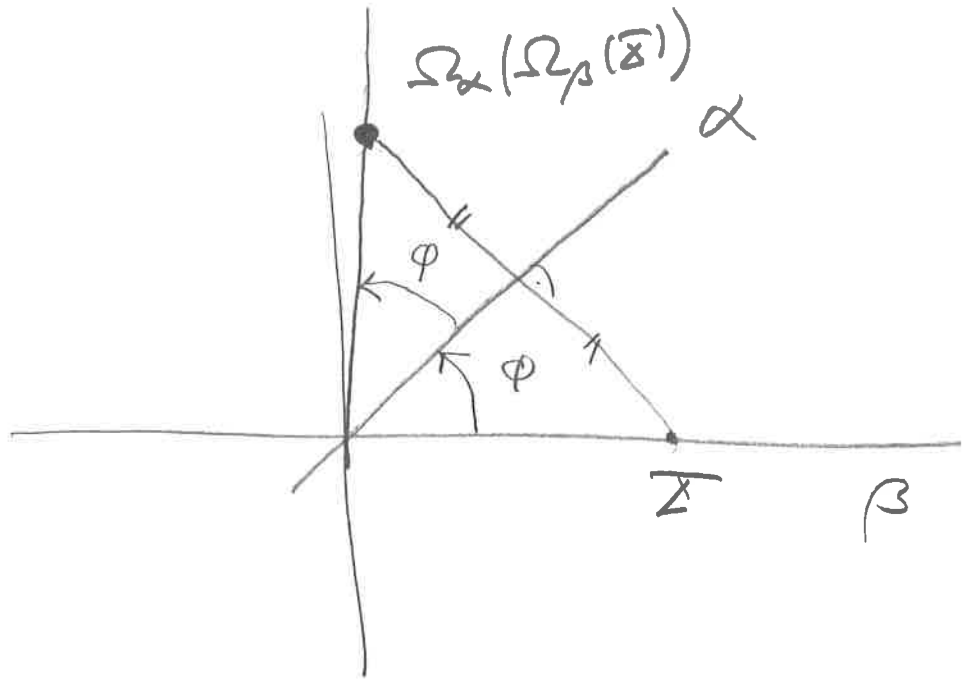
Huomataan, että kierto riippuu vain pisteestä P ja suorien α ja β välisestä kulmasta $\varphi - \psi$. Kierron suuruus on kaksi kertaa suorien välisen kulman suuruus. Sanaa "kulma" käytetään tässä analyysistä opitulla tavalla. Geometrinen merkitys määritellään täsmällisesti myöhemmin. (Kulma on geometriassa havainnollisesti hyvin selvä, mutta sitä hankalasti määriteltävissä.)

Analyysissä voidaan funktiot $\sin x$ ja $\cos x$ määritellä vaikkapa potenssisarjoilla. Välittömästi seuraa, että $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ja että jokaista yksikkövektoria u vastaa täsmälleen yksi arvo $\varphi \in [0, 2\pi[$ siten, että

$$u = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Lukua φ kutsutaan u:n suuntakulmaksi.

Muistikaavio $\quad \psi = 0$



Kiertokulma on $2\varphi = 2(\varphi - \psi)$

Matriisien tulo antaa kuiten $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ matriisi: ~~Jos~~ $P = \theta$ ja

$$\Omega_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi \end{pmatrix}, \quad \Omega_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi \end{pmatrix},$$

niin

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \begin{pmatrix} \cos 2(\varphi-\psi) & -\sin 2(\varphi-\psi) \\ \sin 2(\varphi-\psi) & \cos 2(\varphi-\psi) \end{pmatrix}.$$

Tässä $\det(\ ) = +1$ (kiertosuunta säilyy)

Vaakavektorit ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan

Pystyvektorit — 34' — //

Onko

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ \frac{2\sqrt{2}}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

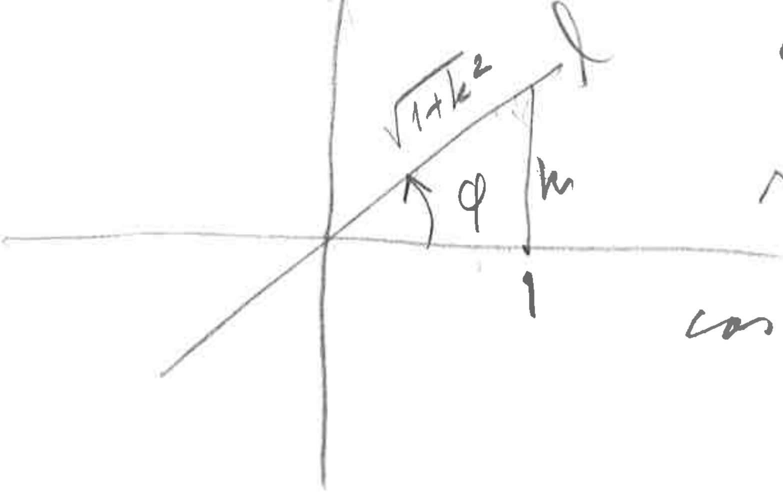
peilausmatriisi? Muoto on oikea.
Ovatko vaaka- ja pystyvektorit yksikkövektoreita?

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{4\cdot 2}{9} = 1$$

On peilausmatriisi.

$$\cos \psi = \frac{1}{3}$$

Peilausakselin kalt. kulma $\frac{\psi}{2} = \varphi$



l peilausakseli:

$$y = kx$$

$$\tan \varphi = k$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}$$

$$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2 \varphi$$

⑧

Olkoon T kierto kulman ϑ verran pisteen P ympäri. Silloin T:hen liittyvä <u>kiertomatriisi</u> on

Kuv. 37

$$\mathrm{rot}\,\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

Siirto $\bar{X} \mapsto \bar{X} - P$ vie pisteen $P = (p_1, p_2)$ origoon. Kierrolle T saadaan nyt esitys

$$T(\bar{X}) = \mathrm{rot}\,\vartheta\,(\bar{X} - P) + P$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - p_1 \\ x_2 - p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

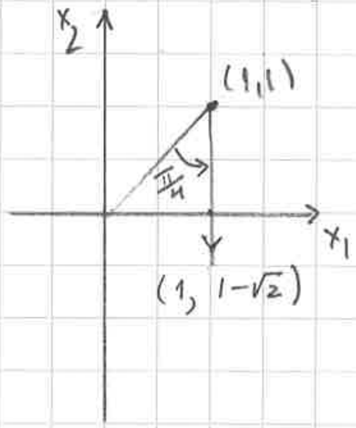
$$= \begin{pmatrix} p_1 + (x_1 - p_1)\cos\vartheta - (x_2 - p_2)\sin\vartheta \\ p_2 + (x_2 - p_2)\cos\vartheta + (x_1 - p_1)\sin\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

kun $Y = T(\bar{X}) = (y_1, y_2)$.

<u>Esimerkki</u>: (Tarkistus) $P = (1,1)$, $\vartheta = \frac{\pi}{4}$, $\bar{X} = (0,0)$

$$Y = \begin{pmatrix} 1 + (-1)\frac{1}{\sqrt{2}} - (-1)\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 + (-1)\frac{1}{\sqrt{2}} + (-1)\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - \sqrt{2} \end{pmatrix}$$



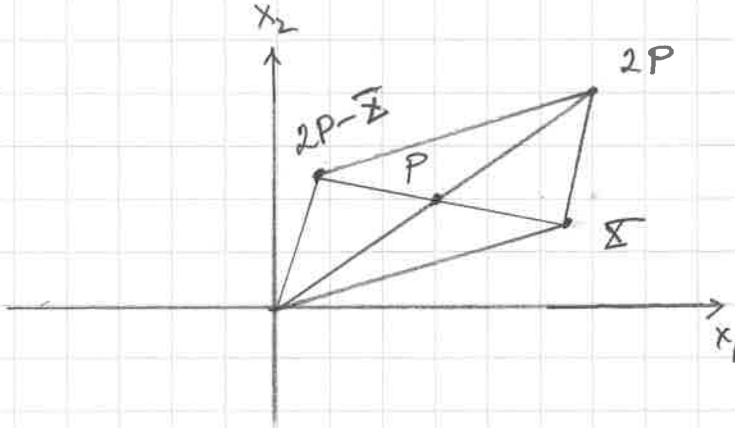
Kaavat näyttäisivät olevan jäykkiä.

(Kahden peilausmatriisin tulo on kiertomatriisi. Molempien pystyvektorit ja vaakavektorit ovat yksikkövektoreita. Pystyvektorit ovat keskenään kohtis. ja vaakavektorit ovat keskenään kohtisuorassa. Molemmat matriisi-

Jos T on puolikierto, on $\vartheta = \pi$. Silloin

$$T(\bar{x}) = \begin{pmatrix} p_1 - x_1 + p_1 \\ p_2 - x_2 + p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p_1 \\ 2p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

joten $T(\bar{x}) = 2P - \bar{x}$. Tälle helpolle laskulle perustelu seuraava kuvio:



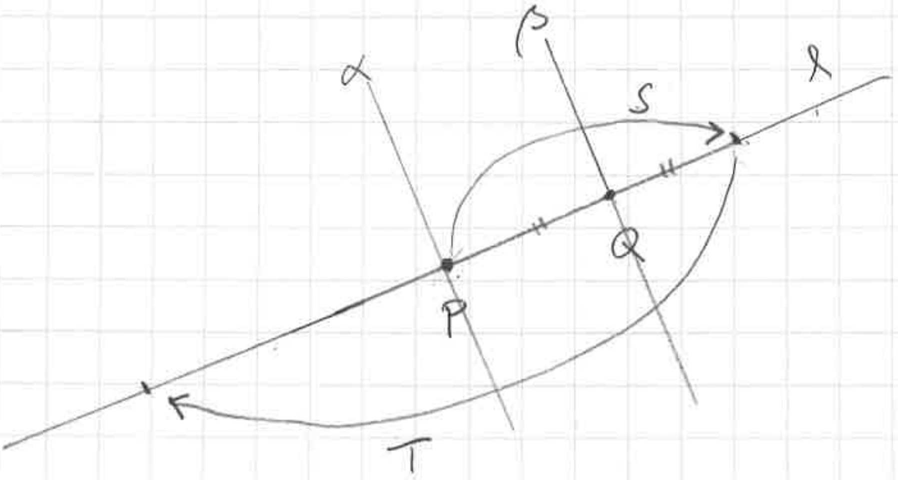
7.2.2007
11.2.2005
18.2.2004

Puolikierto origon ympäri on siis kuvaus $\bar{x} \mapsto -\bar{x}$, jolloin $y_1 = -x_1$ ja $y_2 = -x_2$.

<u>Lause 1</u>. Jos T on puolikierto pisteen P ympäri ja S on puolikierto pisteen Q ympäri, niin $T \circ S$ on siirto, jonka siirtovektori on $2(P-Q)$.

Todistus. $(T \circ S)(\bar{x}) = T(2Q - \bar{x})$

$$= 2(P-Q) + \bar{x}. \square$$



$T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\ell$
$S = \Omega_\ell \circ \Omega_\beta$
$T \circ S = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$
siirto pitkin suoraa ℓ

Minulle 3.

Olkoon $\alpha = [u]$, $u = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ origon kautta kulkeva suora. Edellä nähtiin, että

$$\Omega_\alpha(X) = \begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix}.$$

Muotoa

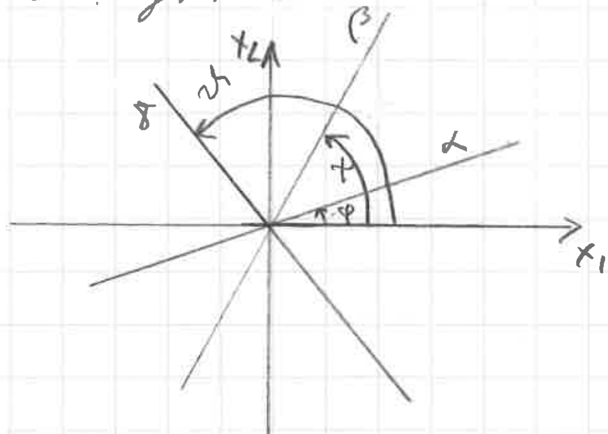
$$\mathrm{ref}\,\vartheta = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta\end{pmatrix}$$

olevaa matriisia kutsutaan <u>peilausmatriisiksi</u>. Peilaussuoran suuntakulma on tällöin $\vartheta/2$.

<u>Lause 2.</u> (Toinen kolmen peilauksen lause) Olkoot α, β ja γ kolme pisteen P kautta kulkevaa suoraa. Silloin on olemassa P:n kautta kulkeva suora δ siten, että

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \Omega_\delta.$$

Todistus. Voidaan olettaa, että P on origo. Siirrytään matriisiesitykseen. Jos



$$\Omega_\alpha = \begin{pmatrix}\cos 2\varphi & \sin 2\varphi \\ \sin 2\varphi & -\cos 2\varphi\end{pmatrix},$$

$$\Omega_\beta = \begin{pmatrix}\cos 2\psi & \sin 2\psi \\ \sin 2\psi & -\cos 2\psi\end{pmatrix},$$

$$\Omega_\gamma = \begin{pmatrix}\cos 2\vartheta & \sin 2\vartheta \\ \sin 2\vartheta & -\cos 2\vartheta\end{pmatrix},$$

niin

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \begin{pmatrix}\cos 2(\varphi-\psi+\vartheta) & \sin 2(\varphi-\psi+\vartheta) \\ \sin 2(\varphi-\psi+\vartheta) & -\cos 2(\varphi-\psi+\vartheta)\end{pmatrix}.$$

Näin ollen $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \Omega_\delta$, missä δ

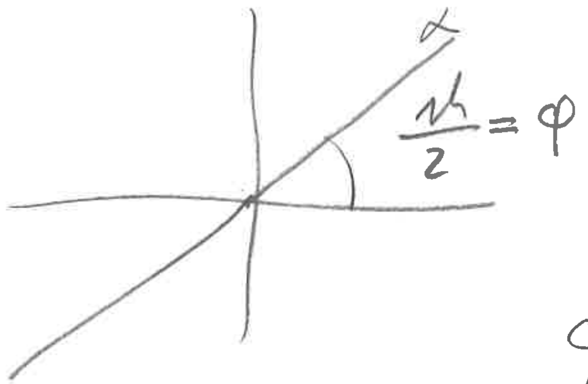
(1)

$$\mathrm{ref}\,\vartheta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$ peilausmatriisi

Kuvaa $\bar{X} = (x_1, x_2) \longmapsto$

$$(\mathrm{ref}\,\vartheta)\,\bar{X} = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

vastaa peilausta S_α origon kautta kulkevassa suorassa $\alpha = [u]$,



$$u = \left(\cos\frac{\vartheta}{2}, \sin\frac{\vartheta}{2}\right) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$

$\varphi = \frac{\vartheta}{2}$ on peilausakselin α kallistuskulma

Kahden peilausmatriisin tulo on kiertomatriisi:

$$(\mathrm{ref}\,\vartheta_1)(\mathrm{ref}\,\vartheta_2) = \begin{pmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ \sin\vartheta_1 & -\cos\vartheta_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\vartheta_2 & \sin\vartheta_2 \\ \sin\vartheta_2 & -\cos\vartheta_2 \end{pmatrix}$$

$S_\alpha \circ S_\beta =$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & -\sin(\vartheta_1-\vartheta_2) \\ \sin(\vartheta_1-\vartheta_2) & \cos(\vartheta_1-\vartheta_2) \end{pmatrix}$$

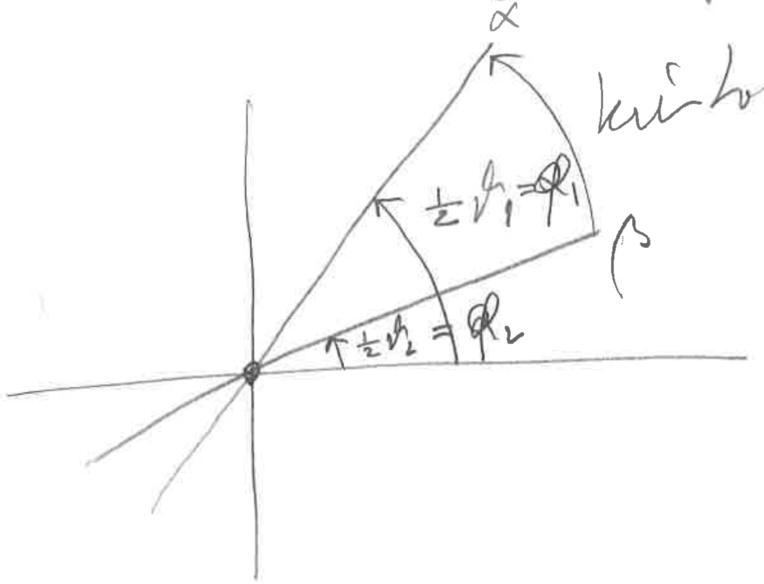
$$= \mathrm{rot}\,(\vartheta_1-\vartheta_2)$$

(2)

Kuvaus $\bar{x} \mapsto (\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta)(\bar{x}) =$

$$\mathrm{rot}(\vartheta_1 - \vartheta_2)(\bar{x}) = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta_1-\vartheta_2) & -\sin(\ ) \\ \sin(\ ) & \cos(\ ) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

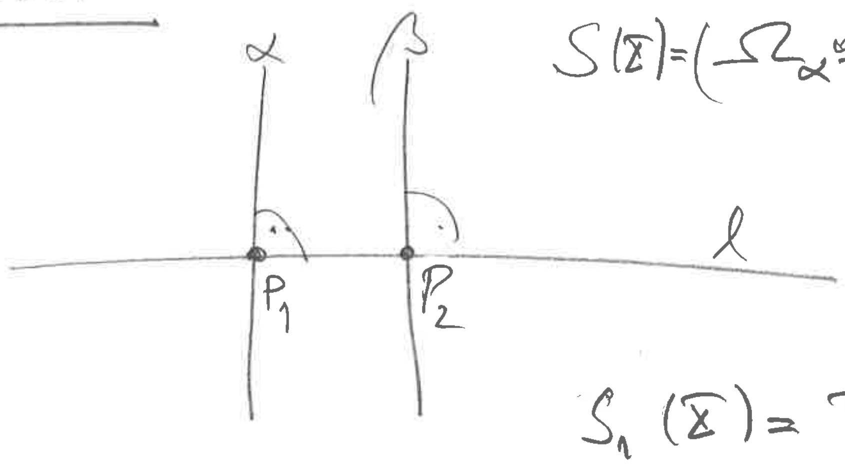
esittää kiertoa kulman $\frac{1}{2}(\vartheta_1 - \vartheta_2) = \underline{\varphi_1 - \varphi_2}$ verran origon ympäri.



Kuvausten yhdistäminen on $\overbrace{\text{kierto-}}^{\text{(matriisien kertominen)}}$ kulmien yhteenlasku

$$(\mathrm{rot}\ \vartheta_1)(\mathrm{rot}\ \vartheta_2) = \mathrm{rot}(\vartheta_1 + \vartheta_2)$$

<u>Siirrot</u>



$$S(\bar{x}) = (\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta)(\bar{x}) = \bar{x} + \underbrace{2(P_1 - P_2)}_{v \text{ siirtovektori}}$$

$$S_1(\bar{x}) = \bar{x} + v_1$$

-37"- $S_2(\bar{x}) = \bar{x} + v_2$

(3)

Kuvausten yhdistäminen on siirto-vektorien yhteenlaskua:

$$(S_1 \circ S_2)(\overline{X}) = \overline{X} + (v_1 + v_2)$$

Vastaavuus ~~peilausten~~ kierto:

P_1 ja P_2 vastaavat kallistuskulmia

φ_1 ja φ_2. Siirtovektori on $2(P_1 - P_2)$

Kiertokulma on $2(\varphi_1 - \varphi_2)$

Siirtojen yhdistäminen on siirtovektorien yhteenlasku, kiertojen yhdistäminen on kiertokulmien yhteenlasku.

Näin ollen Lause 7.1 vastaa Lausetta 8.2 (ns. 3 peilauksen lause toisen 3. peil. lausetta)

Vastaavasti Siirtojen esityslause 7.2 suoraviivaisesti antaa suoraan ~~ta~~ suuraavan kiertojen esityslauseen:

$\delta = [u]$, $u = (\cos(\varphi - \psi + \vartheta), \sin(\varphi - \psi + \vartheta))$. □

8

9.2.2006

Huomaamme, että Lauseen 2 todistuksessa suorien suuntavektorien vaihekulmat käyttäytyvät samalla tavalla kuin siirtovektorit A, B ja C Lauseen 7.1 todistuksessa.

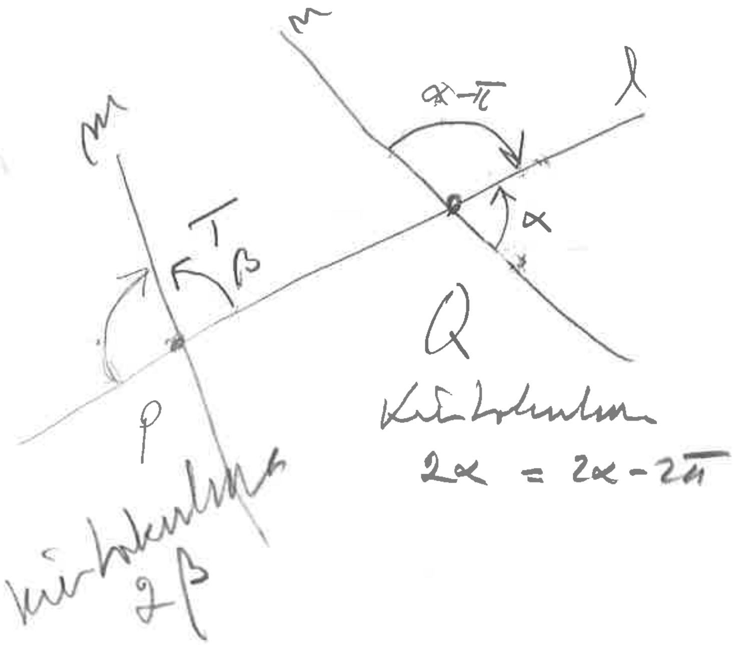
Lause 3. (Kiertojen esityslause) Olkoon $T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ kierto pisteen P ympäri ja olkoon l jokin P:n kautta kulkeva suora. Silloin on olemassa pisteen P kautta kulkevat suorat m ja m' siten, että

$$T = \Omega_l \circ \Omega_m = \Omega_{m'} \circ \Omega_l .$$

Todistus. Kts. Lauseen 7.2 todistus. □

Esim Kahden kierron yhdiste

Olkoon T ~~$= \Omega_\alpha \Omega_\beta$~~ kierto pisteen P ympäri ja S ~~$= \Omega_\gamma \Omega_\delta$~~ kierto pisteen $Q \neq P$ ympäri. Millainen kuvaus on $T \circ S$



Olkoon $l = \overleftrightarrow{PQ}$.
Lause 3 $\Longrightarrow \exists$ suorat m ja n siten, että $P \in m$, $Q \in n$ ja

$$T = \Omega_m \circ \Omega_l$$

$$S = \Omega_l \circ \Omega_n$$

Silloin $T \circ S = \Omega_m \circ \Omega_l \circ \Omega_l \circ \Omega_n$

$$= \Omega_m \circ \Omega_n .$$

1) Jos $m \parallel n$, niin $T \circ S$ on siirto suorien yht. normaalin suuntaan

2) Jos m ja n leikkaavat pisteessä R, on $T \circ S$ kierto pisteen R ympäri.

Kiinnitetään piste P. Kierrot P:n ympäri muodostavat ryhmän, joka on isomorfinen muotoa

$$\begin{pmatrix}\cos t & -\sin t\\ \sin t & \cos t\end{pmatrix}$$

olevien matriisien ryhmän kanssa. ~~Nama~~ Tämä matriisiryhmä on siis "matemaattinen malli" pisteen P ympäri tapahtuvien kiertojen ryhmälle. Kaikkien pisteisiin $P \in E^2$ liittyvät kiertojen ryhmät ovat siis isomorfisia, joten niillä on ~~sama~~ yhteinen ~~malli~~ "matem. malli".

~~Siirtojen ryhmä on myös isomorfinen~~

9. Liukupeilaukset

Yhdistämällä siirto pitkin suoraa l ja peilaus Ω_l suoraan l saadaan uusi isometriatyyppi, jota kutsutaan *liukupeilaukseksi*.

Olkoon T siirto pitkin suoraa l.

$$l = P + [v], \quad |v| = 1 \text{ ja } N = v^{\perp}.$$

Merkitään

$u \parallel v$ ja $u = T(P) - P.$

Silloin $T(\overline{X}) = \overline{X} + u$ kaikilla $\overline{X} \in E^2$, joten

$$T(\Omega_l(\overline{X})) = \overline{X} - 2\langle \overline{X} - P, N\rangle N + u.$$

Toisaalta

$$\Omega_l(T(\overline{X})) = T(\overline{X}) - 2\langle T(\overline{X}) - P, N\rangle N =$$

$$\overline{X} + u - 2\langle \overline{X} + u - P, N\rangle N =$$

$$\overline{X} + u - 2\langle \overline{X} - P, N\rangle N - 2\langle u, N\rangle N =$$

$$\overline{X} - 2\langle \overline{X} - P, N\rangle N + u =$$

$$T(\Omega_l(\overline{X})),$$

koska $u \perp N$.

Silloin $T = \Omega_a \circ \Omega_b$, $a \perp l$, $b \perp l$; $\Omega_b \circ \Omega_l$ kommutoivat

$T \circ \Omega_l = \Omega_a \circ \Omega_b \circ \Omega_l = \Omega_a \circ \Omega_l \circ \Omega_b = \Omega_l \circ \Omega_a \circ \Omega_b$

<u>Määritelmä 1.</u> Kuvausta $\Omega_l \circ T = T \circ \Omega_l$ kutsutaan *liukupeilaukseksi*, jonka *akseli* on l.

Jos $T = Id$, niin $\Omega_l \circ T = T \circ \Omega_l = \Omega_l$, jolloin sanotaan, että liukupeilaus on *triviaali*. Peilaus suoraan l on siis triviaali liukupeilaus.

Lause 1. (Kolmas kolmen peilauksen lause) Olkoot α, β ja γ kolme eri suoraa, jotka eivät ole konkurrentteja eivätkä yhdensuuntaisia. Silloin

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma$$

on ei-triviaali liukupeilaus.

Todistus. Ainakin kaksi suorista α, β ja γ leikkaa toisensa. Oletetaan, että α ja β leikkaavat toisensa pisteessä P. Valitaan suorat l, m, n ja n' siten, että seuraavat ehdot toteutuvat:

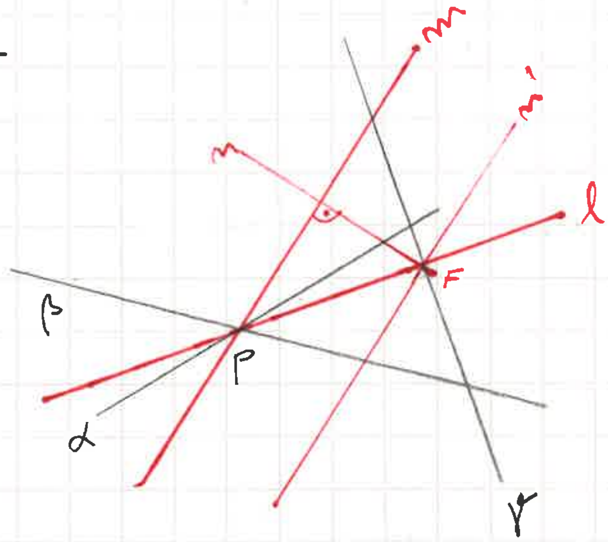
1) $P \in l$, $l \perp \gamma$, olkoon

~~2)~~ F suorien l ja γ leikkauspiste

2) $P \in m$ ja $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta = \Omega_m \circ \Omega_l$ (Lause 8.3.)

3) $F \in n$ ja $n \perp m$

4) $F \in n'$ ja $n' \perp n$ eli $n' \parallel m$



Nyt on

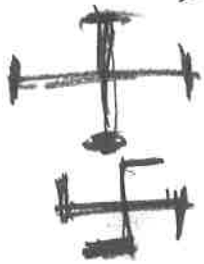
$$\Omega_l \circ \Omega_\gamma = \Omega_{n'} \circ \Omega_n,$$ (puolikierto F:n ympäri)

joten

$$\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma = \Omega_m \circ \Omega_l \circ \Omega_\gamma = \Omega_m \circ \Omega_{n'} \circ \Omega_n .$$

Nyt $\Omega_m \circ \Omega_{n'}$ on siirto pitkin suoraa n, joten $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma$ on aito liukupeilaus, jonka akselina on n.

Neljä symmetrian lajia:

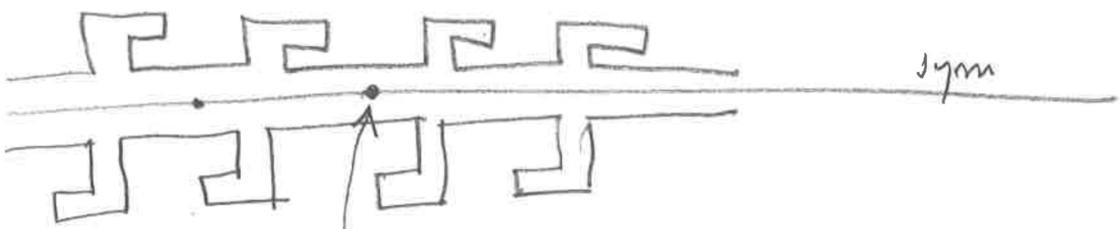


symm. Peilauksia Kiertoja

Vain Kiertoja

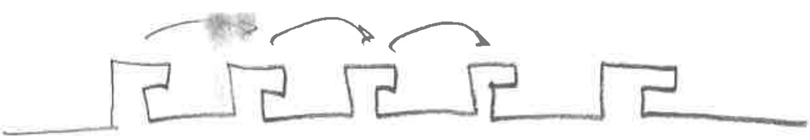
liike vain yhteen suuntaan

2)



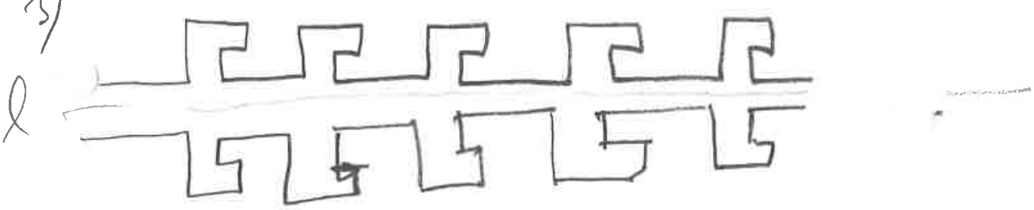
Symmetria: kierto 180°

1)



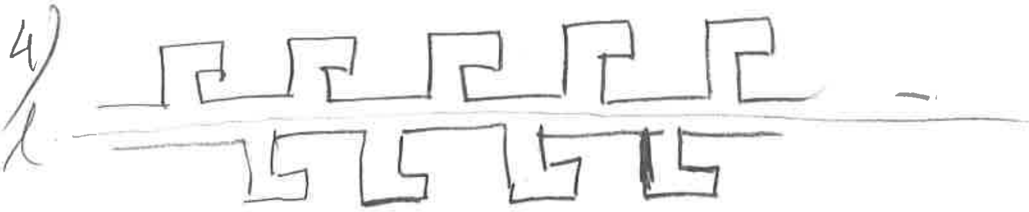
Symmetria: siirto

3)



Symmetria: Peilaus

4)



Symmetria: Liukupeilaus (tuiskettuma siirto)

*) **Huom** Jos suora vai kaari, siis esim. $\gamma = \alpha$, (Huom: tent.) niin $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\alpha$ on peilaus, siis triviaali-liukupeilaus. Samoin $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\beta = \Omega_\alpha$ ja $\Omega_\alpha \circ \Omega_\alpha \circ \Omega_\alpha = \Omega_\alpha$.

Huom

Jos suorat α ja β eivät leikkaa toisiaan, niin suorien β ja γ on leikattava toisensa, muutoin α, β ja γ olisivat keskenään yhdensuuntaisia. Väite seuraa nyt soveltamalla eo. päättelyä kuvaukseen

*) $(\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\gamma)^{-1} = \Omega_\gamma \circ \Omega_\beta \circ \Omega_\alpha$. □

19.2.2004

Lause 2. Olkoon T liukupeilaus ja Ω_α peilaus. Silloin $\Omega_\alpha \circ T$ on joko siirto tai kierto.

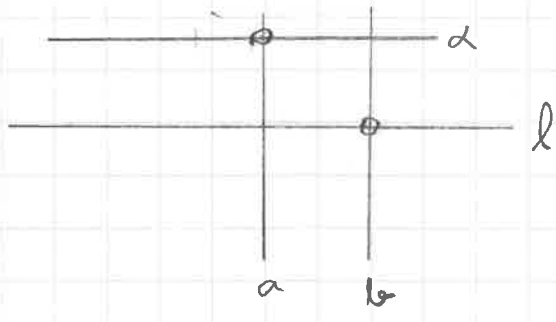
Todistus. Olkoon l liukupeilauksen T akseli, ja olkoot a ja b suoran l normaaleja siten, että

$$T = \Omega_l \circ \Omega_a \circ \Omega_b.$$

1) $l \parallel \alpha$. Silloin

$$\Omega_\alpha \circ T = \Omega_\alpha \circ \Omega_l \circ \Omega_a \circ \Omega_b,$$
$$= \Omega_\alpha \circ \Omega_a \circ \Omega_l \circ \Omega_b,$$

koska $\Omega_l \circ \Omega_a$ on puolikierto ja sama kuin $\Omega_a \circ \Omega_l$.

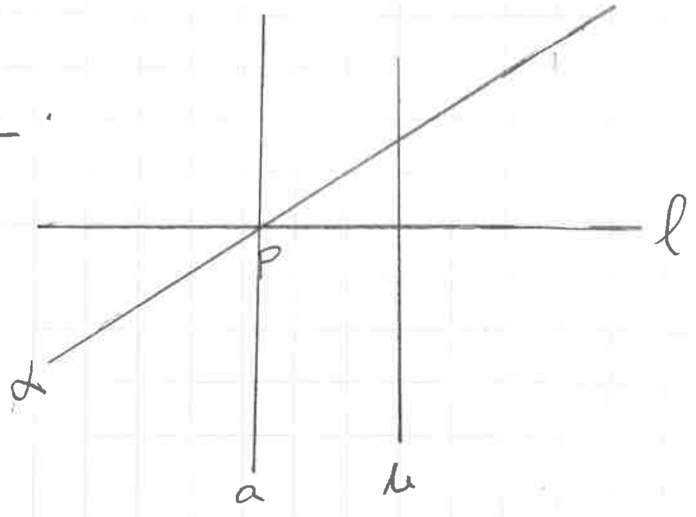


Kuvaukset $\Omega_\alpha \circ \Omega_a$ ja $\Omega_l \circ \Omega_b$ ovat puolikiertoja, joten niiden yhdistelmä $\Omega_\alpha \circ T$ on siirto (Lause 8.1).

2) $l \not\parallel \alpha$. Olkoon P suorien l ja α leikkauspiste. Siirtojen esityslauseen (Lause 7.2) nojalla voidaan olettaa, että a kulkee P:n kautta. Kolmen peilauksen lauseen (Lause 8.2) nojalla on olemassa P:n kautta kulkeva

(9)

suora c siten, että
$\Omega_\alpha \circ \Omega_\ell \circ \Omega_a = \Omega_c$.
Silloin



$$\Omega_\alpha \circ T = \Omega_\alpha \circ \Omega_\ell \circ \Omega_a \circ \Omega_b = \Omega_c \circ \Omega_b$$

on siirto tai kierto. □

(kun $c \| b$)

Suorien c ja b leikk.
pisteen ympäri (kun ...)

Kop.

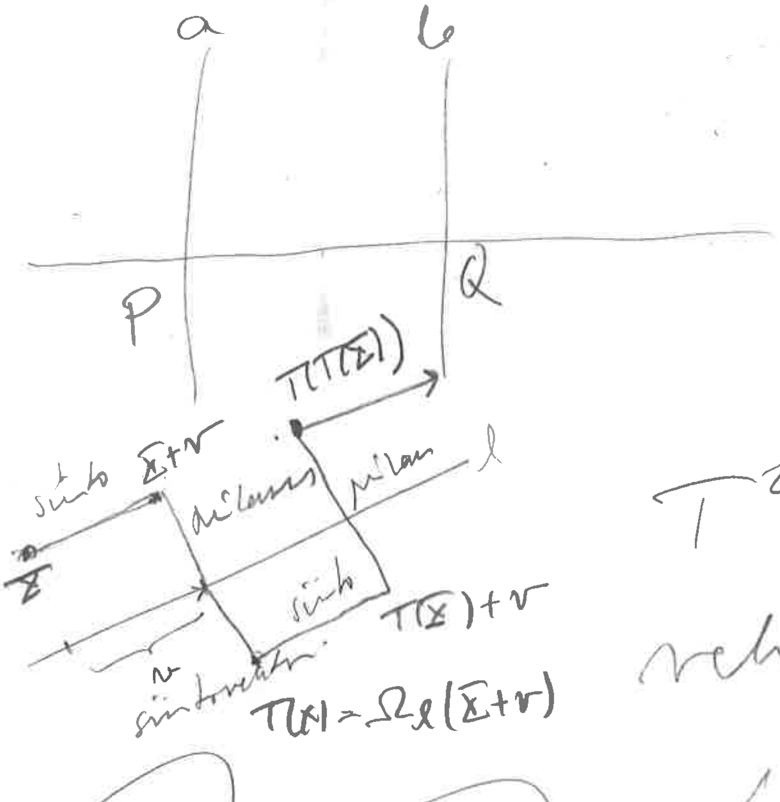
Kalle.
Emin

T liukupeilaus. Mikä on T^2? Olkoon T:n akseli l ja $a \perp l$, $b \perp l$ siten, että

$$T = \Omega_a \circ \Omega_b \circ \Omega_l = \Omega_l \circ \Omega_a \circ \Omega_b$$

$$T^2 = \Omega_a \circ \Omega_b \circ \Omega_l \circ \Omega_l \circ \Omega_a \circ \Omega_b$$

$$= \Omega_a \circ \Omega_b \circ \Omega_a \circ \Omega_b$$



$\Omega_a \circ \Omega_b$ siirto, siirtovektori $2(P-Q)$

T^2 siirto, siirtovektori $4(P-Q)$

~~Kolmen peilauksen lause~~ $2P-Q$

$$\Omega_a \circ \Omega_b \circ \Omega_a$$

$$\Omega_a \circ \Omega_b \circ \Omega_b^{-1} \circ \Omega_a^{-1} = Id$$

$$\Omega_a \circ \Omega_b = (\Omega_b \circ \Omega_a)^{-1}$$

10. Isometriaryhmä

Tason yhtenevyyskuvaukset eli isometriat muodostavat ryhmän (Lause 5.6.).

Lause 1. Jokainen isometria on joko
(i) identtinen kuvaus $Id: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ tai
(ii) peilaus suorassa tai
(iii) siirto pitkin suoraa tai
(iv) kierto tai
(v) (ei-triviaali) liukupeilaus.

Todistus. Olkoon $T: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, $T \neq Id$, isometria. Lauseen 6.3 nojalla T on joko (a) peilaus, (b) kahden peilauksen yhdiste tai (c) kolmen peilauksen yhdiste.
Kohta (a) on selvä. Kohdassa (b) peilausakselit joko leikkaavat, jolloin T on kierto, tai ovat yhdensuuntaisia, jolloin T on siirto. Kohdassa (c) T on joko peilaus (Lause 7.1 ja Lause 8.2) tai liukupeilaus (Lause 9.1). □

Miten tiedetään, ettei liukupeilaus ole aina triviaali? Miksi kolmen peilauksen yhdiste ei aina ole peilaus?
Piste P on isometrian T kiintopiste, jos $T(P) = P$.
Luokitellaan isometrioiden kiintopisteet:

(i) Identtisen kuvauksen kiintopisteinä ovat kaikki tason pisteet.
(ii) Peilauksen kiintopisteinä ovat (ainoastaan) kaikki peilausakselin pisteet.
(iii) Siirrolla ei ole kiintopisteitä.
(iv) Kierron kiintopiste on (ainoastaan) kierron keskipiste.
(v) Liukupeilauksella ei ole kiintopisteitä.

Perustelut jätetään asiattomiksi työläiksi, joten ne voidaan aluksi sivuuttaa.

Ainoastaan peilaukselle (ja identtiselle kuvaukselle) on kiintopistesuora, ts. suora, jonka kaikki pisteet ovat kiintopisteitä.

Suoraa l kutsutaan isometrian T kiintosuoraksi, jos $T(l) = l$. Kiintosuoran pisteiden ei tietenkään tarvitse olla T:n kiintopisteitä; Kiintopistesuora on kiintosuora.

(i) Identtisen kuvauksen kiintopistesuoria ja siis myös kiintosuoria ovat kaikki tason suorat.

(ii) Peilauksen kiintosuoria ovat peilausakseli (joka on myös…) ja kaikki tämän normaalit.

(iii) Siirron kiintosuoria ovat kaikki siirtovektorin suuntaiset suorat.

(iv) Puolikierrolla on kiintosuorina kaikki kierron keskipisteen kautta kulkevat suorat. Muilla kierroilla ei ole kiintosuoria.

(v) Liukupeilauksella on kiintosuorana (ainoastaan) akseli.

Perustelut voidaan sivuuttaa samasta syystä kuin edellä.

Kun kiintopisteet ja kiintosuorat on luokiteltu, voidaan havaita, että isometrialuokat (i)–(v) ovat aidosti erilaisia.

Ovatko perustelut työläitä? Eivät välttämättä, jos käytetään 8 §:n alun kaltaista normeerausta.

Perustelu. Tarkastellaan esimerkkinä ei-triviaali liukupeilaus T. Samalla perusteella (Koordinaatit.) kuin 8 §:n alussa voidaan olettaa, että T:n akselina on x_1-akseli. Silloin

$$T(x_1, x_2) = (x_1 + a, -x_2).$$

Kiintopisteet:

$$T(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \iff$$

$$\begin{cases} x_1 + a = x_1 \\ x_2 = -x_2 \end{cases}$$

$$\iff a = 0 \text{ ja } x_2 = 0.$$

T on triviaali liukupeilaus.
T:llä ei kiintopisteitä.

Kiintosuorat Olkoon l suora

1) l on x_1-akselin suuntainen

$$l = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = c\}$$

$$T(l) = \{(y_1, y_2) \mid y_2 = -c\}$$

$T(l) = l \iff c = 0$ eli l on x_1-akseli.

2) l leikkaa x_1-akselin pisteessä $(d, 0)$

$T(l)$ leikkaa x_1-akselin pisteessä $(d+a, 0)$

$T(l) \neq l$ eli l ei ole kiintosuora.

T siirto pitkin suoraa l

Olk. $a \perp l$ ja $b \perp l$ siten, että

$$T = \Omega_a \circ \Omega_b$$

$\Omega_a \circ \Omega_l$ ja $\Omega_b \circ \Omega_l$ ovat vaihdannaisia, joten

$\Omega_a \circ \Omega_l = \Omega_l \circ \Omega_a$

$\Omega_b \circ \Omega_l = \Omega_l \circ \Omega_b$

Silloin $\underline{T \circ \Omega_l} = \Omega_a \circ \Omega_b \circ \Omega_l =$

$= \Omega_a \circ \Omega_l \circ \Omega_b = \Omega_l \circ \Omega_a \circ \Omega_b$

$$\underline{= \Omega_l \circ T}$$

Liukupeilaus T on tapana hajottaa siirroksi S ~~ss~~ akselin l suuntaan ja peilaukseksi Ω_l:

$$T = S \circ \Omega_l = \Omega_l \circ S.$$

Lauseen 1 todistuksessa tarkasteltiin ~~kuva~~ liukupeilausta

$$T = (\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta) \circ \Omega_\gamma,$$

missä $\Omega_\alpha \circ \Omega_\beta$ on kierto pisteen P ympäri ja Ω_γ peilaus suoran γ, joka ei kulje P:n kautta.
Liukupeilauksen hajottaminen kierron ja peilauksen yhdistelmäksi ei ole yhtä luonteva kuin siirron ja peilauksen yhdistelmäksi. ~~tavallisimmassa~~ ~~tama~~ ~~hajotelmaa~~ etu on esim. siinä, että ~~siinä~~ ~~hajotelmassa~~ siirron ja peilauksen ~~vaiko~~ ~~hajoittaa~~ järjestys on vapaavalintainen.

Esim. Olkoon T liukupeilaus. Mikä kuvaus on $T^2 = T \circ T$?

11. Kulmista

Alkeisgeometriassa kulma ja kulman mittaaminen ovat käsitteitä, joita on vaikea selittää tyydyttävällä tavalla.

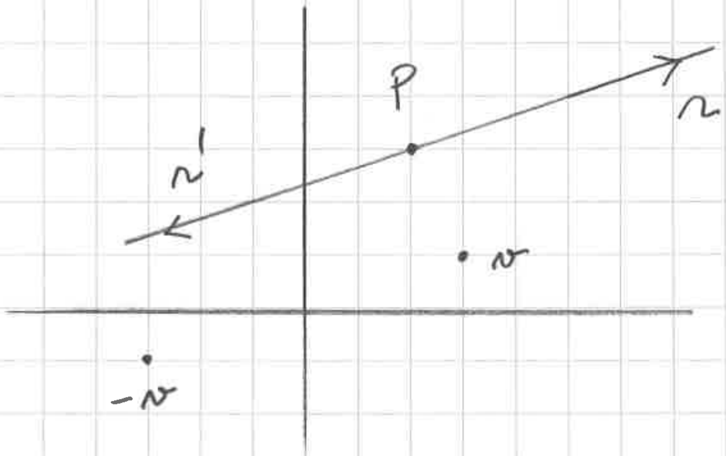
Olkoon $P \in E^2$ piste ja $v \neq 0$ vektori. Joukkoa

$$r = \{P + tv \mid t \geq 0\}$$

kutsutaan säteeksi eli puolisuoraksi, jonka alkupiste on P ja suunta on v.
Suora

$$l = P + [v]$$

on puolisuorien r ja $r' = \{P + t(-v) \mid t \geq 0\}$ yhdiste. Näillä on sama alkupiste, mutta niiden suunnat ovat toisilleen vastakkaiset.

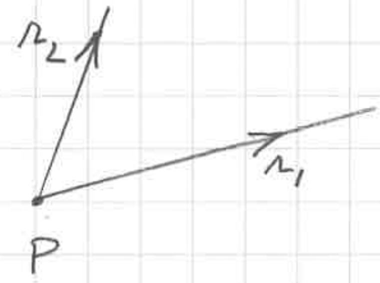


$$l = r \cup r', \quad \{P\} = r \cap r'.$$

Jokainen annetun suoran piste jakaa siis suoran kahdeksi puolisuoraksi, joiden yhdiste suora on ja joiden leikkausjoukko on ko. piste.

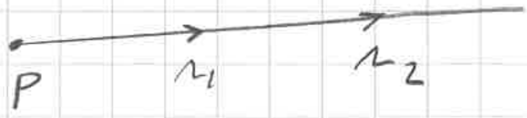
25.2.2004

Olkoot r_1 ja r_2 kaksi puolisuoraa (säteitä), joilla on sama alkupiste P ja joiden suuntavektorit ovat v_1 ja v_2.

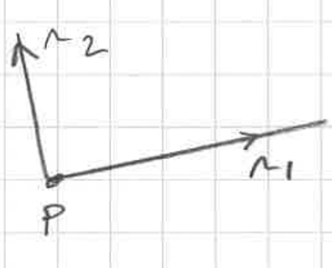


Yhdistettä $A = r_1 \cup r_2$ kutsutaan kulmaksi. Piste P on kulman kärki ja puolisuorat r_1 ja r_2 ovat kulman kyljet.

Jos $r_1 = r_2$, niin A on nollakulma



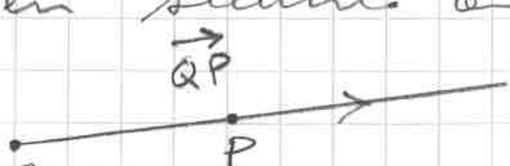
Jos $r_1 \perp r_2$ (ts. jos $v_1 \perp v_2$), niin A on suora kulma.



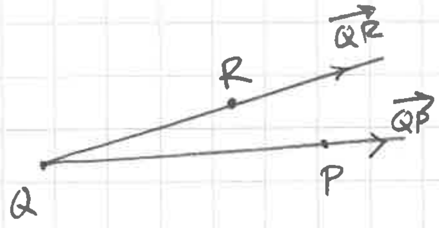
Jos $v_1 = -v_2$, niin A on oikokulma.

Oikokulman tapauksessa on oleellista, että kulman kärki P on annettu. Suora l ei siis ole oikokulma.

Kaksi eri pistettä P ja Q määräävät yksikäsitteisen puolisuoran $\overrightarrow{QP}$ jonka alkupisteenä on Q ja joka kulkee P:n kautta. Sen suunta on $v = P - Q$.



Merkintä $\measuredangle PQR$ tarkoittaa kulmaa, jonka kärki on Q ja kyljet ovat $\overrightarrow{QP}$ ja $\overrightarrow{QR}$



Oppikirjat Lähde

Funktiot $\cos: \mathbb{R} \to [-1,1]$ ja $\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$ määritellään kaavoilla (tai laskimella!)

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

Selvästi $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$ ja $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ (koska $D(\sin^2 x + \cos^2 x) = 0$).

Pienimmälle positiiviluvulle x, jolle $\sin x = 0$ ja $\cos x = -1$, käytetään merkintää π. Välillä $[0,\pi]$ funktio $\cos x$ on aidosti vähenevä. On siis olemassa käänteisfunktio

$$\cos^{-1}: [-1,1] \to [0,\pi].$$

22.2.06

Olkoot nyt u ja v kaksi yksikkövektoria. Cauchyn epäyhtälön nojalla on

$$|\langle u,v\rangle| \le |u||v| = 1,$$

joten $\cos^{-1}\langle u,v\rangle$ on määritelty ja

$$0 \le \cos^{-1}\langle u,v\rangle \le \pi.$$

<u>Määritelmä 1.</u> Olkoon A kulma, jonka kyljillä on suuntina yksikkövektorit u ja v. Kulman A <u>radiaanimitalla</u> tarkoitetaan lukua $\alpha = \cos^{-1}\langle u, v\rangle$. vert.!

Koulukirjoissa kulmaan liittyvien käsitteiden määritelmät eivät ole vakiintuneet.

1926 (Nevanlinna - Nevanlinna): <u>Kulmalla</u> tarkoitetaan kahden samasta pisteestä lähtevän puolisäteen välistä tasopintaa. Kulma voidaan ajatella syntyvän siten, että liikkuva puolisäde kääntyy alkupisteensä (kulman kärjen) ympäri määrättyyn suuntaan, myötäpäivään: ↻ tahi vastapäivään: ↺ toisesta asemasta (kulman <u>alkukyljestä</u>) toiseen (kulman <u>loppukylkeen</u>), pysyen yhä samassa tasossa.

1956 (Kallio - Malmio - Apajalahti) Jos puolisäde kääntyy tasossa alkupisteensä ympäri muodostavat sen alku- ja loppuasemat suureen, jota sanotaan kulmaksi.

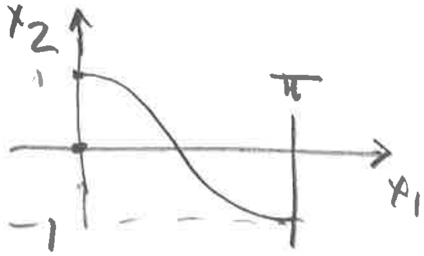
1968-1971 (Ranta - Leikonen) Kulma on säteen kääntyessä tasossa alkupisteensä ympäri sen kääntymisalueeseen jäävien tason pisteiden joukko

Tapana oli siten kiistellä, tarkoitetaanko kulmalla vain kylkiä (1956) vai kylkien rajaamaa tason osaa, kulman aukeamaa. (1968 - 71).

1948 (Väisälä) Kahden samasta pisteestä alkavan puolisuoran rajoittamaa tason osaa kutsutaan <u>kulmaksi</u>. Takaisin sivulle 47

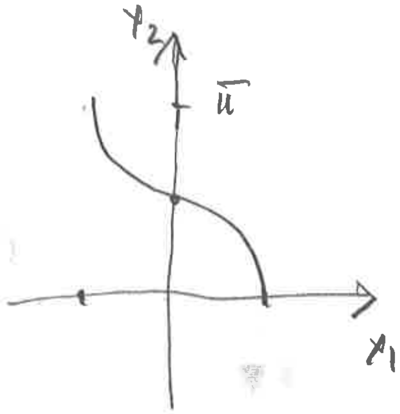
~~Katso~~
Samasta pisteestä alkavat puolisuorat määrittelevät siis <u>kaksi</u> kulmaa, jotka ovat ns. eksplementtikulmia;
Paitsi ~~niinikään~~ 1956.

Esimerkki:



$$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$$

$$\cos^{-1} : [-1, 1] \to [0, \pi]$$



Taylorin polynomi:

arc ~~sin~~ x

$$\cos^{-1}(x) \approx \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112} + \frac{35x^9}{1152} \right)$$

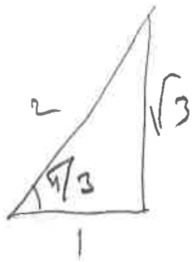
Lasketaan tämän avulla likiarvo vektorien $u = (7, 7\sqrt{3})$ ja $v = (13, 0)$ välisen kulman radiaanimitalle α:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{\langle u, v \rangle}{|u|\,|v|} \right)$$

$\langle u, v \rangle = 7 \cdot 13$

$|u| = \sqrt{49 + 3 \cdot 49} = 2 \cdot 7$

$|v| = 13$



$$\alpha = \cos^{-1} \frac{7 \cdot 13}{2 \cdot 7 \cdot 13} = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Tarkka arvo on siis $\alpha = \frac{\pi}{3}$

Likiarvo: $\frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{8\cdot 6} + \frac{3}{8\cdot 4\cdot 40}\right.$

$$\left. + \frac{5}{8\cdot 4\cdot 4\cdot 112} + \frac{35}{8\cdot 4\cdot 4\cdot 4\cdot 1152}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{48} + \frac{3}{1280} + \frac{5}{14336} + \frac{35}{589824}\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \underbrace{\left(0,523585\right)}_{\approx \pi/3} \approx 1,04721$$

$$(\quad) \approx \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$$

Sulkulauseke antaa siis likiarvon luvulle $\pi/6$. Näin ollen

$$\pi \approx 6 \cdot 0,523585 = 3,14151$$

Ei kovin huonosti!

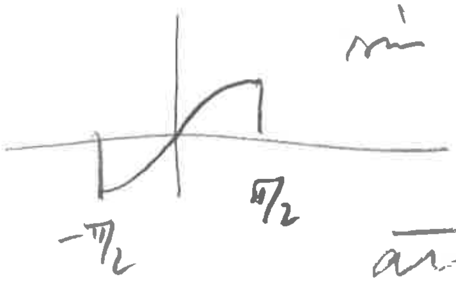
$$\pi \approx 3,14159$$

$\cos^{-1} x$ on sama kuin funktion

$\operatorname{arc}\cos x$ päähaara $\overline{\operatorname{arc}}\cos x$.

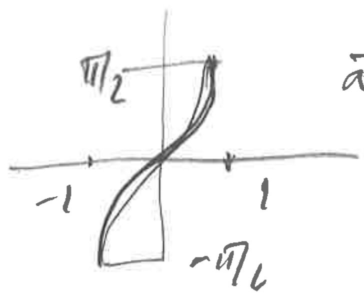
Funktion $\operatorname{arc}\sin x$ päähaara on ~~sin~~ $\overline{\operatorname{arc}}\sin x$ on määritelty

kuvaus $[-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$

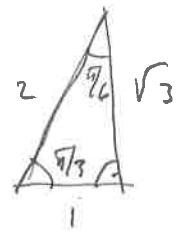


$\sin : [-\pi/2, \pi/2] \rightarrow [-1, 1]$

$\overline{\operatorname{arc}}\sin x : [-1, 1] \longrightarrow [-\pi/2, \pi/2]$



$\overline{\operatorname{arc}}\sin$

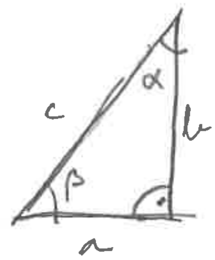


$$\overline{\operatorname{arc}}\sin \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}$$

$$\overline{\operatorname{arc}}\cos \frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$$

Yleisesti:



$$\overline{\operatorname{arc}}\cos \frac{a}{c} = \beta$$

$$\overline{\operatorname{arc}}\sin \frac{a}{c} = \alpha$$

Merk. $x = \dfrac{a}{c}$

$$\alpha + \beta = \pi/2$$

$\overline{\operatorname{arc}}\sin x + \overline{\operatorname{arc}}\cos x$ $= \alpha + \beta$

$= \pi/2$

(h ' h)

(ε + l ' ε - l -)

Lause 1. Olkoon A kulma, jonka kyljillä on suuntina yksikkövektorit u ja v. Silloin A:n radiaanimitta on se yksikäsitteisesti määrätty reaaliluku $\alpha \in [0, \pi]$, jolle

$$\mathrm{rot}\,\alpha\,(u) = v \quad \text{tai} \quad \mathrm{rot}\,\alpha\,(v) = u.$$

Todistus. Merkitään

$$u = (\cos\vartheta, \sin\vartheta) \text{ ja } v = (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

1. Olkoon α kulman A radiaanimitta. Määritelmän 1 perusteella

$$\alpha = \cos^{-1}(\cos\vartheta\cos\varphi + \sin\vartheta\sin\varphi)$$
$$= \cos^{-1}(\cos(\vartheta - \varphi)),$$

joten

$$\cos\alpha = \cos(\vartheta - \varphi) = \cos(\varphi - \vartheta)$$

Näin ollen $\sin\alpha = \pm\sin(\vartheta - \varphi)$. Oletetaan esim., että

$$\sin\alpha = -\sin(\vartheta - \varphi) = \sin(\varphi - \vartheta)$$

Silloin

$$\mathrm{rot}\,\alpha\,(u) = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} \overset{\text{sijoitus ja laskut}}{=}$$

$$[(\cos\alpha\cos\vartheta - \sin\alpha\sin\vartheta,\ \sin\alpha\cos\vartheta + \cos\alpha\sin\vartheta) =$$
$$(\cos(\varphi-\vartheta)\cos\vartheta - \sin(\varphi-\vartheta)\sin\vartheta,$$
$$\sin(\varphi-\vartheta)\cos\vartheta + \cos(\varphi-\vartheta)\sin\vartheta)] =$$
$$(\cos(\varphi-\vartheta+\vartheta),\ \sin(\varphi-\vartheta+\vartheta)) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$$
$$= v.$$

Jos taas $\sin\alpha = \sin(\vartheta - \varphi)$, on vastaavasti

$$\operatorname{rot}_\alpha(v) = u.$$

2. Olkoon kääntäen $\operatorname{rot}_\alpha(u) = v$ tai $\operatorname{rot}_\alpha(v) = u$, $\alpha \in [0, \pi]$. On näytettävä, että α on A:n radiaanimitta.
Tarkastellaan esim. tapausta $\operatorname{rot}_\alpha(u) = v$. Silloin aiemman nojalla on

$$v = \operatorname{rot}_\alpha(u) = (\cos(\alpha+\vartheta), \sin(\alpha+\vartheta)).$$

Määritelmän 1 nojalla A:n radiaanimitta on

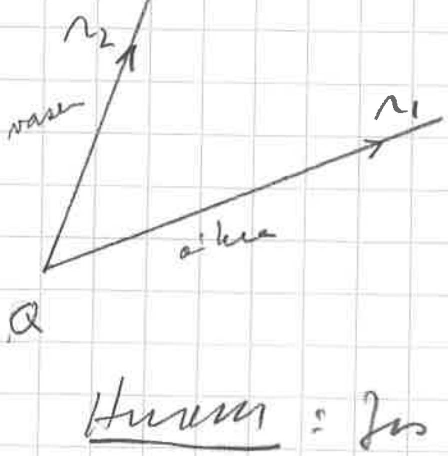
$$\begin{aligned}\cos^{-1}\langle u, v\rangle &= \cos^{-1}(\cos\vartheta\cos(\alpha+\vartheta) + \sin\vartheta\sin(\alpha+\vartheta)) \\ &= \cos^{-1}(\cos(\alpha+\vartheta-\vartheta)) = \cos^{-1}(\cos\alpha) \\ &= \alpha. \ \square\end{aligned}$$

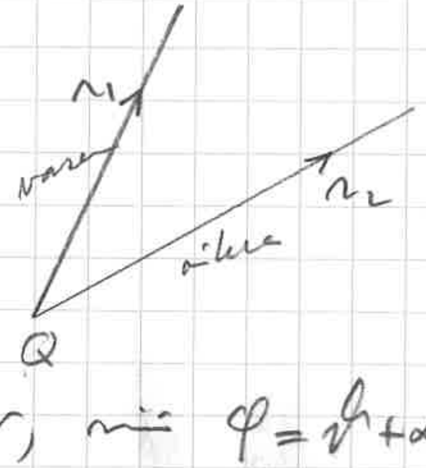
26.2.2004

23.2.05 Olkoon A kulma, jonka kylkinä ovat puolisuorat

$$r_1 = \{Q + t v_1 \mid t \geq 0\} \text{ ja } r_2 = \{Q + t v_2 \mid t \geq 0\}.$$

Olkoon A:n radiaanimitta α ja T kierto Q:n ympäri kulman α verran.

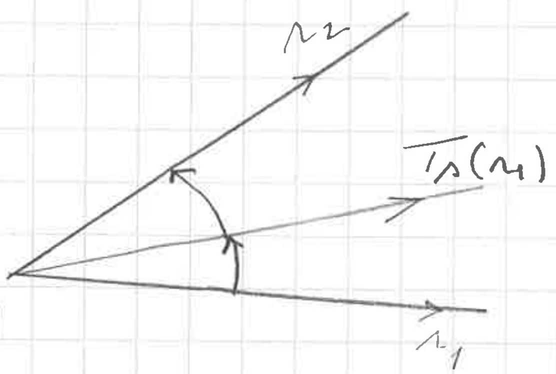




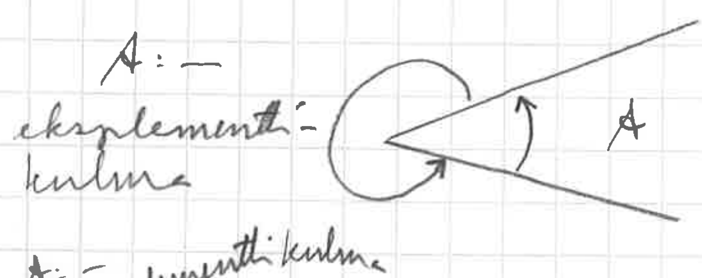
Huom: Jos $\operatorname{rot}_\alpha(u) = v$, niin $\varphi = \vartheta + \alpha$

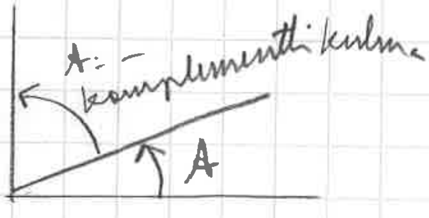
Oletetaan, että $\alpha \neq 0$ ja $\alpha \neq \pi$. Silloin (Lause 1) joko $T(r_1) = r_2$ tai $T(r_2) = r_1$. Edellisessä tapauksessa r_1 on kulman A oikea kylki ja r_2 sen vasen kylki. Jälkimmäisessä tapauksessa r_2 on oikea ja r_1 vasen kylki.

28.2. Olemme (ehkä ensimmäisen kerran) onnistuneet määrittelemään vasemman ja oikean. Voidaan myös sanoa, että kiertosuunta oikealta vasemmalle tapahtuu vastapäivään: Jos T_s on kierto kulman $s\alpha$ verran, $0 \le s \le 1$, ja r_1 on kulman A oikea kylki, niin $T_s(r_1)$ kiertyy vastapäivään l. positiiviseen kiertosuuntaan asennosta r_1 asentoon r_2, kun s kasvaa 0:sta 1:een. (vrt. Nevanlinna-Nevanlinna Geometria) Tähän palataan kohta.

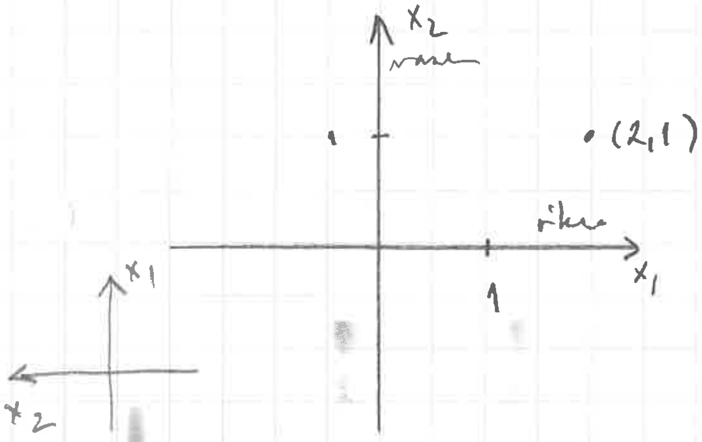


Selvyyden vuoksi käsittelemme vain kulmia, joiden radiaanimitta on korkeintaan π. Tätä suurempien kulmien eksplementtikulmat ovat radiaanimittaltaan välillä $[0,\pi]$.

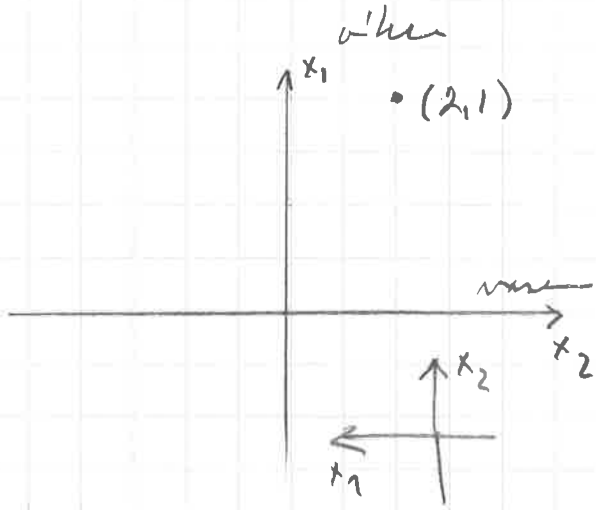




Huom. Vasemman ja oikean erottaminen $\mathbb{R}^2$:ssa onnistuu, koska tasoa voidaan "katsoa vain yhdeltä puolelta". Avaruudessa $\mathbb{R}^3$ tai tätä useampiulotteisissa avaruuksissa $\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5, \dots$ tilanne monimutkaistuu. Vasen ja oikea riippuvat tietysti myös siitä, miten koordinaatisto piirretään. Ei ole mitään yleiskäyttöistä tapaa piirtää kuvaa tasosta $\mathbb{R}^2$.



"Tavallinen kuva" $\mathbb{R}^2$:sta.



"Peilikuva" $\mathbb{R}^2$:sta.

Jos maailma muuttuisi peilikuvakseen, niin me emme huomaisi mitään. Myöskään edellä kehitelty geometria ei muuttuisi millään tavalla. Sama teoria voi siis kuvata kahta erilaista mallia eikä näitä malleja voida ko. teorian avulla erottaa toisistaan.

Trigonometristen funktioiden ominaisuuksien perusteella saadaan yhteenvetona

Lause 2. Olkoon α kulman A radiaanimitta. Silloin

(i) $\alpha = 0$, jos ja vain jos A on nollakulma,

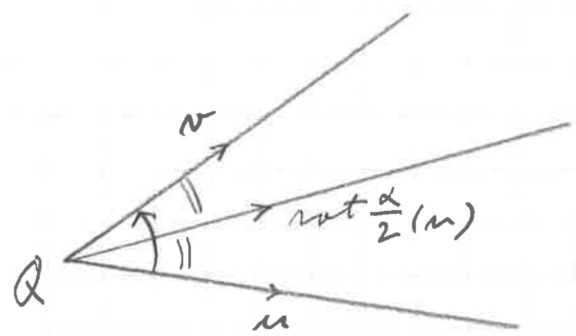
(ii) $\alpha = \pi$, jos ja vain jos A on oikokulma,

(iii) $0 \leq \alpha \leq \pi$,

(iv) $\alpha = \pi/2$, jos ja vain jos A on suora kulma.

Olkoon α kulman A radiaanimitta. Jos $0 \leq \alpha < \pi/2$, niin A on <u>terävä kulma</u>. Jos $\pi/2 < \alpha \leq \pi$, niin A on <u>tylppä kulma</u>.

<u>Määritelmä 2.</u> Olkoon A kulma, jonka kärki on Q ja radiaanimitta on α. Olkoot u ja v sen kylkien yksikkösuuntavektorit siten, että $\mathrm{rot}_\alpha(u) = v$. <u>Kulman</u> A <u>puolittajalla</u> tarkoitetaan puolisuoraa, jonka alkupiste on Q ja suunta on $w = \mathrm{rot}_{\frac{\alpha}{2}}(u)$.



$v = \mathrm{rot}_\alpha(u)$

$w = \mathrm{rot}_{\frac{\alpha}{2}}(u)$

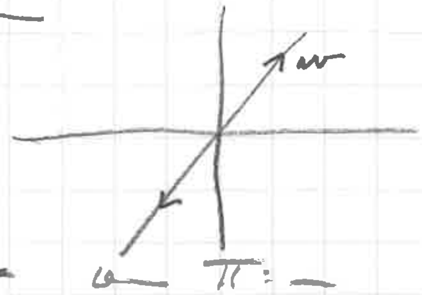
<u>Lause 3.</u> Olkoon A kulma. Silloin on olemassa yksikäsitteisesti määrätty peilaus Ω_l, joka kuvaa kulman A kyljet toisilleen. Suora l määrää kulman A puolittajan.

Todistus. (Suora lasku) Olkoot $u = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$ ja $v = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ kulman A kylkien yksikkösuunt. vektorit. Olk. (oletus) kulman kärki Q origo. Muodostetaan peilaus

$$\mathrm{ref}_{\frac{\vartheta+\varphi}{2}} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta+\varphi) & \sin(\vartheta+\varphi) \\ \sin(\vartheta+\varphi) & -\cos(\vartheta+\varphi) \end{pmatrix}.$$

Peilausakselina on origon kautta kulkeva suora l, jonka suuntavektori on (kulma kärjessä l.)

$$w = \left(\cos\frac{\vartheta+\varphi}{2}, \sin\frac{\vartheta+\varphi}{2}\right)$$



(Suuntavektorin w vaihekulma on π:n monikertaa vaille yksikäsitteisesti määrätty.)

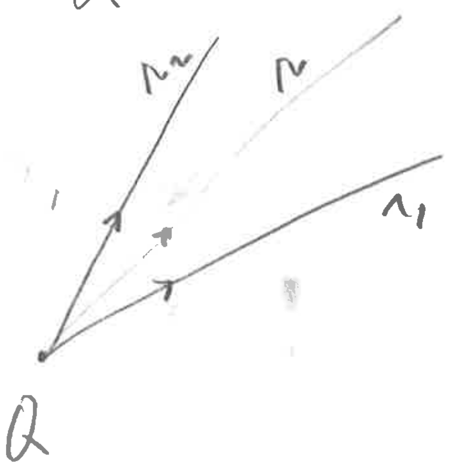
A kulma, jolla

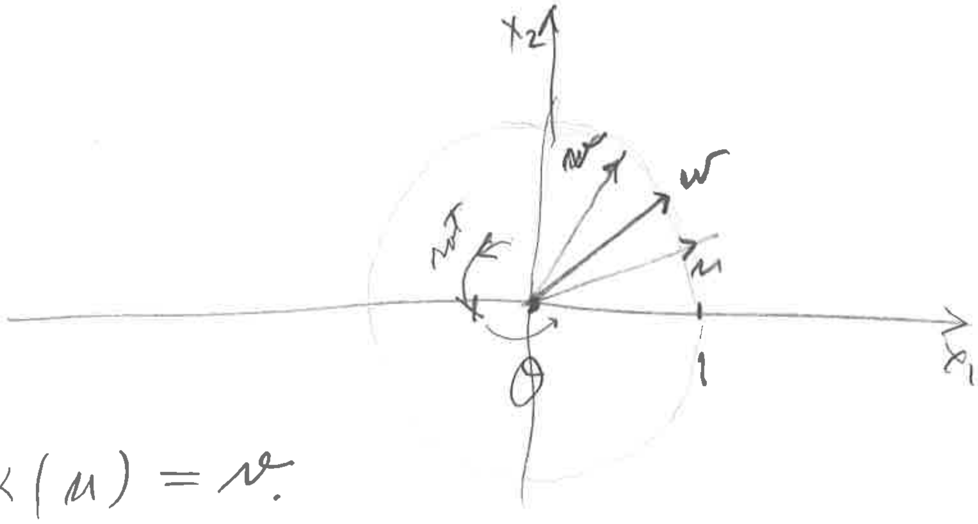
Q kärki

$r_1 = \{Q + tu \mid t \geq 0\}$, $|u| = 1$, oikea kylki

$r_2 = \{Q + tv \mid t \geq 0\}$, $|v| = 1$, vasen kylki

α radiaanimitta. $0 \leq \alpha \leq \pi$





Silloin $\mathrm{rot}\,\alpha(u) = v$.

Olkoon $w = \mathrm{rot}\,\frac{\alpha}{2}(u)$.

Säde $r = \{Q + tw \mid t \geq 0\}$ on <u>kulman</u> A <u>puolittaja</u>.

<u>Lause 3</u>

Olk T kierto, jolla $T(r_1) = r_2$. T kiertää kulman α verran pisteen Q ympäri.

Todistus. Alussa eo. merkinnöin

$$u = (\cos\vartheta, \sin\vartheta),$$
$$v = (\cos\varphi, \sin\varphi), = \mathrm{rot}\,\alpha\,(u)$$
$$w = (\cos\psi, \sin\psi). = \mathrm{rot}_{\frac{\alpha}{2}}(u)$$

Silloin (Lause 1) $\varphi = \vartheta + \alpha$, ja vastaavasti $\psi = \vartheta + \frac{\alpha}{2} = \vartheta + \frac{\varphi - \vartheta}{2} = \frac{\vartheta + \varphi}{2}$.

Näin ollen

$$w = \left(\cos\frac{\vartheta+\varphi}{2}, \sin\frac{\vartheta+\varphi}{2}\right).$$

Suora $l = Q + [w]$ täyttää vaad. ehdot.

Tämän perustelu on lyhyt lasku. Oletetaan, että Q on origo. Silloin

$$\Omega_l(u) = \mathrm{ref}(\vartheta+\varphi)\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\vartheta+\varphi) & \sin(\ ) \\ \sin(\ ) & -\cos(\ )\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}$$

$$= \left(\cos(\vartheta+\varphi)\cos\vartheta + \sin(\ )\sin\vartheta, \sin(\ )\cos\vartheta - \cos(\ )\sin\vartheta\right)$$

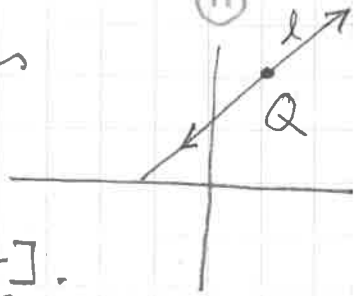
$$= \left(\cos(\vartheta+\varphi-\vartheta), \sin(\vartheta+\varphi-\vartheta)\right)$$

$$= (\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Suora l yksikäsitteisyys (tehtävä) selvä. □

Olkoon τ_Q siirto $x \mapsto x+Q$. Kuvaus

$$T_\ell = \tau_Q \circ \mathrm{refl}_{2\frac{\vartheta+\varphi}{2}} \circ \tau_{-Q}$$



on peilaus suorassa $\ell = Q + [w]$.
Tarkastellaan kulman A kylkiä

$$r_1 = \{Q + tu \mid t \geq 0\}$$

ja

$$r_2 = \{Q + tv \mid t \geq 0\}.$$

Silloin

$$T_\ell(Q+tu) = Q + \mathrm{refl}_{2\frac{\vartheta+\varphi}{2}}(tu) =$$

$$Q + t\begin{pmatrix}\cos(\vartheta+\varphi) & \sin(\vartheta+\varphi)\\ \sin(\vartheta+\varphi) & -\cos(\vartheta+\varphi)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix} =$$

$$Q + t\big(\cos(\vartheta+\varphi-\vartheta), \sin(\vartheta+\varphi-\vartheta)\big) =$$

$$Q + tv,$$

joten $T(r_1) = r_2$ ja myös $T(r_2) = r_1$.

Olkoon $T_{\ell'}$ jokin peilaus, jolle $T_{\ell'}(r_1) = r_2$ ja $T_{\ell'}(r_2) = r_1$. Koska $(T_{\ell'} \circ T_\ell)(r_1) = r_1$ ja $(T_{\ell'} \circ T_\ell)(r_2) = r_2$, on $(T_{\ell'} \circ T_\ell)(Q) = Q$, joten

$$Q = (T_{\ell'} \circ T_\ell)(Q) = T_{\ell'}(T_\ell(Q)) = T_{\ell'}(Q).$$

Suora ℓ' kulkee siis Q:n kautta (Lause 5.2), joten $T_{\ell'} \circ T_\ell$ on kierto Q:n ympäri. Koska $T_{\ell'} \circ T_\ell$ pitää kulman kyljet paikallaan, on $T_{\ell'} \circ T_\ell = id$ (harj. teht.), ja siis $T_{\ell'} = T_\ell$. □

Lausetta 2 käytetään paljon alkeisgeometrisissä päättelyissä ja konstruktioissa, vaikka sen perusteleminen niissä yhteyksissä saattaa olla hankalaa.

Lause 4 Olkoon A kulma ja T isometria. Silloin $T(A)$ on kulma, jolla on sama radiaanimitta kuin kulmalla A.

Lemma Olkoon S isometria, jolle $S(0) = 0$. Jos u ja v ovat kaksi vektoria, niin

$$\langle u, v \rangle = \langle S(u), S(v) \rangle .$$

Todistus. Koska $|u| = |u - 0|$, on $|S(u)| = |S(u) - 0| = |S(u) - S(0)| = |u - 0| = |u|$ ja vastaavasti $|v| = |S(v)|$. (Isometriana S säilyttää etäisyydet.) Silloin

$$|u - v|^2 = \langle u - v, u - v \rangle = |u|^2 + |v|^2 - 2\langle u, v \rangle,$$

joten

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}\left[-|u - v|^2 + |u|^2 + |v|^2\right].$$

Vastaavasti

$$\langle S(u), S(v) \rangle = \frac{1}{2}\left[-|S(u) - S(v)|^2 + |S(u)|^2 + |S(v)|^2\right].$$

Koska S on isometria, on $|S(u) - S(v)| = |u - v|$. Kaikenkaikkiaan on

$$\langle S(u), S(v) \rangle = \frac{1}{2}\left[-|u - v|^2 + |u|^2 + |v|^2\right] = \langle u, v \rangle . \square$$

Lauseen todistus. Olkoon $S(X) = T(X) - T(0)$. Silloin $S : E^2 \to E^2$ on isometria, jolle

$$S(0) = T(0) - T(0) = 0 .$$

Näin ollen S on joko kierto origon ympäri tai peilaus origon kautta kulkevassa suorassa.

Kuvaust. S esittää siis joko peilausmatriisin tai kiertomatriisin (tai $S = Id$). Joka tapauksessa $S: E^2 \to E^2$ on lineaarikuvaus.

Olkoon $A = r_1 \cup r_2$, missä

$$r_1 = \{Q + tu \mid t \geq 0\}, \quad |u| = 1,$$

$$r_2 = \{Q + tv \mid t \geq 0\}, \quad |v| = 1.$$

Koska $T(X) = S(X) + T(0)$, on S:n lineaarisuuden nojalla

$$\begin{aligned} T(Q + tu) &= S(Q + tu) + T(0) \\ &= S(Q) + t\,S(u) + T(0) \\ &= T(Q) - T(0) + t\,S(u) + T(0) \\ &= T(Q) + t\,S(u). \end{aligned}$$

Siis

$$T(r_1) = \{T(Q) + t\,S(u) \mid t \geq 0\}$$

ja

$$T(r_2) = \{T(Q) + t\,S(v) \mid t \geq 0\}.$$

Lemman todistuksen perusteella $|S(u)| = |S(v)| = 1$. Näin ollen $T(A)$ on kulma, jonka kylkinä ovat puolisuorat $T(r_1)$ ja $T(r_2)$. Olkoon A:n radiaanimitta α sekä $T(A)$:n radiaanimitta α'. Silloin Lemman nojalla

$$\alpha = \cos^{-1}\langle u, v\rangle = \cos^{-1}\langle S(u), S(v)\rangle = \alpha'. \ \square$$

Esimerkki. Olkoon l suora, joka ei kulje origon kautta. Tutkitaan Lauseen 4 todistusta valitsemalla $T = \Omega_l$.
Miksi on nyt kuvaus

$$S(X) = T(X) - T(0)\ ?$$

Olkoon V siirto $X \mapsto X - T(0)$. Silloin

$$S = V \circ T.$$

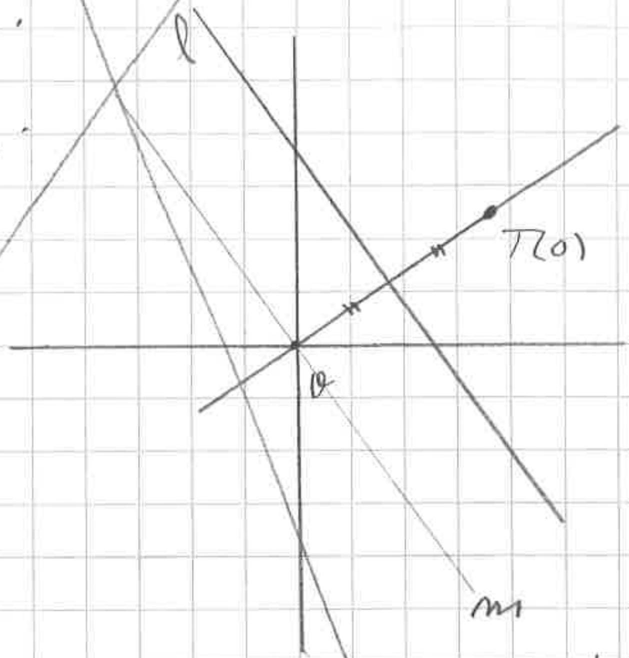
Olkoon $m \parallel l$, $0 \in m$.

Silloin $V = \Omega_m \circ \Omega_l$.
(Perustelu?), joten

$$S = (\Omega_m \circ \Omega_l) \circ \Omega_l$$

$$= \Omega_m \circ (\Omega_l \circ \Omega_l)$$

$$= \Omega_m.$$



Kuvaus S on siis peilaus origon kautta kulkevassa suorassa, joten sitä todellakin vastaa peilausmatriisi. Lauseen todistus tuntuisi siis olevan kunnossa. Mutta eihän pitäisi kuitenkaan koskaan varmaksi tietää ... .

Lause 5. Kulman A puolittaja jakaa kulman kahdeksi kulmaksi, joiden molempien radiaanimitta on puolet A:n radiaanimitasta.

Todistus. Määritelmä 2, Lause 1, Lause 3 ja Lause 4. □

Sanaa "jakaa" selvitellään kohta lauseissa 12.3 (korollaari) ja 13.3.

25. 2. 2005 2. välikoe ↓ (12)

12. Puolitaso ja kulman aukeama

Olkoot P, Q ja R kolme ei-kollineaarista pistettä. Silloin vektorit $P-Q$ ja $P-R$ ovat lineaarisesti riippumattomia. Jokaista pistettä X vastaa yksikäsitteisesti määrätyt luvut ξ_1 ja ξ_2 siten, että

$$X - P = \xi_1 (P-Q) + \xi_2 (P-R),$$

jolloin

$$X = (1+\xi_1+\xi_2) P - \xi_1 Q - \xi_2 R.$$

Merkitään $\lambda = 1+\xi_1+\xi_2$, $\mu = -\xi_1$ ja $\nu = -\xi_2$. Silloin

$$X = \lambda P + \mu Q + \nu R,$$

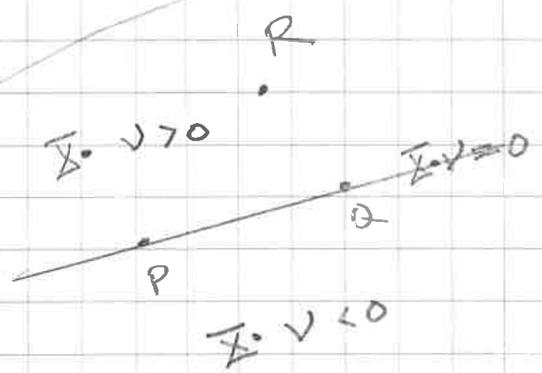
missä $\lambda+\mu+\nu = 1$. Näitä yksikäsitteisesti määrättyjä lukuja kutsutaan pisteen X <u>barysentrisiksi koordinaateiksi</u> pisteiden P, Q ja R suhteen.

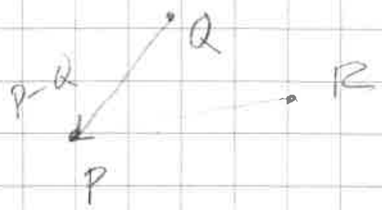
<u>Lause 1.</u> Olkoon $\overleftrightarrow{PQ}$ suora ja $R \notin \overleftrightarrow{PQ}$. Olkoot (λ, μ, ν) pisteen X barysentriset koordinaatit pisteiden P, Q ja R suhteen. Silloin

(i) $\nu = 0 \iff X \in \overleftrightarrow{PQ}$

(ii) $\nu > 0 \iff XR \cap \overleftrightarrow{PQ} = \emptyset$

(eli $X = \lambda P + \mu Q + \nu R$, $\lambda+\mu+\nu = 1$)





Barysentristen koordinaattien ominaisuuksia:

(i) Fysikaalinen tulkinta: Jos pisteisiin P, Q ja R asetetaan massat λ, μ ja ν, $\lambda+\mu+\nu=1$, niin systeemin painopisteen on $\bar{X}=\lambda P+\mu Q+\nu R$.

(ii) Neliösumma

$$f(\bar{X}) = |\bar{X}-P|^2 + |\bar{X}-Q|^2 + |\bar{X}-R|^2$$

saavuttaa absoluuttisen miniminsä pisteessä $\bar{X}=\frac{1}{3}P+\frac{1}{3}Q+\frac{1}{3}R$. Tätä pistettä kutsutaan kolmion PQR sentroidiksi, (vrt. pienimmän neliösumman keino).

(iii) Barysentriset koordinaatit ovat invarianttteja isometriassa: Jos $\bar{X}=\lambda P+\mu Q+\nu R$ ja T on isometria, niin

$$T(\bar{X}) = \lambda T(P) + \mu T(Q) + \nu T(R),$$

(kun $\lambda+\mu+\nu=1$). harj. teht.

Esimerkki: Valitaan $P=(1,0)$, $Q=(0,0)$ ja $R=(0,1)$. Jos $\bar{X}=(x_1,x_2)$ ja

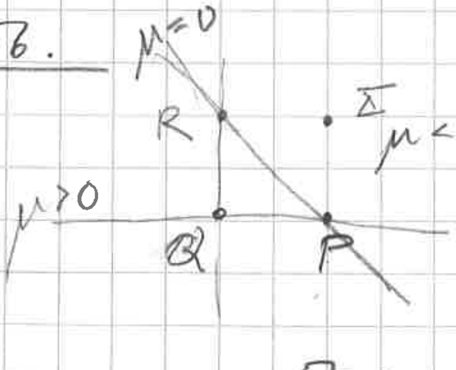
$$\bar{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R, \quad \lambda+\mu+\nu=1,$$

niin $\lambda = x_1$, $\mu = 1-(x_1+x_2)$ ja $\nu = x_2$, sillä

$$\bar{X} = x_1(1,0) + [1-(x_1+x_2)](0,0) + x_2(0,1).$$

4.3.2004

Lause I. s. 56.



$\bar{X}=(1,1)$

$\lambda=1$

$\mu=-1$

$\nu=1$

$\bar{X}=P-Q+R$

Todistus. (i) Jos $\nu = 0$, niin $\lambda = 1-\mu$, joten piste

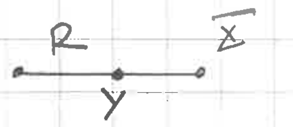
$$\bar X = \lambda P + \mu Q = (1-\mu)P + \mu Q$$

on suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$. [Jos $\bar X \in \overleftrightarrow{PQ}$, niin

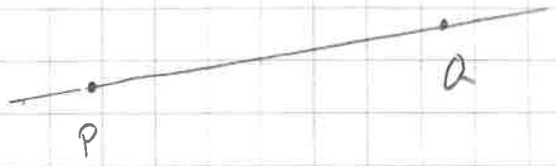
$$\bar X = (1-t)P + tQ$$

jollakin $t \in \mathbb{R}$. Jos $\bar X = \lambda P + \mu Q + \nu R$, niin barysentristen koordinaattien yksikäsitteisyyden nojalla $\lambda = (1-t)$, $\mu = t$ ja $\nu = 0$.

(ii) Olkoon $\bar X = \lambda P + \mu Q + \nu R$ ja $\nu > 0$. Tarkastellaan pistettä $Y \in \bar X R$. Silloin



$$Y = (1-t)\bar X + tR, \quad 0 < t < 1,$$



joten

$$Y = (1-t)(\lambda P + \mu Q + \nu R) + tR$$

$$= (1-t)\lambda P + (1-t)\mu Q + [(1-t)\nu + t]R$$

Koska yksikäsitteisyys mat/bar. koord ja $(1-t)\nu + t > 0$, on (i):n nojalla $Y \notin \overleftrightarrow{PQ}$, joten (Harj. tehtävä)

$$\bar X R \cap \overleftrightarrow{PQ} = \emptyset.$$

Olkoon kääntäen $\nu < 0$. Silloin

$$(1-t)\nu + t = 0 \iff t = \frac{-\nu}{1-\nu}$$ harj. tehtävä.

9.3.06

Koska $0 < t < 1$, on $\bar X R \cap \overleftrightarrow{PQ} \neq \emptyset$. □

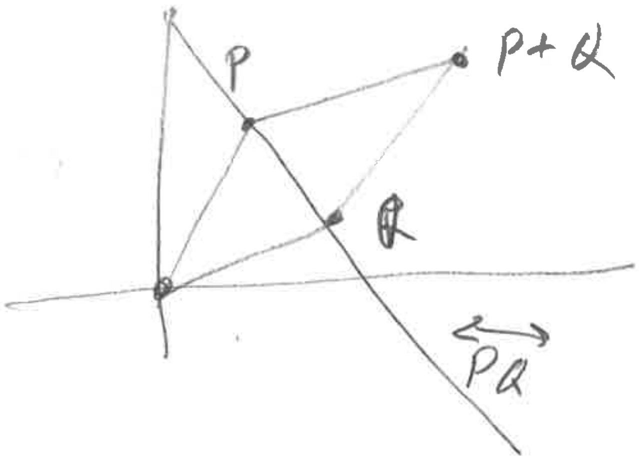
~~Esimerkki:~~

Määritelmä 1. Suoran l ja pisteen $R \notin l$ määräämällä *puolitasolla* tarkoitetaan niiden pisteiden $\bar X$ joukkoa, joille $\bar X R \cap l = \emptyset$.

Huom. Jos $R' \notin l$ ja $RR' \cap l = \emptyset$, niin l ja R määräävät saman puolitason kuin l ja R' (harj. tehtävä). (jatkuvuustarkastelu?)

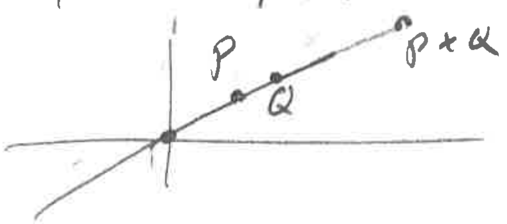
Oleellista on, että käytetään vain erityismuotoja, joissa $\lambda+\mu+\nu = 1$.

Esim.
Varoitus. Piste $X = tP + sQ$ ei (yleensä) ole suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$ kaikilla $t \in \mathbb{R}$ ja $s \in \mathbb{R}$.
Esim. $t = s = 1$, jolloin $t + s = 2$



$X = P+Q \notin \overleftrightarrow{PQ}$

(Poikkeus: Jos $O \in \overleftrightarrow{PQ}$, niin $P+Q \in \overleftrightarrow{PQ}$)

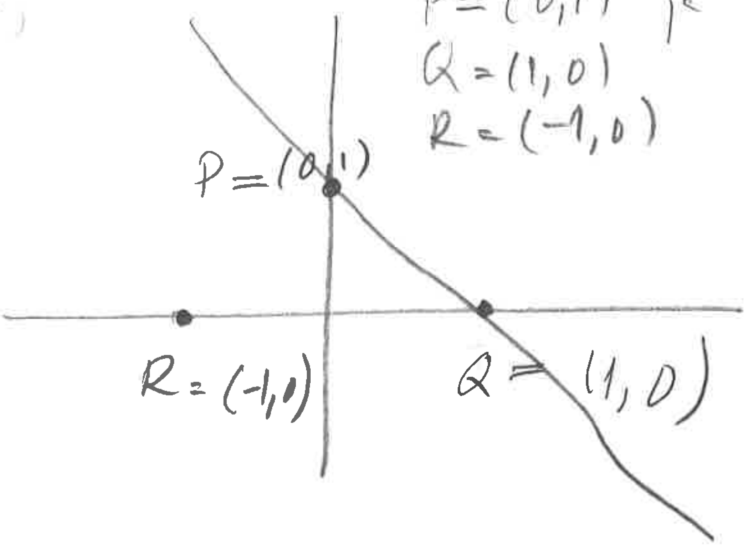


Toisaalta $X = tP + sQ + rR$ voi olla suoralla $\overleftrightarrow{PQ}$, vaikka $r > 0$. Esimerkiksi jos
$P = (0,1)$
$Q = (1,0)$
$R = (-1,0)$
ja $t = s = r = 1$, niin

$$P + Q + Q = P \in \overleftrightarrow{PQ}$$

vaikka $r = 1 > 0$

Tässä $t + s + r = 3$



Lause 2. (i) Jokainen suora l määrää kaksi eri puolitasoa. Peilaus Ω_l kuvaa nämä toisilleen.

(ii) Olkoon $l = \overleftrightarrow{PQ}$, $R \notin l$ ja $\overline{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R$, $\lambda + \mu + \nu = 1$. Silloin l:n ja R:n määräämä puolitaso on joukko $\{\overline{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R \mid \nu > 0\}$, kun taas l:n ja $\Omega_l(R)$:n määräämä puolitaso on joukko $\{\overline{X} \mid \nu < 0\}$.

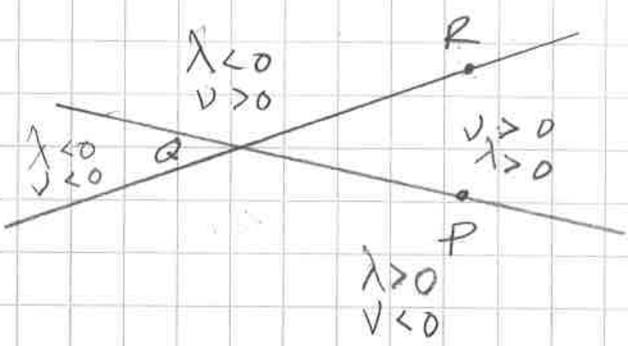
Todistus Harjoitustehtävä. □

8.3.2007

Määritelmä 2. Piste $\overline{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R$, $\lambda + \mu + \nu = 1$, on kulman $\measuredangle PQR$ aukeamassa, jos $\lambda > 0$ ja $\nu > 0$.

— 2.3.2005

Kulman $\measuredangle PQR$ aukeama on siis niiden pisteiden $\overline{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R$ joukko, joille $\lambda > 0$ ja $\nu > 0$.



Kulman aukeama ei riipu pisteiden P ja R valinnasta: Jos $P' \in \overrightarrow{QP}$ ja $R' \in \overrightarrow{QR}$, niin kulmilla $\measuredangle PQR$ ja $\measuredangle P'QR'$ on sama aukeama.

Verrataan koulukirjojen käyttämiä määritelmiä Määritelmään 2.

Olkoon annettuna kulma $\measuredangle PQR$, jonka radiaanimitta on α, $0 < \alpha < \pi$. Oletetaan, että $\overrightarrow{QP}$ on kulman oikea kylki. Muistetaan, että kulman aukeama Määritelmässä 2 riipu siitä, mikä oikean kyljen piste P ja vasemman kyljen piste R valitaan.

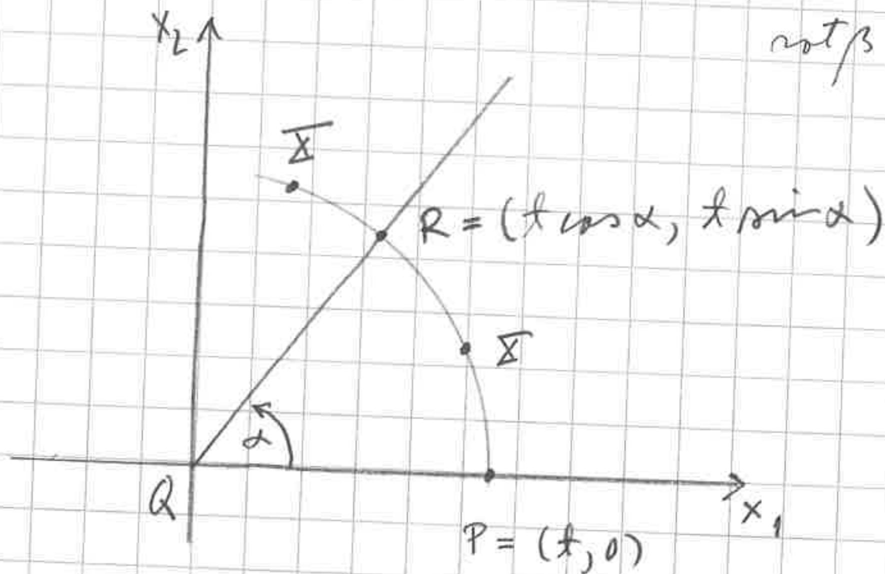
Isometrian avulla voidaan normeerata siten, että Q on origo ja oikea kylki on positiivinen x_1-akseli.

Olkoon $P = (t, 0)$, $t > 0$, oikean kyljen mielivaltainen piste. Piste

$$R = \mathrm{rot}\,\alpha(P) = (t\cos\alpha,\ t\sin\alpha)$$

on kulman vasemmalla kyljellä. Voidaan tarkastella tämän kulman aukeamaa.
$\sphericalangle PQR$

$$\mathrm{rot}\,\beta = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$



Lause 3. Olkoon $0 < \beta < \pi$. Silloin piste

$$\overline{X} = \mathrm{rot}\,\beta\,(P)$$

on kulman $\sphericalangle PQR$ aukeamassa, jos ja vain jos $\beta < \alpha$.

Todistus. Tarkastellaan barysentrisiä koordinaatteja

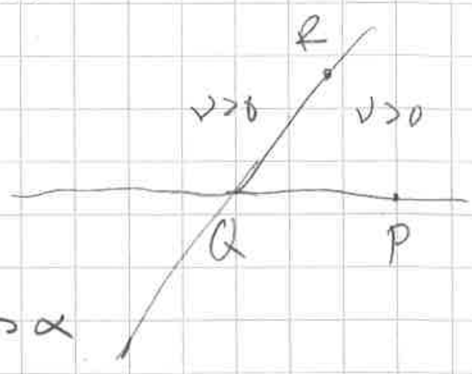
$$\overline{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R$$

pisteiden $P = (t, 0)$, $Q = (0, 0)$ ja $R = (t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ suhteen. Riittää näyttää, että $\lambda > 0$ ja $\nu > 0$, jos ja vain jos $\beta < \alpha$.

Nyt on $\quad \overline{X} = (\lambda t + \nu t\cos\alpha,\ \nu t\sin\alpha)$

Koska $\overline{X} = \mathrm{rot}_\beta(P) = (t\cos\beta, t\sin\beta)$, on

$$\begin{cases} t\cos\beta = \lambda t + \nu t\cos\alpha \\ t\sin\beta = \nu t\sin\alpha \end{cases}$$



Siis
$$\nu = \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} > 0$$

ja
$$\cos\beta = \lambda + \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha$$

joten
$$\lambda = \cos\beta - \frac{\sin\beta}{\sin\alpha}\cos\alpha > 0 \iff$$

$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta =$$

$$\sin(\alpha-\beta) > 0 \iff$$

$$\beta < \alpha. \ \square$$

$\beta - \alpha > 0$

$\beta > \alpha$

Piste $\overline{X}$ on siis kulman aukeamassa, jos ja vain jos kiertokulma on kulman radiaanimittaa pienempi. Määritelmä 2 ja koulukirjojen käyttämä havainnollinen määrittelytapa ovat siis täysin yhdensopivia.

10. 3. 2004

Korollaari. Kulman puolittaja on kulman aukeamassa.

Todistus. Määritelmä 11. 2. □

II Deduktiivistä geometriaa

1 ~~13~~. Kulmia koskevia peruslauseita.

Kulmat $\measuredangle PQR$ ja $\measuredangle STU$ ovat <u>kongruenttejä</u> l. <u>yhteneviä</u>, jos on olemassa isometria, joka kuvaa kulman $\measuredangle PQR$ vasemman kyljen kulman $\measuredangle STU$ vasemmalle kyljelle ja oikean kyljen oikealle kyljelle (eli samannimiset kyljet toisilleen). Kulman radiaanimitta määritellään kierron avulla, joka on isometria.

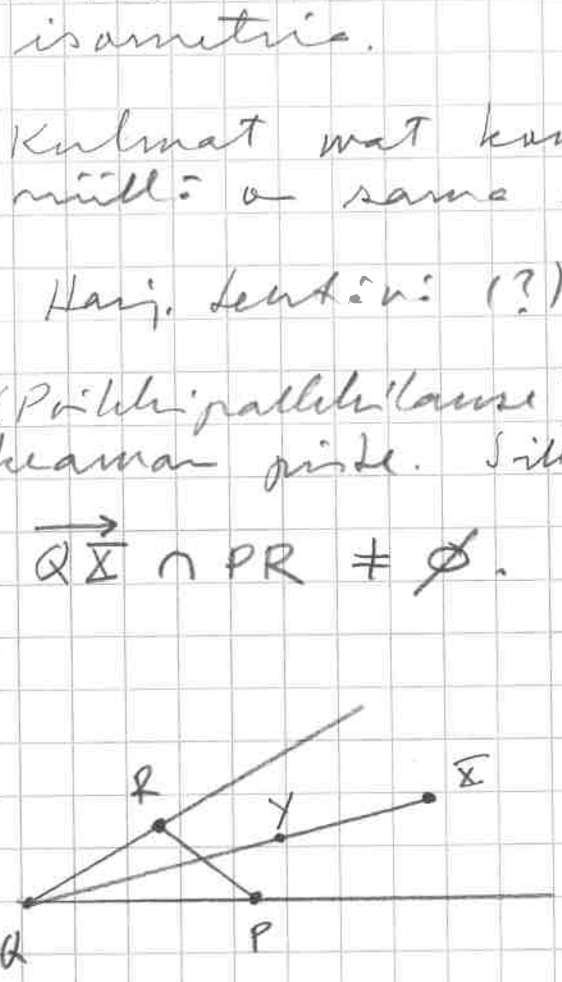
<u>Lause 1.</u> Kulmat ovat kongruentteja, jos ja vain jos niillä on sama radiaanimitta.

Todistus. Harj. tehtävä (?), vt. Lause 11.4. □

9.3.2006

<u>Lause 2.</u> (Poikkipalkkilause). Olkoon X kulman $\measuredangle PQR$ aukeaman piste. Silloin

$$\overrightarrow{QX} \cap PR \neq \emptyset .$$



<u>Todistus.</u> Tarkastellaan barysentrisiä koordinaatteja pisteiden P, Q ja R suhteen. Säteen $\overrightarrow{QX}$ pisteellä Y on esitys

$$Y = Q + t(X - Q), \quad t > 0.$$

On näytettävä, että $Y \in PR$ jollakin arvolla $t > 0$. Olkoon

$$X = \lambda P + \mu Q + \nu R, \quad \text{missä}$$

① ~~13~~

$\lambda + \mu + \nu = 1$ siten $\lambda > 0$ ja $\nu > 0$.

yhdistämällä yhtälöt saadaan

$$Y = (1-t)Q + t\bar{X} = (1-t)Q + t\lambda P + t\lambda Q + t\nu R$$

$$= t\lambda P + (1 - t + t\mu)Q + t\nu R\,,$$

missä kertoimet ovat Y:n barysentrisiä koordinaatteja. Näin ollen (vrt. Lauseen 12.1 tod.)

$$Y \in PR \iff (1 - t + t\mu) = 0$$

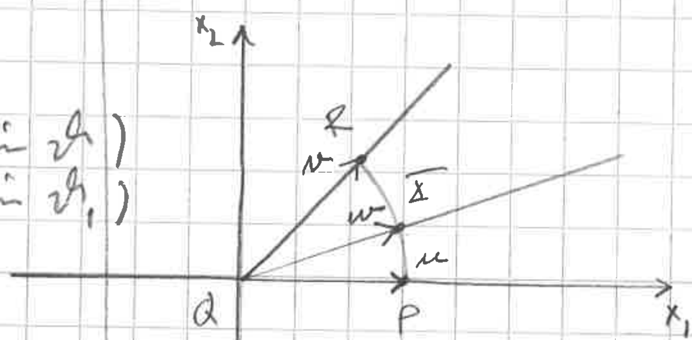
$$\iff t = \frac{1}{1-\mu} = \frac{1}{\lambda+\nu} > 0\,, \quad \square$$

koska tällöin $t\lambda + t\nu = 1$.

Lause 3. (Kulmien yhteenlasku) Olkoon $\bar{X}$ kulman $\measuredangle PQR$ aukeaman piste. Silloin kulman $\measuredangle PQR$ radiaanimitta on kulmien $\measuredangle PQ\bar{X}$ ja $\measuredangle RQ\bar{X}$ radiaanimittojen summa.

Todistus. Olkoon kulman $\measuredangle PQR$ radiaanimitta ϑ, kulman $\measuredangle PQ\bar{X}$ radiaanimitta ϑ_1, sekä kulman $\measuredangle RQ\bar{X}$ radiaanimitta ϑ_2. On siis näytettävä, että $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$.
Oletetaan ensin, että $\vartheta < \pi$. Voimme normeerata isometrian avulla siten, että

$$P = (1, 0)$$
$$Q = (0, 0)$$
$$R = (\cos\vartheta, \sin\vartheta)$$
$$\bar{X} = (\cos\vartheta_1, \sin\vartheta_1)$$



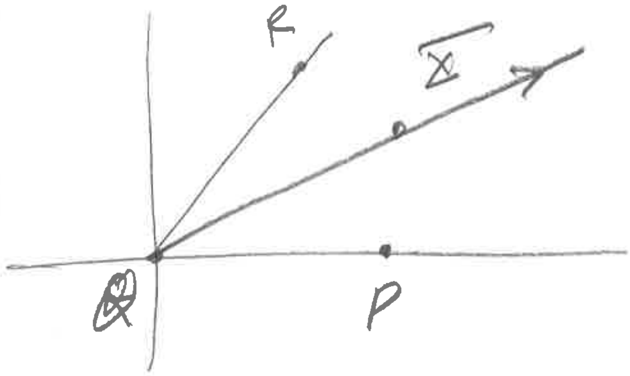
(Radiaanimitat eivät muutu, jos P, $\bar{X}$ ja R valitaan yksikön etäisyydeltä pisteestä Q.)
Ongelmana on näyttää, että $\vartheta_1 < \vartheta$ ja $\vartheta_2 < \vartheta$, jolloin $\vartheta = \vartheta_1 + \vartheta_2$. Periaatteessahan voisi olla esim $\vartheta_1 > \vartheta$ ja $\vartheta = \vartheta_1 - \vartheta_2$. Jos

Todistus

kulman siirto kyllä

Olkoon kulman $\sphericalangle PQR$ radiaanimitta α. Oletetaan, että $\overrightarrow{QP}$ on positiivisella x_1-akselilla ja että

$$\operatorname{rot}_\alpha(\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{QR}. \qquad (\text{Lause I } 11.1)$$



Lauseen I 12.3 nojalla on olemassa $0 < \beta < \alpha$ siten, että

$$\operatorname{rot}_\beta(\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{Q\overline{X}}. \qquad (\text{Lause } 11.1.)$$

Silloin kulman $\sphericalangle PQ\overline{X}$ radiaanimitta on β.
Olkoon $\gamma = \alpha - \beta$. Silloin

$$(*) \qquad \operatorname{rot}_\alpha = \operatorname{rot}_{\gamma+\beta} = \operatorname{rot}_\gamma \circ \operatorname{rot}_\beta$$

joten $\operatorname{rot}_\gamma(\overrightarrow{Q\overline{X}}) = \operatorname{rot}_\gamma(\operatorname{rot}_\beta(\overrightarrow{QP})) = \operatorname{rot}_\alpha(\overrightarrow{QP}) = \overrightarrow{QR}$

Kulman $\sphericalangle RQ\overline{X}$ radiaanimitta on siis γ ja $\alpha = \beta + \gamma$.
Oikokulmalle pätee vastaava tulos. □

Huom yhtälö (*) seuraa laskemalla:

$$\mathrm{rot}_\gamma \circ \mathrm{rot}_\beta = \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\gamma\cos\beta - \sin\gamma\sin\beta & -\cos\gamma\sin\beta - \sin\gamma\cos\beta \\ \sin\gamma\cos\beta + \cos\gamma\sin\beta & -\sin\gamma\sin\beta + \cos\gamma\cos\beta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\gamma+\beta) & -\sin(\gamma+\beta) \\ \sin(\gamma+\beta) & \cos(\gamma+\beta) \end{pmatrix}$$

$$= \mathrm{rot}_{\gamma+\beta} = \mathrm{rot}_\alpha$$

Sinin ja kosinin yht. lask. kaavat ovat siis itse asiassa tulkittavissa matriisituloksi

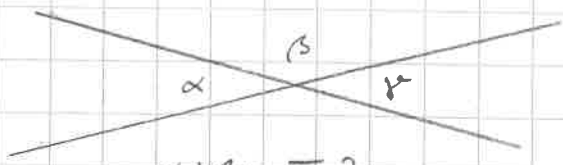
sivut 64–65 poistettu

4.3.2005 14.3.2007 (1) (13)

Jos kaksi suoraa leikkaa toisensa, muodostuu neljä (konveksia) kulmaa. Ne ovat pareittain ristikkäisissä asemissa keskenään. Kahta kulmaa, joiden kyljet ovat toistensa jatkeina, sanotaan *ristikulmiksi*. Kulmia, joilla on yksi yhteinen kylki, sanotaan toistensa *vieruskulmiksi*.

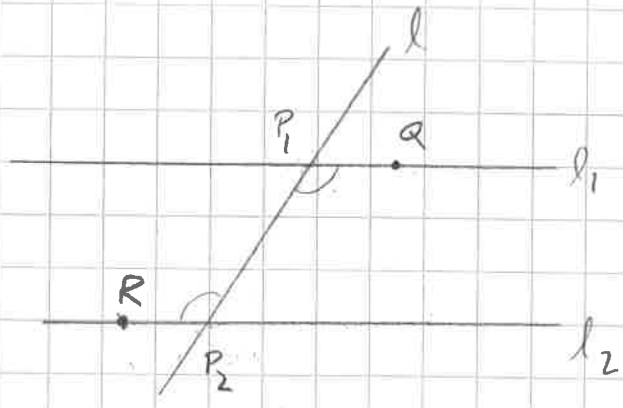
Lause 4. a) Vieruskulmien radiaanimittojen summa on π.
b) Ristikulmilla on sama radiaanimitta.

Todistus. a) Lause 3.
b) Ristikulmat ovat saman kulman vieruskulmia. □



$$\text{Lause 3} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}\alpha+\beta=\pi\\ \gamma+\beta=\pi\end{array}\right\} \Rightarrow \alpha=\gamma.$$

Olkoot l_1 ja l_2 kaksi yhdensuuntaista suoraa, joiden suunta on $[v]$. Olkoon l näitä leikkaava suora. Leikkauspisteet olkoot P_1 ja P_2. Olkoon $Q = P_1 + v$ ja $R = P_2 - v$.



Kulmat $\measuredangle P_2P_1Q$ ja $\measuredangle P_1P_2R$ ovat *erikohtaisia kulmia*. Erikohtaisten kulmien vieruskulmat ovat erikohtaisia kulmia, joten myös erikohtaisten kulmien ristikulmat ovat erikohtaisia kulmia.

Kulma ja sen erikohtaisen kulman ristikulma ovat *samankohtaisia kulmia*.

Lause 5. a) Erikohtaisilla kulmilla on sama radiaanimitta.
b) Samankohtaisilla kulmilla on sama radiaanimitta.

Todistus. Riittää todistaa b-kohta. Siirto

$$T: \bar{X} \mapsto \bar{X} + P_1 - P_2$$

vie kulman $\measuredangle P_1 P_2 R$ samankohtaiselle kulmalle, jonka kärkenä on P_1. Väite seuraa Lauseesta 1. □

67' →

Huomautus. Geometriassa on tavanomaista sanoa, että kulmat ovat yhtä suuria, jos niillä on sama radiaanimitta. Tämä on perusteltua siksi, että kulmat ovat "yhtä-suuria", jos ja vain jos ne ovat yhteneviä (Lause 1). Koulukirjoissa on ollut tapana sanoa ennen, että ristikulmat ovat yhtä suuria, tai että samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria. Kulman (radiaani-) mitasta puhuminen ~~on~~ tuntuu keinotekoiselta, ~~jätä~~ siitä voidaan ~~[illegible]~~ haluttaessa luopua.

2 14. Kolmiaista

Olkoot P, Q ja R kolme pistettä, jotka eivät ole kollineaarisia. Kolmiolla $\triangle PQR$ tarkoitetaan suoraviivaista kuviota, joka koostuu janoista PQ, QR ja RP. Nämä janat ovat kolmion sivuja, pisteet ovat kolmion kärkiä ja muodostuvat kulmat kolmion kulmia.

Tarkastellaan barysentrisiä koordinaatteja (λ, μ, ν) pisteiden P, Q ja R suhteen.

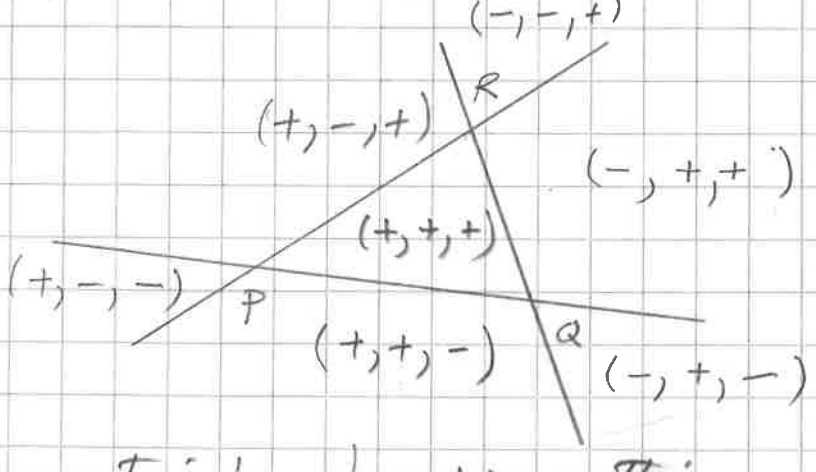
11.3.2014

Lause 1. (i) Piste $\overline{X}$ $= \lambda P + \mu Q + \nu R$ on kolmion $\triangle PQR$ kärki, jos ja vain jos täsmälleen kahden sen barysentrisen koordinaatin arvo on nolla.
(ii) Piste $\overline{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R$ on kolmion jonkin sivun sisäpiste, jos ja vain jos täsmälleen yhden sen barysentrisen koordinaatin arvo on nolla ja muut koordinaatit ovat positiivisia. □

Määritelmä 1. Piste $\overline{X}$ on kolmion $\triangle PQR$ sisällä, jos sen kaikki barysentriset koordinaatit ovat positiivisia.

15.3.2006

Lause 2. Piste $\overline{X}$ on kolmion $\triangle PQR$ sisällä, jos ja vain jos $\overline{X}$ kaikkien kulmien $\measuredangle PQR$, $\measuredangle PRQ$ ja $\measuredangle QPR$ aukeamassa. □



Barysentristen koordinaattien etumerkit

$$\overline{X} = (\lambda, \mu, \nu)$$
$$\overline{X} = \lambda P + \mu Q + \nu R$$
$$\lambda + \mu + \nu = 1$$

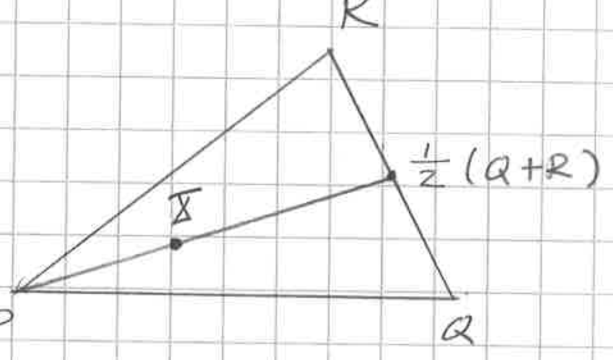
Kärjen P:n vast. sivulla QR $\lambda = 0$! ja piste ...

Kaikki ed. käsitteet ovat invariantteja isometrioissa (eli yhdenmuotoisuuskuvauksissa): Jos T on isometria, jolla $P' = T(P)$, $Q' = T(Q)$ ja $R' = T(R)$, niin kolmion ΔPQR kärjet kuvautuvat kolmion $\Delta P'Q'R'$ kärjiksi, sivut sivuiksi, sisäosa sisäosaksi, sentroidi sentroidiksi jne. $M = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R$ sentroidi.

Sivua, jolla kolmion kärki ei kuulu, sanotaan tämän kärjen vastakkaiseksi sivuksi. ~~Siis esim. PQ on kärjen R vastakkainen sivu.~~ Kärjen ja sen vastakkaisen sivun keskipisteen yhdysjanaa sanotaan kolmion keskijanaksi eli mediaaniksi. Kolmiolla on siis kolme mediaania.

Lause 3. Kolmion mediaanit leikkaavat toisensa samassa pisteessä, joka on kolmion sentroidi. Leikkauspiste jakaa jokaisen mediaanin suhteessa 2 : 1.

Todistus. Tarkastellaan pisteestä P alkavaa mediaania. Sen toinen päätepiste on sivun QR keskipiste $\frac{1}{2}(Q+R)$. Piste $\bar{X}$ on mediaanilla, jos ja vain jos



$$\bar{X} = (1-t)P + t\,\frac{Q+R}{2}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Koska

$$\bar{X} = (1-t)P + \frac{t}{2}Q + \frac{t}{2}R$$

ja $(1-t) + \frac{t}{2} + \frac{t}{2} = 1$, ovat luvut $(1-t)$, $t/2$, $t/2$ pisteen $\bar{X}$ barysentriset koordinaatit. Arvolla $t = 2/3$ saadaan sentroidi.

$$M = \frac{1}{3}P + \frac{1}{3}Q + \frac{1}{3}R.$$

Koska sama pätee kaikille keskijanoille, väite seuraa. □

70 9.3.2005

Kolmioiden yhtenevyyslauseet ovat klassisen koulugeometrian keskeisintä sisältöä.

Määritelmä 2. Kolmiot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ ovat yhteneviä, jos on olemassa isometria (l. yhtenevyyskuvaus) $T: E^2 \to E^2$, jolle $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$ ja $T(R) = R'$.

Olkoot kolmiot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ yhteneviä. Ne kärjet, sivut ja kulmat, jotka T kuvaa toisilleen, ovat toistensa vastinkärkiä, -sivuja ja -kulmia. Esim. Q ja Q' ovat toistensa vastinkärkiä ja $\measuredangle QRP$ ja $\measuredangle Q'R'P'$ toistensa vastinkulmia. Yhteisellä nimellä näitä kutsutaan vastinosiksi.

Merk. $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$. Yleensä ~~[illegible]~~ tällöin ei $\triangle PQR \ncong \triangle Q'P'R'$

Määritelmä 2 on koulugeometriassa esitetty seuraavasti: Kaut. kolmiot (tai yleisemmin kaut. kuviot), jotka voidaan asettaa tai ajatella asetetuiksi päällekkäin siten, että ne täysin yhtyvät, sanotaan yhteneviksi.

~~15.3.~~ 2007 Sanomme kahta janaa yhtä suuriksi (pitkiksi), jos niillä on sama pituus, ja kaut. kulmaa yhtä suuriksi, jos niillä on sama radiaanimitta. Isometria ei muuta pituuksia eikä radiaanimittoja. On siis voimassa:

Lause 4. Yhtenevien kolmioiden vastinosat ovat yhtä suuria. □

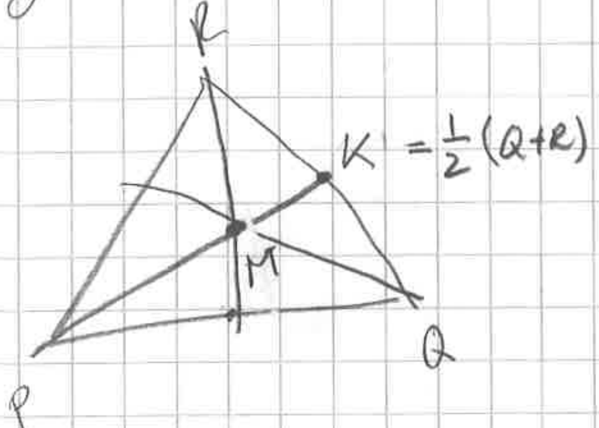
Käänteinen kysymys on mielenkiintoinen: Mistä vastinosien yhtäsuuruudesta seuraa kolmioiden yhtenevyys?

Yhtä suuret kulmat ovat yhteneviä, yhtä pitkät janat ovat yhteneviä

Yhtenevyydelle käytetään merkintää $\cong$.

Tarkistetaan

Jakosuhde:



$$M = \frac{1}{3}(P+Q+R) =$$

$$\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}(Q+R) =$$

$$\frac{1}{3}P + \frac{1}{3}\cdot 2 \cdot \frac{1}{2}\cdot (Q+R) =$$

$$\frac{1}{3}P + \frac{2}{3}K =$$

$$\cancel{(1-t)P + tK}, \quad \cancel{t = \frac{2}{3}}$$

~~Tästä nähdään, että~~

$$\cancel{\frac{|M-K|}{|K-P|} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}}.$$

Kertaus: $K - M = K - \frac{1}{3}P - \frac{2}{3}K = \frac{1}{3}(K-P)$

$$M - P = \frac{1}{3}P + \frac{2}{3}K - P = \frac{2}{3}(K-P)$$

Siis

$$\frac{|K-M|}{|M-P|} = \frac{\frac{1}{3}|K-P|}{\frac{2}{3}|K-P|} = \frac{1}{2}.$$

— 70′ —

yhtäsuurille kulmille käytetään merkintää

$$\measuredangle PQR \cong \measuredangle P'Q'R'$$

ja yhtä pitkille janoille ~~PQ~~ merkintää

$$PQ \cong P'Q',$$

~~(yhtä suuret kulmat ovat yhteneviä)~~,

~~Pert~~ Kork

Kulmat yhtäsuuria $\Leftrightarrow$ kulmat yhteneviä

Janat yhtä pitkiä $\Leftrightarrow$ janat yhteneviä

~~Merkintä yhtä~~

Tällöin merkitään

$$\cancel{\measuredangle PQR = P'Q'R'}$$
$$\cancel{PQ = P'Q'}$$

(Huom Merkintä $\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R'$ tarkoittaa kulmien samuutta (~~equality~~)

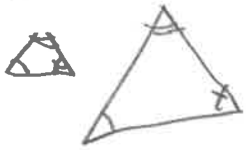
~~eli~~ jolloin ~~$P = P'$, $Q = Q'$~~ ~~PQ $Q = Q'$~~ ja $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{Q'P'}$

$$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{Q'R'}$$

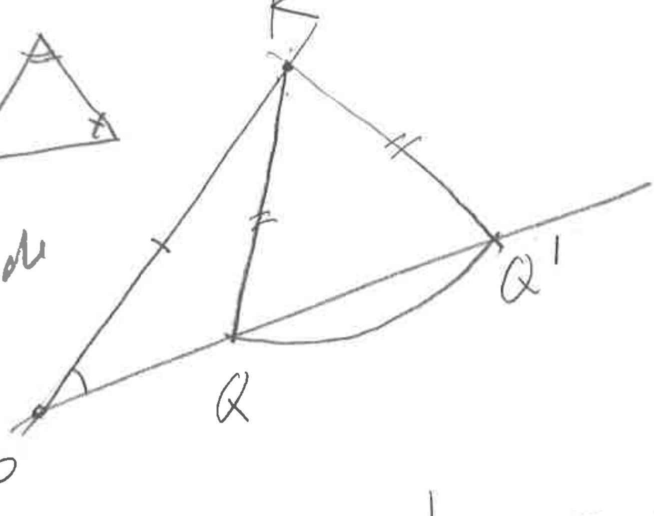
ja siis $Q = Q'$) ~~[illegible]~~

yhtäsuuruus lievempi ehto! ~~[illegible]~~ ok

Pääsääntö: Kolme vastinosaa riittää. On kolmi-
oiden poikkeuksia 1) KKK Kahden kolmion ei tarvitse olla
yhteneväisiä vaikka niillä olisi kolme paria yhtä suuria vastinkulmat ovat vastinkulmia
pareittain yhtä suuria



KKK
ei päde



2) SSK ei päde
Kahden kolmion ei tarvitse olla yhteneviä vaikka kolmion vastinsivut ja toinen sivupari vastaiset kulmat olisivat pareittain yhtä suuria
kulmiosivut ja toinen sivut ~~vastaiset~~ kulma olisi ~~yhtä~~ suuret kuin vastinosat

$$\triangle PQR \not\cong \triangle PQ'R,$$

vaikka

$QR \cong Q'R$	S
$PR = PR$	S
$\measuredangle QPR \cong \measuredangle Q'PR$	K

yhtenevyyslause SSK ei siis päde yleisesti!

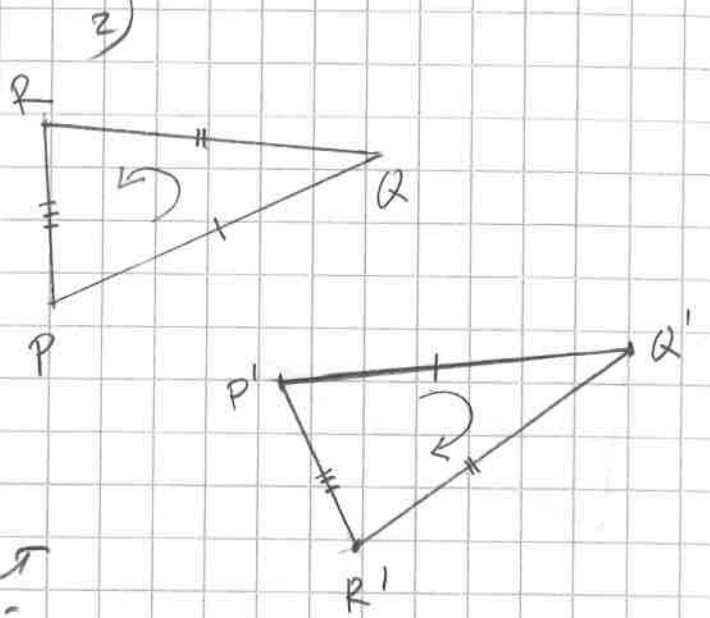
(2) (14)

Lause 5. (SSS) Jos kolmion kaikki sivut ovat yhtä suuret kuin vastinsivut toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhteneviä.

16.3.2006

Todistus. Olkoot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ kaksi kolmiota siten, että

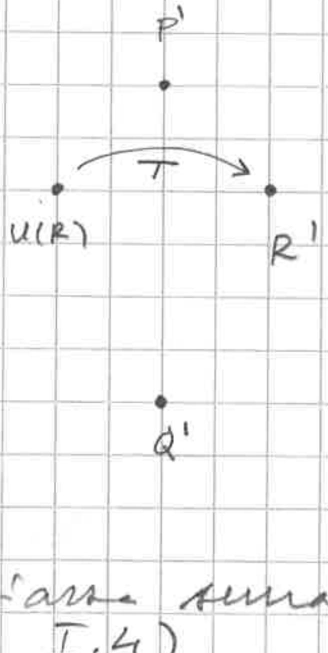
$PQ \cong P'Q'$,
$QR \cong Q'R'$,
$PR \cong P'R'$.



Olkoon $U: E^2 \to E^2$ isometria, jolle

$U(P) = P'$ ja
$U(Q) = Q'$.

Silloin $U(R)$ ja R' ovat yhtä etäällä pisteestä P' samoin kuin pisteestä Q'. Tästä seuraa, joko 1) $U(R) = R'$ tai 2) suora $\overleftrightarrow{P'Q'}$ on janan $U(R)R'$ keskinormaali (vrt. §15). Jos V on peilaus suorassa $\overleftrightarrow{P'Q'}$ ja $T = V \circ U$, niin $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$ ja $T(R) = R'$. □



~~17.3.2004~~

Tämä todistusperiaate on peräisin itseltään Eukleideelta (n. 300 eKr). Me puhumme nyt isometrioista, ennen puhuttiin kolmioiden asettamisesta päällekkäin.

Eukleides aloittaa itse asiansa seuraavalla yhtenevyyslauseella (Propositio I.4)

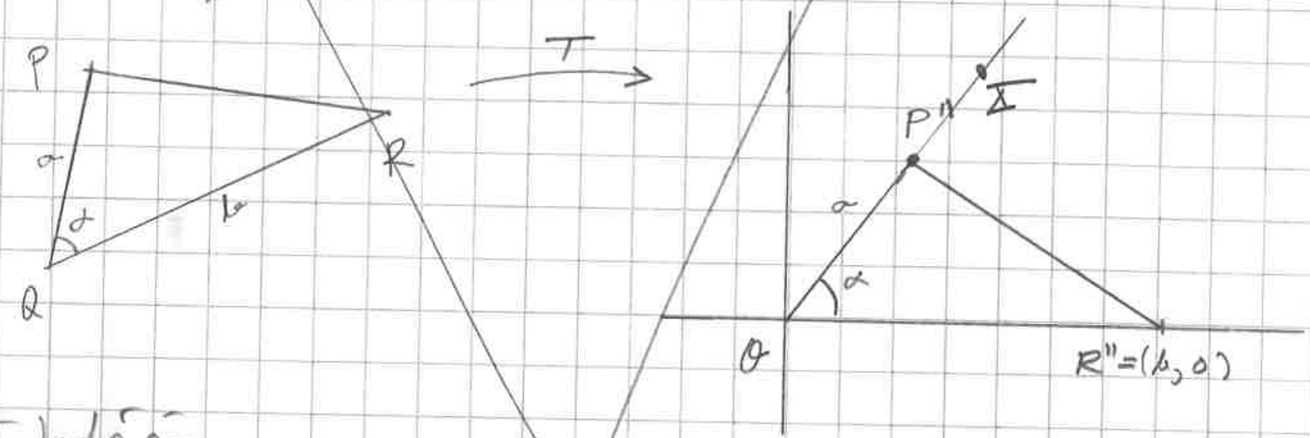
2 ~~14~~

Lause 6. (SKS) Jos kolmion kahden sivun ja niiden välinen kulma ovat yhtä suuria kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.

(*) Todistus. Mukaillaan edellisen lauseen todistusmenetelmää seuraavalla tavalla.

72' Annetaan kolmio $\triangle PQR$. Olkoon kulman

72'' $\measuredangle PQR$ radiaanimitta α, sivun PQ pituus a ja sivun QR pituus b. Olkoon T isometria, jolle $T(Q) = O$, $T(R) = R'' = (b, 0)$ ja $P'' = T(P)$ on ylemmässä puolitasossa.



Näytetään ~~Riittää näyttää~~, että luvut a, b ja α määräävät P'':n yksikäsitteisesti.

Olkoon $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Silloin P' on säteellä $\overrightarrow{OP''} = \{\overline{X} \mid \overline{X} = tv,\ t \geq 0\}$. Koska

$$d(O, \overline{X}) = a \iff t = a,$$

on $P'' = av$ yksikäsitteisesti määrätty. $\square$

(**)

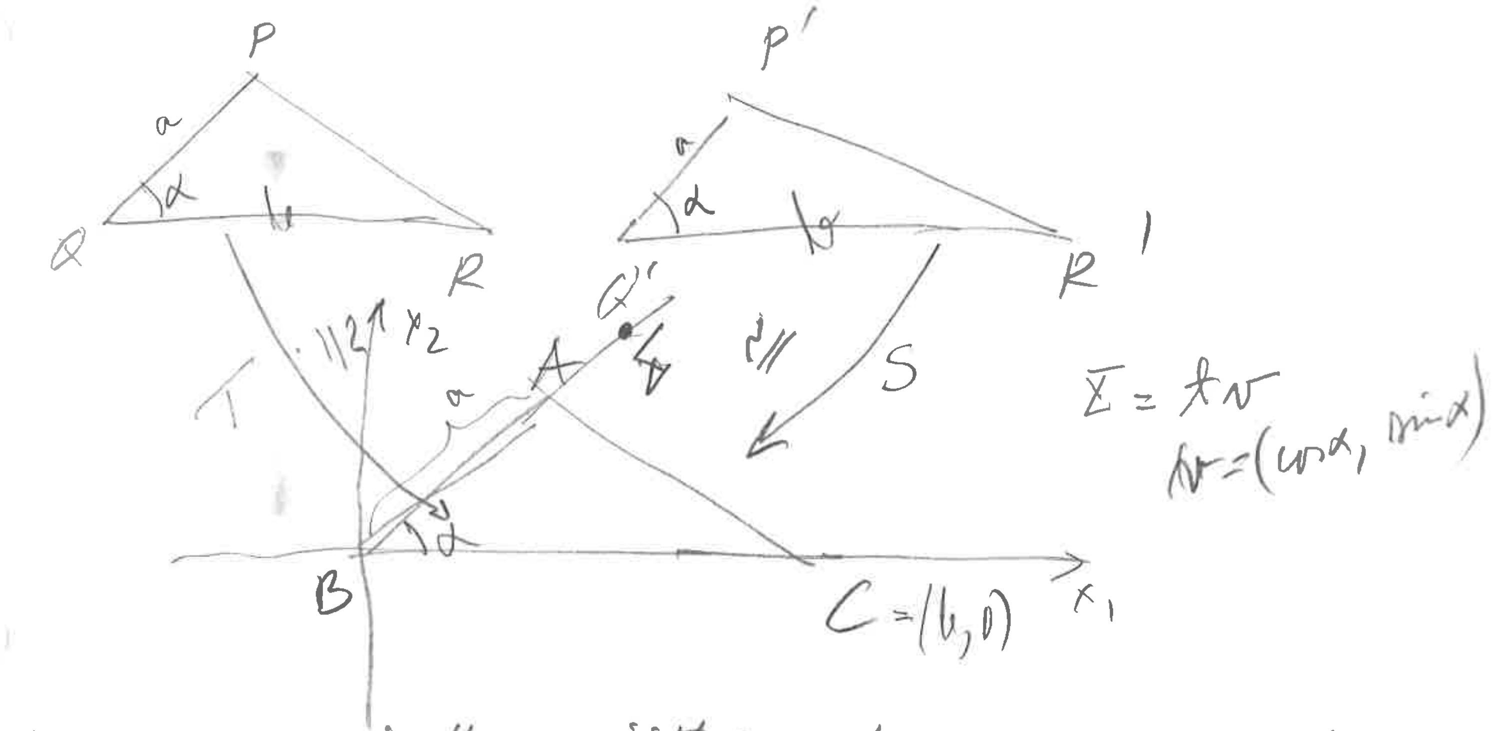
Seuraava lause nojaa aksiomaattisessa geometriassa Eukleideen viidenteen aksioomaan eli paralleeliaksioomaan.

16.3.2005

Lause 7. Kolmion kulmien radiaanimittojen summa on aina π.

Lemma. Olkoot $\triangle ABC$, $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ kolme kolmiota siten, että $\triangle PQR \cong \triangle ABC$ ja $\triangle P'Q'R' \cong \triangle ABC$. Silloin $\triangle PQR \cong \triangle P'Q'R'$. $\square$

Lauseen 6 (moderni) todistus. Olkoot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ kaksi kolmiota siten, että $\measuredangle PQR \cong \measuredangle P'Q'R'$, $PQ \cong P'Q'$ ja $QR \cong Q'R'$.



Lemman nojalla riittää löytää kolmio $\triangle ABC$, jolle $\triangle PQR \cong \triangle ABC \cong \triangle P'Q'R'$.

Olkoon kulmien $\measuredangle PQR$ ja $\measuredangle P'Q'R'$ yhteinen rad. mitta α, sivujen PQ ja $P'Q'$ yhteinen pituus a sekä sivujen QR ja $Q'R'$ yhteinen pituus b.

Olkoon T isometria, jolle $T(Q) = B = (0,0)$, $T(R) = C = (b,0)$ ja $T(P)$ on ylemmässä puolitasossa.

Olkoon vastaavasti S isometria, jolle $S(Q') = B$, $S(R') = C$ ja $S(P')$ on ylemmässä puolitasossa.

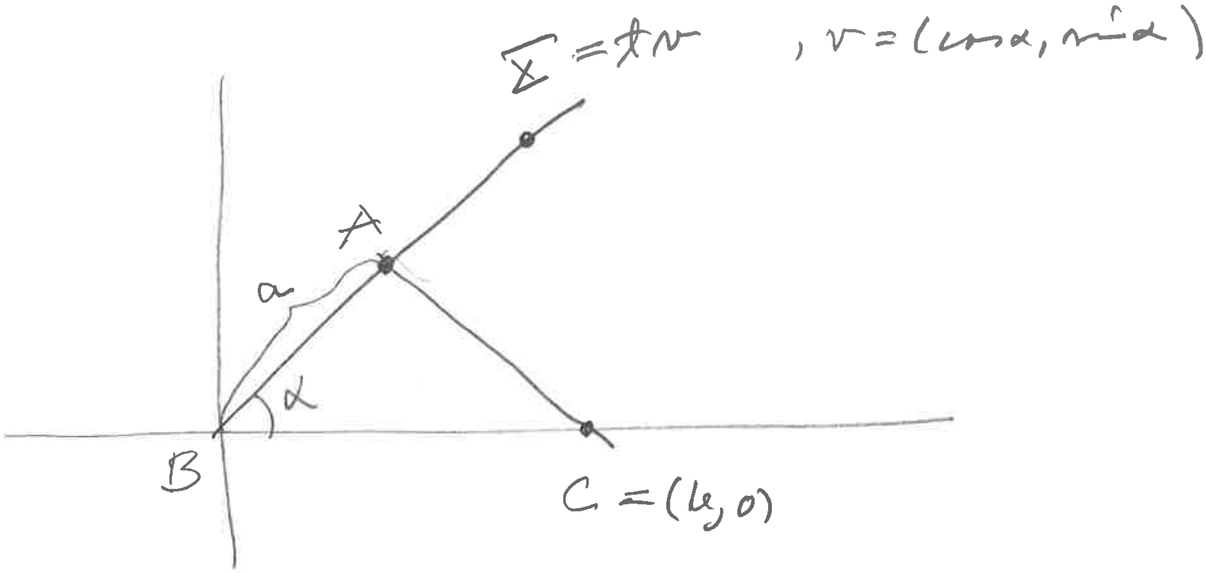
Osoitetaan, että $T(P) = S(P')$. Olkoon $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$. Koska isometria säilyttää kulman rad. mitan, on $T(P)$ säteellä $r = \{\overline{X} \mid \overline{X} = tv,\ t \geq 0\}$. Koska isometria säilyttää janan pituuden, on

$$d(B, T(P)) = a.$$

Näin ollen $T(P) = av$.

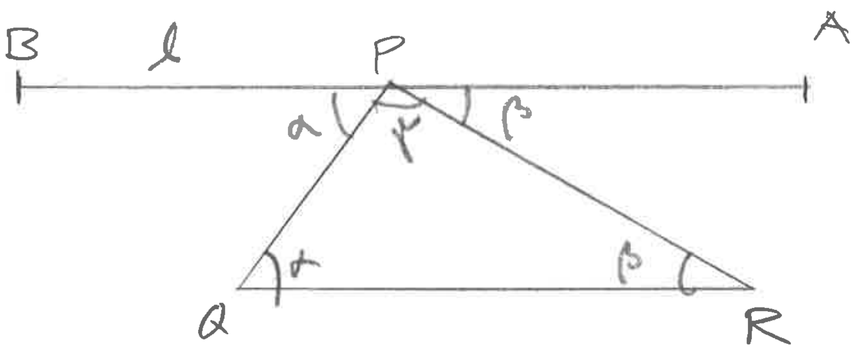
Vastaavasti $S(P') \in r$ ja $S(P') = av$. Merkitään $A = av$. Silloin

$$\triangle PQR \overset{T}{\cong} \triangle ABC \overset{S}{\cong} \triangle P'Q'R'. \quad \square$$



Lause 7

Todistus. Annetaan kolmio $\triangle PQR$



Olkoon

$$A = P + R - Q$$

$$B = P + Q - R$$

Silloin A, P ja B ovat samalla suoralla. Lisäksi $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{QR}$, sillä molempien suorien suunta on $[R - Q]$.

Todistus nojaa siihen ilmeiseen asiaan, että Q on aina kulman $\sphericalangle BPR$ aukeamassa. Tämä on myös helppo todistaa: Koska $B = P + Q - R$, on

$$Q = B - P + R.$$

Koska $1 - 1 + 1 = 1$, ovat kyseessä barysentriset koordinaatit. Määritelmä I.12.2 mukaan Q on kulman $\sphericalangle BPR$ aukeamassa.

~~Lauseen 1.3 nojalla kulman $\sphericalangle BPR$ radiaanimitta on kulmien $\sphericalangle BPQ$ ja $\sphericalangle QPR$ rad. mittojen summa.~~

a) Kulmien ∢BPR ja ∢APR rad. mittojen summa on π. (Lause 1.4, vieruskulmat)

b) Kulma ∢BPR rad. mitta on kulmien ∢BPQ ja ∢QPR rad. mittojen summa (Lause 1.3, kulmien yhteenlasku, Q kulman ∢BPR aukeamassa)

c) Kulmilla ∢BPQ ja ∢PQR sama rad. mitta (Lause 1.5, ristikkäiset kulmat)

d) Myös kulmilla ∢QRP ja ∢APR sama rad. mitta.

Väite seuraa. □

21.3.2007

Havaitaan, että kolmion kulmien summa on π, jos ja vain jos pisteen P kautta kulkee täsmälleen yksi suoran $\overleftrightarrow{QR}$ suuntainen suora.

ns. Paralleeliaksiooma ja kolmion kulmien summalause liittyvät ~~t~~oisiinsa.

Pallokolmion kulmien summa on aina $> \pi$. Kahden pallokolmion kulmien summat eivät ole välttämättä ole keskenään yhtä suuria.

Korollaari 1. Kolmion kahden kulman radiaanimittojen summa on yhtä suuri kuin kolmannen kulman vieruskulman radiaanimitta. 4

Korollaari 2. Kolmion kulman rad. mitta on pienempi kuin molempien muiden kulmien vieruskulmien radiaanimitta. 4

Kolmio on <u>tasakylkinen</u>, jos siinä on kaksi yhtä pitkää sivua. Kolmio on <u>tasasivuinen</u>, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä. Tasakylkisen kolmion kolmas sivu on sen kanta. Kannan viereiset kulmat ovat <u>kantakulmia</u> ja yhtä pitkien sivujen välinen kulma on <u>huippukulma</u>.

<u>Lause 8.</u> a) Tasakylkisen kolmion kantakulmat ovat yhtä suuria (eli niillä on sama rad. mitta).
b) Tasasivuisen kolmion kaikkien kulmien radiaanimitta on $\pi/3$.

Todistus. a) Olkoon $\triangle PQR$ tasakylkinen kolmio, jossa sivut PQ ja PR ovat yhtä pitkiä. Lauseen 6 (SKS) perusteella kolmiot $\triangle PQR$ ja $\triangle PRQ$ ovat yhtenevät. Siten (Lause 4) kulmat $\measuredangle PQR$ ja $\measuredangle PRQ$ ovat yhtä suuria.
b) Edellisen kohdan nojalla tasasivuisen kolmion kaikki kulmat ovat keskenään yhtä suuria. Väite seuraa Lauseesta 7. □

<u>Lause 9.</u> (KSK ja KKS) Jos kolmion kaksi kulmaa ja yksi sivu ovat yhtä suuria kuin vastinosat toisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät.

Todistus. Harj. tehtävä. □

→ 24.3. 2014

Yhtenevyyslauseita KKK ei ole olemassa.
Yhtenevyyslause SSK on ongelmallinen. Tutkitaan sitä Lauseen 6 todistuksessa käytetyssä normeeratussa tilanteessa.

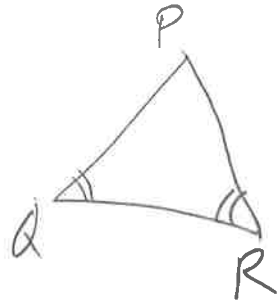
Olkoon $O = (0,0)$ ja $A = (a,0)$, sekä annetaan O:sta lähtevä puolisuora r, jonka suunta on $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Lause 9 KSK ja KKS

Korollaari: Kolmiossa ovat yhtä suurien kulmien vastaiset sivut yhtä suuria.

Tod. Annetaan kolmio $\triangle PQR$, jossa

$$\measuredangle PQR \cong \measuredangle PRQ.$$



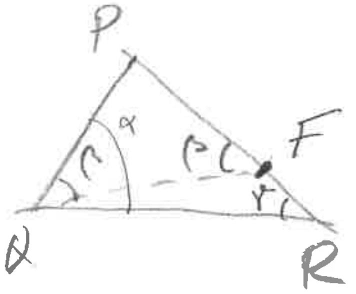
~~Väite PR ≅ PQ?~~

Koska $\triangle PQR \cong PRQ$ (KSK), on $PR \cong PQ$. $\square$

Kolmio on siis tasakylkinen jos ja vain jos siinä on (vähintään) kaksi keskenään yhtä suurta kulmaa.

Lause 10 Kolmiossa on pitemmän ~~suuremman~~ sivun vastainen kulma suurempi kuin lyhyemmän ~~pienemmän~~ sivun vastainen kulma.

Todistus. Annetaan kolmio PQR, jossa sivu PR on pitempi kuin sivu PQ. Olkoon F janan PR piste, jolla $PF \cong PQ$. Lauseen 8a nojalla $\measuredangle PQF \cong \measuredangle PFQ$.

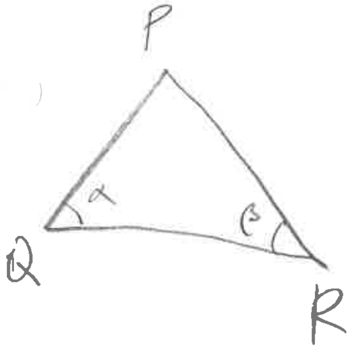


$F = (1-t)P + tR + 0Q$, missä $0 < t < 1$ eli $(1-t) > 0$, $t > 0$, siis F on $\measuredangle PQR$ aukeamassa.

Koska F on kulman $\measuredangle PQR$ aukeamassa, on kulman $\measuredangle PQR$ radiaanimitta α suurempi kuin kulman $\measuredangle PQF$ radiaanimitta β (Kulmien yhteenlaskulause). Olkoon γ kulman $\measuredangle PRQ$ rad. mitta. Lauseen 7 korollaarin 2:n nojalla $\gamma < \beta$. Koska $\beta < \alpha$, on $\gamma < \alpha$. □

<u>Korollaari</u>. Kolmiossa on suuremman kulman vastainen sivu pitempi kuin pienemmän kulman vastainen sivu.

Todistus. Annetaan kolmio $\triangle PQR$, jossa kulman $\measuredangle PQR$ rad. mitta on α ~~ja~~ kulman $\measuredangle PRQ$ rad. mitta on β. Oletetaan, että $\alpha > \beta$.

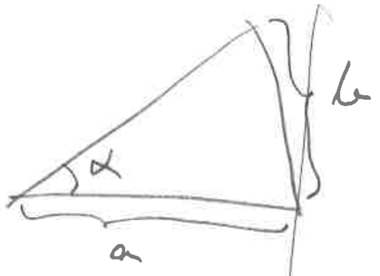


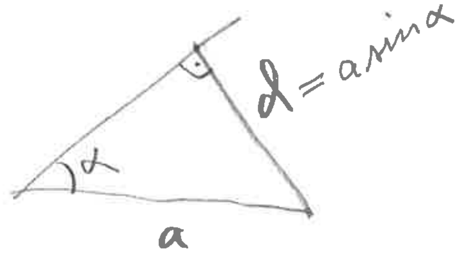
<u>Antiteesi</u>: Joko (i) $PQ \cong PR$ tai (2) PQ on pitempi kuin PR.

Tapauksessa (i) olisi $\alpha = \beta$ (Lause 8a).
Tapauksessa (ii) olisi $\beta > \alpha$ (Lause 10). R.R.□

(*)

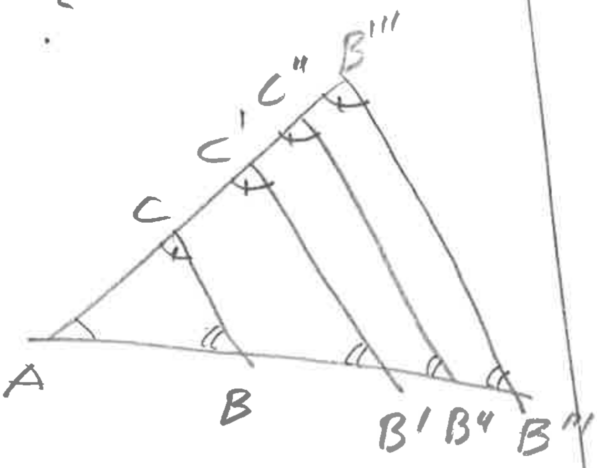
SSK



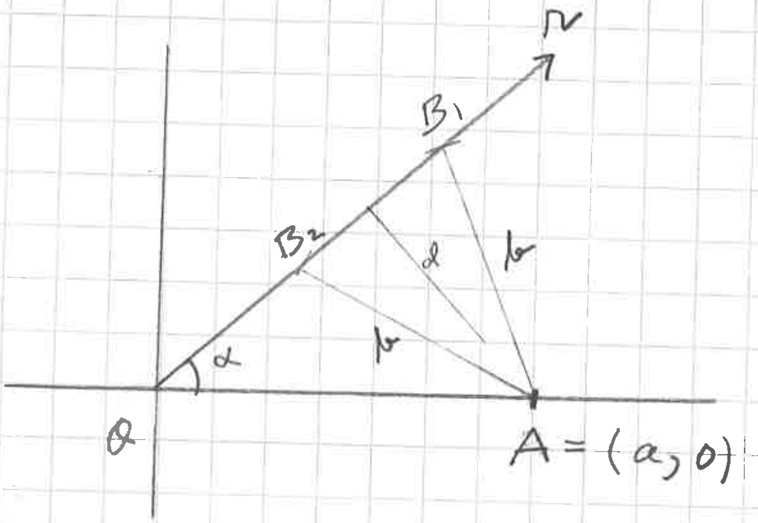


Annetaan kolmion kahden sivun pituudet a ja b sekä toisen sivun (b:n) vastaisen kulman radiaanimitta α.
Tuleeko kolmio täysin määrätyksi; ts. ovatko kaikki tällaiset kolmiot keskenään yhteneviä?
Tämä on peruskoululaiselle sopiva vaativa tutkimustehtävä.

KKK ?



Kaikissa kolmioissa ovat vastinkulmat keskenään yhtä suuret. Kolmiot eivät ole yhteneviä, yhdenmuotoisia kylläkin. KKK ei siis ole olemassa.

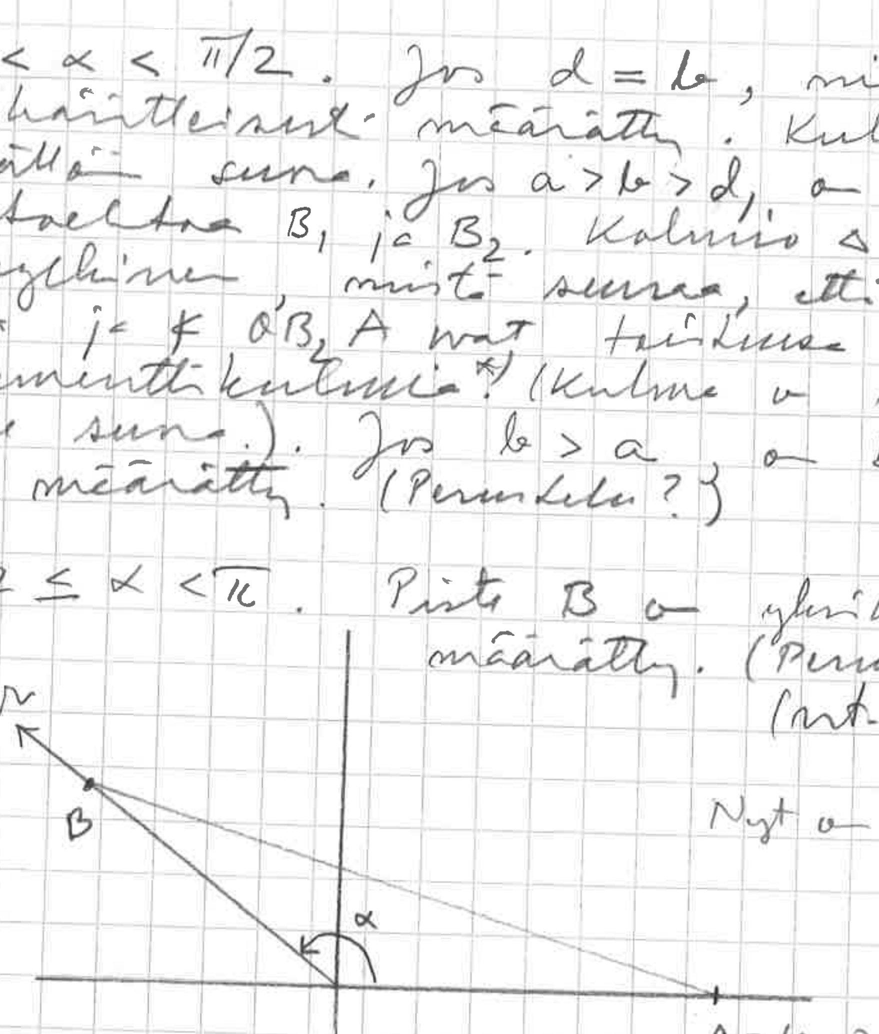


Tarkastellaan kolmiot ΔOAB, missä B on säteellä r. Kysymys: Onko kolmio ΔOAB yksikäsitteisesti määrätty, jos tunnetaan sivun AB pituus b? Joh. tapauksessa AB:n pituuden on oltava vähintään yhtä suuri kuin pisteen A etäisyys d säteen r määräämästä suorasta.

a) $0 < \alpha < \pi/2$. Jos $d = b$, niin B on yksikäsitteisesti määrätty. Kulma $\sphericalangle OBA$ on tällöin suora. Jos $a > b > d$, on kaksi eri vaihtoehtoa B_1 ja B_2. Kolmio ΔB_1AB_2 on tasakylkinen, mistä seuraa, että kulmat $\sphericalangle OB_1A$ ja $\sphericalangle OB_2A$ ovat toistensa (vinoja) suplementtikulmia*) (Kulma on vino, jos se ei ole suora). Jos $b > a$, on B yksikäsitteisesti määrätty. (Perustelu?)

b) $\pi/2 \leq \alpha < \pi$. Piste B on yksikäsitteisesti määrätty. (Perustelu?) (vrt. harj.teht 9.5.)

Nyt on oltava $b > a$.



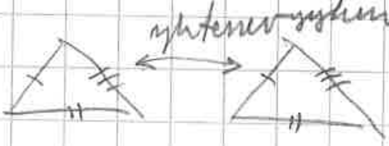
*) toinen terävä, toinen tylppä

On siis (melkein täydellisesti) todistettu

<u>Lause 1φ.</u> (SSK) Jos kolmion kahden sivun ja toisen vastainen kulma ovat yhtä suuret kuin vastinosat toisessa kolmiossa, ovat kolmiot yhtenevät edellyttäen, että toisten yhtä suurien vastinsivujen vastaiset kulmat ovat samanlaatuisia. □

Kaksi kulmaa on samanlaatuista, jos ne molemmat ovat joko teräviä tai suoria tai tylppiä. Lauseen 1φ selvittäminen on hyvä tutkimustehtävä perinteisessä koulugeometriassa.

<u>Korollaari:</u> Jos suorakulmaisessa kolmiossa kaksi sivua tai yksi sivu ja toinen terävä kulma ovat yhtä suuret kuin vastaavat osat toisessa suorakulmaisessa kolmiossa, niin kolmiot ovat yhtenevät. □



SSS
SKS
KSK
KKS — seuraavat toisistaan, koska kolmion kahden kulman suuruudet määräävät kolm. kulman
SSK — lisäedellytys

KMP

3 ~~15~~. Kolmioiden yhdenmuotoisuudesta

Olkoon k reaaliluku. Kuvausta $D: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$,

$$D(\bar{X}) = k\bar{X},$$

kutsutaan dilataatioksi ja lukua $|k|$ sen suurennussuhteeksi. Jos $k \neq 0$, niin D on bijektio. Yleensä rajoitutaan tilanteeseen $k > 0$.

77' — Olkoon $C \in \mathbb{E}^2$. Kuvaus

$$S(\bar{X}) = C + k(\bar{X} - C)$$

on dilataatio, jonka keskuksena on C. Jos H on siirto $H(\bar{X}) = \bar{X} + C$, niin

$$S = H \circ D \circ H^{-1}.$$

Jos $H = Id$, niin $S = D$. Näin ollen D on dilataatio, jonka keskuksena on origo.

Määritelmä 1. Kuvausta $T: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ kutsutaan yhdenmuotoisuuskuvaukseksi, jonka suurennussuhde on $k > 0$, jos

$$|T(\bar{X}) - T(Y)| = k\,|\bar{X} - Y|$$

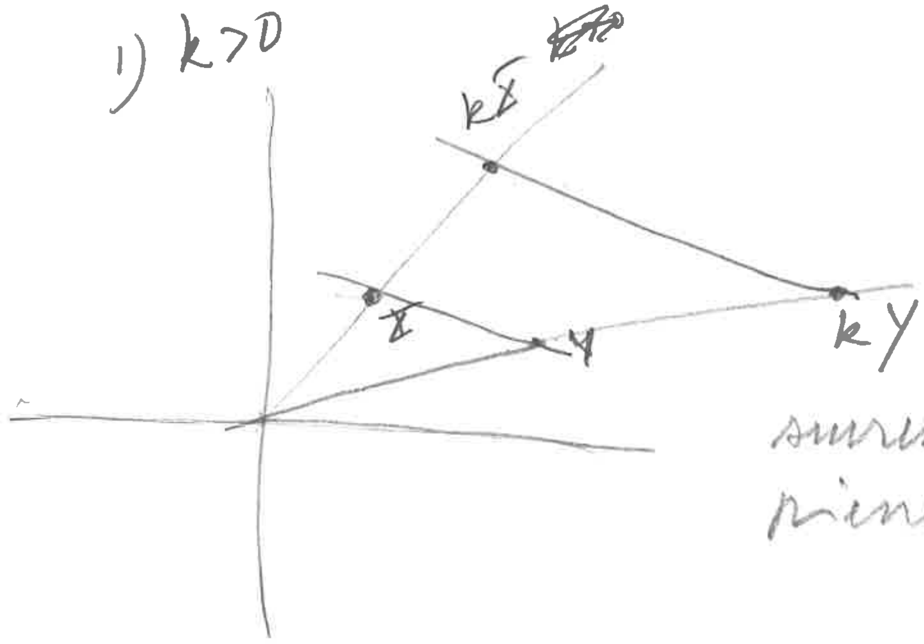
kaikille $\bar{X}, Y \in \mathbb{E}^2$.

Määritelmä 2. Kolmiot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ ovat yhdenmuotoisia, jos on olemassa yhdenmuotoisuuskuvaus $T: \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$, jolle $T(P) = P'$, $T(Q) = Q'$ ja $T(R) = R'$. Tällöin merkitään $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$.

25. 3. 2004

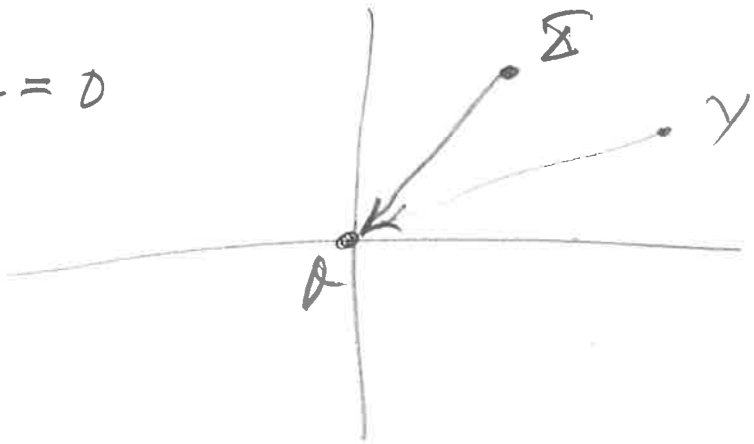
Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinosista voidaan puhua samalla tavalla kuin yhtenevien kolmioiden vastinosista.

1) $k > 0$



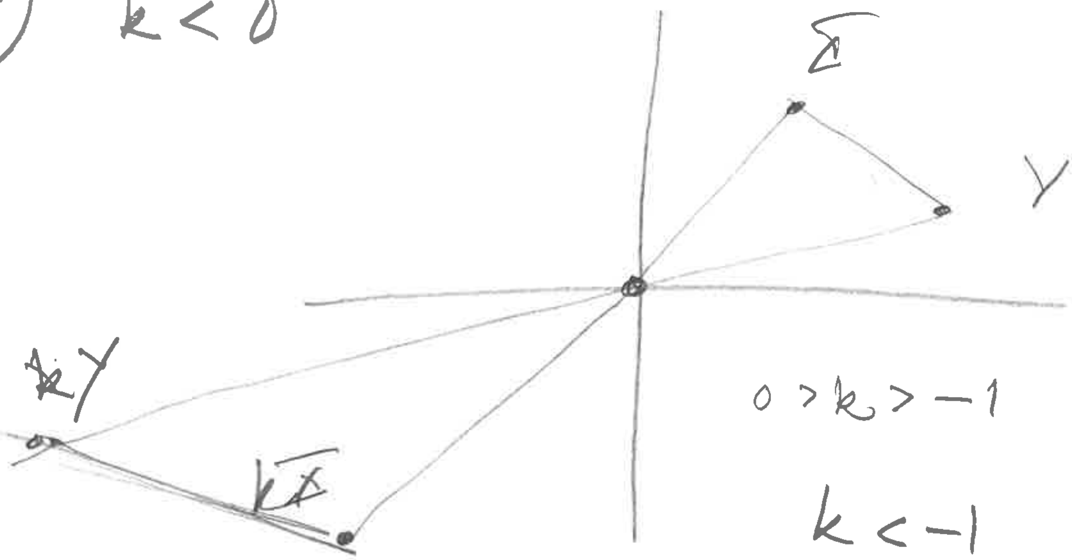
suurennus $k > 1$
pienennys $k < 1$

2) $k = 0$



$D(\bar{X}) = 0$
$\forall \bar{X}$

3) $k < 0$



$0 > k > -1$ kierto ja pienennys

$k < -1$ kierto ja suurennus

Lause 1. Kuvaus $T: E^2 \to E^2$ on yhdenmuotoisuus,
a) jos ja vain jos se on muotoa

$$T = D \circ V,$$

missä $V: E^2 \to E^2$ on isometria,

b) jos ja vain jos se on muotoa

$$T = V \circ D,$$

missä $V: E^2 \to E^2$ on isometria. Molemmissa tapauksissa $D(\bar{X}) = k\bar{X}$, $k > 0$, missä k on T:n suurennussuhde.

Todistus. a) Olkoon T määritelmän 1 mukainen yhdenmuotoisuus. Olkoon $D(\bar{X}) = k\bar{X}$. Silloin $D: E^2 \to E^2$ on bijektio ja $D^{-1}(\bar{X}) = \frac{1}{k}\bar{X}$. Olkoon

$$V = D^{-1} \circ T.$$

Silloin

$$|V(\bar{X}) - V(Y)| = \left|\tfrac{1}{k}T(\bar{X}) - \tfrac{1}{k}T(Y)\right| = \tfrac{1}{k}|T(\bar{X}) - T(Y)| = \tfrac{1}{k}\cdot k|\bar{X} - Y| = |\bar{X} - Y|,$$

joten V on isometria.
Jos $T = D \circ V$ seuraa vastaavalla päättelyllä, että T toteuttaa ehdon

$$|T(\bar{X}) - T(Y)| = k\,|\bar{X} - Y|,$$

joten T on yhdenmuotoisuus.
b-kohta voidaan todistaa samalla tavalla. □

Koska dilataatiot ja isometriat ovat bijektioita, seuraa Lauseesta 1, että myös yhdenmuotoisuudet ovat bijektioita. Lisäksi yhdenmuotoisuuden käänteiskuvaus osoittautuu yhdenmuotoisuudeksi. (Perustele!)

(3)

Lause 2. Yhdenmuotoisuuskuvaukset muodostavat ryhmän, jonka laskutoimituksena on kuvausten yhdistäminen ja neutraalialkiona on identtinen kuvaus. □

23.3.2006

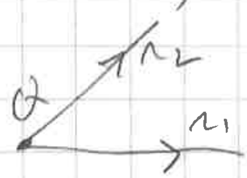
Isometriat toteuttavat Määritelmän 1 arvolla $k = 1$. Isometriat eli yhtenevyyskuvaukset ovat siis myös yhdenmuotoisuuksia.

Korollaari. Yhtenevyyskuvausten ryhmä on yhdenmuotoisuuskuvausten ryhmän aliryhmä.

Lause 3. Olkoon A kulma ja T yhdenmuotoisuuskuvaus. Silloin $T(A)$ on kulma, jolla on sama radiaanimitta kuin kulmalla A.

Todistus. Lauseiden 1 ja I.11.4 perusteella riittää todistaa väite kuvauksille $T = D$, $k > 0$.

Olkoon $A = r_1 \cup r_2$ kulma, missä



$$r_1 = \{Q + tu \mid t \geq 0\}, \quad |u| = 1,$$

$$r_2 = \{Q + tv \mid t \geq 0\}, \quad |v| = 1.$$

Silloin

$$T(Q + tu) = D(Q + tu) = k(Q + tu)$$

$$= kQ + t(ku)$$

Vastaavasti

$$T(Q + tv) = kQ + t(kv).$$

Näin ollen

$T(r_1) = \{kQ + tu \mid t \geq 0\}$,

$T(r_2) = \{kQ + tv \mid t \geq 0\}$,

joten $T(A)$ on kulma, jonka kärkenä on $T(Q)$ ja kylkinä säteet $T(r_1)$ ja $T(r_2)$. Koska r_1:llä ja $T(r_1)$:llä on sama suunta u ja vastaavasti r_2:lla ja $T(r_2)$:lla on sama suunta v, seuraa väite Määritelmästä III.1 □

Lause 4. Jos kahden kolmiot ovat yhdenmuotoiset, niin niiden vastinsivut ovat verrannolliset ja vastinkulmat ovat yhtä suuret. □

Todistus. Oletetaan, että $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$. On näytettävä, että

$$(*) \quad \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} = \frac{RP}{RP'} \text{ ja } \measuredangle P \cong \measuredangle P',\ \measuredangle Q \cong \measuredangle Q',\ \measuredangle R \cong \measuredangle R'.$$

Sivuja koskeva väite seuraa Määritelmistä 1 ja 2, kulmia koskeva Määritelmästä 2 ja Lauseesta 3. □

Sivujen verrannollisuutta koskeva ehto (*) on monesti tapana kirjoittaa ~~muodossa~~

$$PQ : QR : RP = P'Q' : Q'R' : R'P'.$$

Kolmioiden yhdenmuotoisuuslauseita on yhtä vähemmän kuin yhtenevyyslauseita, sillä kahden kolmiot on yhdenmuotoiset, kun niillä kaksi paria keskenään yhtä suuria vastinkulmia.

verrannaisesti

Huom. merkintä: On tapana ~~taas yhdenmuotoisesti~~ käyttää janan PQ pituudelle merkintää PQ.

③

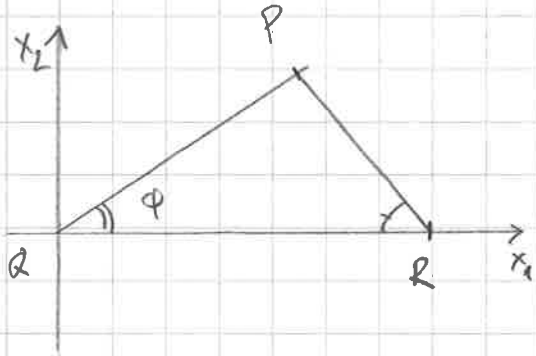
Lause 5. (kk) Jos kolmion kaikki kulmat on yhtä suuret kuin toisen kolmion kaikki kulmat, niin kolmiot ovat yhdenmuotoiset.

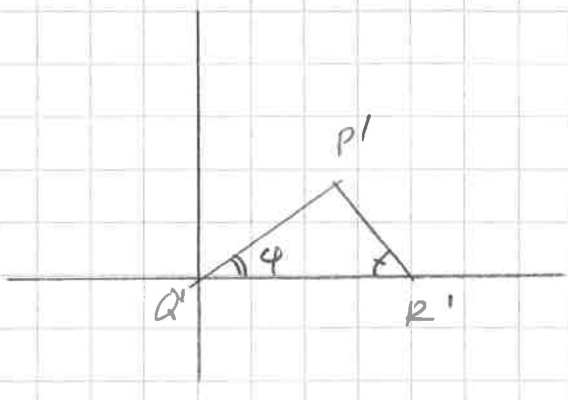
Todistus. Olkoot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ kaksi kolmiota, joilla on kaksi paria keskenään yhtä suuria kulmia. Nimetään jälkimmäisen kolmion kärjet siten, että

$$\measuredangle PQR = \measuredangle P'Q'R' \text{ ja } \measuredangle PRQ = \measuredangle P'R'Q'.$$

On osoitettava, että on olemassa yhdenmuotoisuuskuvaus, jolla $P \mapsto P'$, $Q \mapsto Q'$ ja $R \mapsto R'$.

Lauseen 2 perusteella kolmiot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ voidaan korvata niiden kanssa yhtenevillä kolmioilla.





Voidaan siis olettaa, että $Q = Q' = 0$, $P = |P|(\cos\varphi, \sin\varphi)$, $P' = |P'|(\cos\varphi, \sin\varphi)$ ja $R = (a, 0)$, $R' = (a', 0)$, missä $0 < \varphi < \pi$ ja $a > 0$, $a' > 0$.

Olkoon $D(\bar{X}) = k\bar{X}$, missä $k = \dfrac{a'}{a}$.

Silloin $D(Q) = Q'$ ja $D(R) = R'$. Lauseen 3 nojalla D säilyttää kulmien suuruudet. Yhtenevyyslauseesta KSK seuraa, että $D(P) = P'$. □

Olk. $D(P) = P''$. KSK $\Rightarrow$ $\triangle P'Q'R' \cong P''Q'R' \Rightarrow P' = P''$. □

28. 3. 2007
31. 3. 2007

Muut yhdenmuotoisuuslauseet voidaan johtaa toisist. yhtenevyyslauseista:

Lause 7 (sss) Jos kolmion kaikki sivut ovat verrannolliset toisen kolmion vastinsivuihin, ovat kolmiot yhdenmuotoisia. □

Lause todistetaan seuraavasti: olkoot $\triangle PQR$ ja $\triangle P'Q'R'$ kaksi kolmiota. Silloin:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} = \frac{RP}{R'P'} \Rightarrow \triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'.$$

Lause 8. (sks) Jos kolmion kaksi sivua on verrannolliset toisen kolmion vastinsivuihin ja näiden väliset kulmat ovat yhtä suuret, ovat kolmiot yhdenmuotoisia. □

Toisin sanoen:

$$\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} \text{ ja } \sphericalangle PQR \cong \sphericalangle P'Q'R' \Rightarrow \triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'.$$

Lause 9. (ssk) Jos kolmion kaksi sivua on verrannolliset toisen kolmion vastinsivuihin ja toisten vastinsivujen vastaiset kulmat ovat yhtä suuret, ovat kolmiot yhdenmuotoisia edellyttäen, että toisten vastinsivujen vastaiset kulmat ovat samanlaatuisia (eivät ole toistensa vieruja suplementtikulmia).

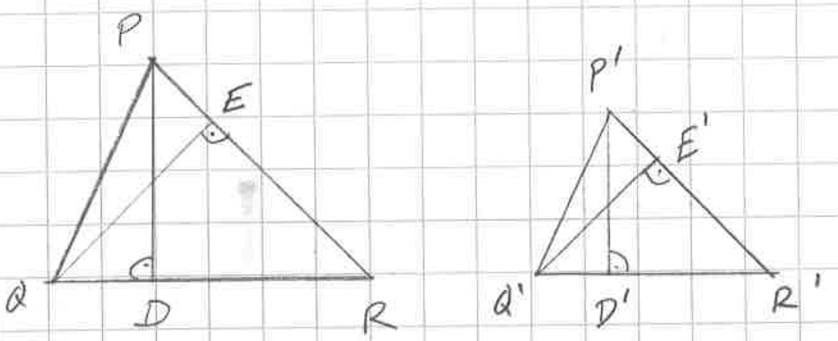
Kulman laadulla tarkoitetaan joko tylppää kulmaa, terävää kulmaa tai suoraa kulmaa.

Tai samaan

Jos $\frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'}$, $\sphericalangle PRQ = \sphericalangle P'R'Q'$ sekä kulmat $\sphericalangle QPR$ ja $\sphericalangle Q'P'R'$ ovat samanlaatuiset, niin $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$.

Lause 10. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkorkeudet ovat verrannollisia vastinsivuihin ja keskenään.

Todistus. Olkoon $\triangle PQR \sim \triangle P'Q'R'$ sekä QE, PD, $Q'E'$ ja $P'D'$ kolmioiden vastinkorkeusjanoja.



On näytettävä, että

$$\frac{PD}{P'D'} = \frac{QE}{Q'E'} = k,$$

missä

$$k = \frac{PQ}{P'Q'} = \frac{QR}{Q'R'} = \frac{PR}{P'R'}. \quad \text{(vrt. Lause 4)}$$

Lauseen 4 perusteella on tällöin $\sphericalangle PQR \cong \sphericalangle P'Q'R'$ ja $\sphericalangle QRP \cong \sphericalangle Q'R'P'$.

Koska Lauseen 5 (kk) nojalla on $\triangle EQR \sim \triangle E'Q'R'$, on

$$\frac{QE}{Q'E'} = \frac{QR}{Q'R'} \quad \text{(Lause 4)}.$$

Koska vastaavasti $\triangle PDQ \sim \triangle P'D'Q'$, on

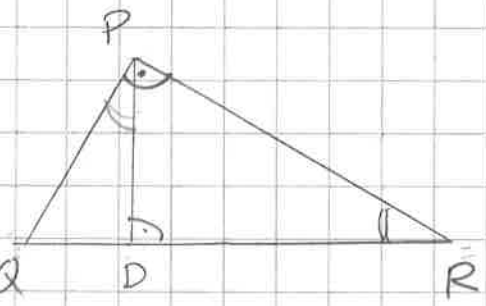
$$\frac{PD}{P'D'} = \frac{PQ}{P'Q'}. \ \square$$

Määritelmä 3. Jana AB on janojen PQ ja RS keskiverto, jos (geometrinen keskiarvo)

$$\frac{PQ}{AB} = \frac{AB}{RS}. \qquad AB = \sqrt{PQ \cdot RS}$$

Lause 11. a) Suorakulmaisen kolmion kateetti on hypotenuusan ja sille olevan projektionsa keskiverto.
b) Hypotenuusaa vastaava korkeus on kateettien projektioiden keskiverto.

Todistus. Annetaan kolmio $\triangle PQR$, missä $\sphericalangle QPR$ on suora kulma. Piirretään korkeusjana PD. Kateetin PQ projektio hypotenuusalle QR on QD sekä kateetin PR projektio DR.



a) On näytettävä, että

$$(*) \quad \frac{QD}{PQ} = \frac{PQ}{QR}.$$

Lauseen 5 (kk) nojalla $\triangle DQP \sim \triangle PQR$, seuraa (*) Lauseesta 4.

b) Edellisen kohdan nojalla $\sphericalangle QPD \cong \sphericalangle QRP$. Koska Lauseen 5 (kk) nojalla $\triangle QDP \sim \triangle PDR$, on

$$\frac{QD}{PD} = \frac{PD}{DR}$$

Lause 4 viimeistelee. □

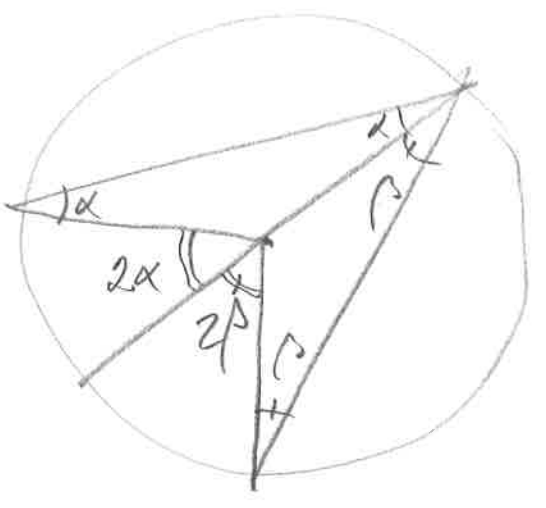
Sovellutus: Annetaan suorakulmio, jonka sivut ovat a ja b. Piirrä neliö, jolla on sama pinta-ala kuin annetulla suorakulmiolla. Ratk. Neliön sivu x on suorakulmion sivujen keskiverto. $x = \sqrt{ab}$ →

Esim. Piirrä suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa tunnetaan.

Ratk. Käytetään Thalen lausetta: Puoliympyrän sisältämä kehäkulma on suora. Tämä on legendan mukaan ensimmäisiä lauseita, jotka on koskaan todistettu. Thales Miletolainen s. n. 620 eKr. Tarina tietenkin epäluotettava ja Thaleen historiallisuus epävarma.

Thalen lause on erikoistapaus seuraavasta: Kehäkulma on puolet vastaavasta keskuskulmasta ~~suuruudesta~~.

Perustelu:



Tasakylk. kolmion kanta- ~~Kolm~~ kulmat yhtäsuuret

Kolmion kahden kulman summa on yhtä suuri kuin kolmannen vieruskulma

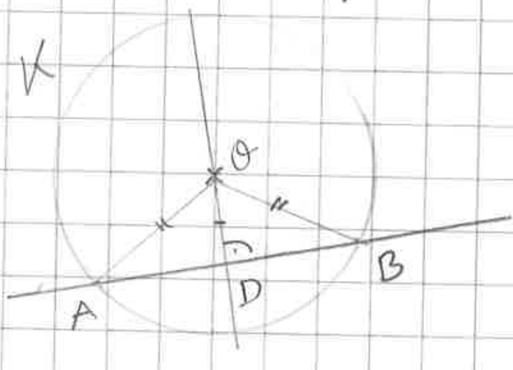
~~Ratk.~~:

Annetaan jana a. Piirretään a halkaisijana ympyrä. Vaaditun kolmion suora kulma on tämän ympyrän kehällä.

4. Ympyrän transversaalit.

Suoraa, joka leikkaa ympyrää kahdessa pisteessä, sanotaan ympyrän sekantiksi. Suoraa, joka koskettaa ympyrää tasan yhdessä pisteessä, sanotaan ympyrän tangentiksi.

Lause 1. Olkoon l ympyrän K sekantti joka leikkaa K:n pisteissä A ja B. Silloin ympyrän keskipisteestä suoralle l piirretty normaali kulkee janan AB keskipisteen kautta. □

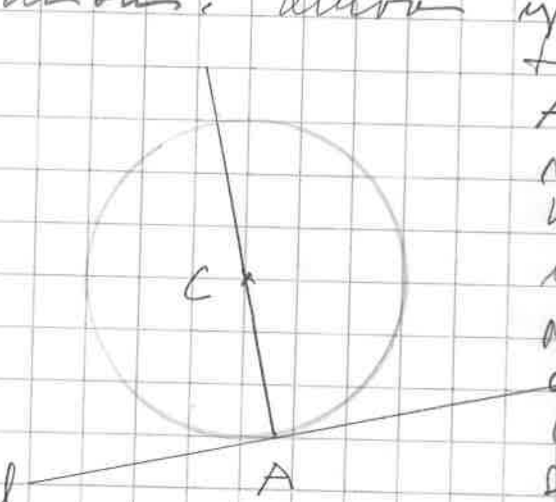


$$SSK \Rightarrow \triangle ADO \cong \triangle BDO$$

$$\Rightarrow AD = BD.$$

Lause 2. Ympyrän tangentti ja sen sivuamispisteeseen piirretty ympyrän säde ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan.

Todistus. Olkoon ympyrän keskipiste C ja tangentin l sivuamispiste A. Olkoon $m = \overleftrightarrow{CA}$. On näytettävä, että $m \perp l$. Koska suoralle l ei ole ympyrän sisällä olevia pisteitä, on $d(C, A) = d(C, l)$. Tästä seuraa, että A on pisteestä C suoralle l piirretyn normaalin kantapiste (vrt. Lause I.3.6.) □

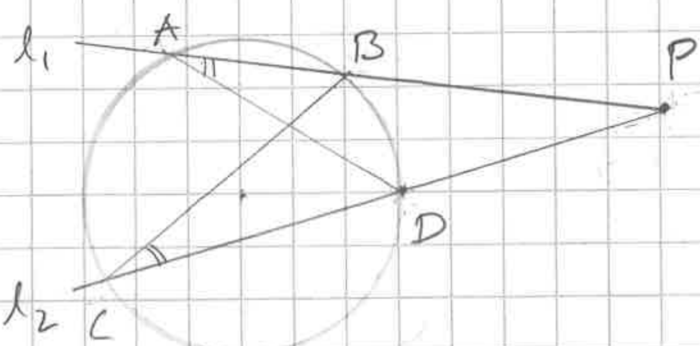


1. 4. 2004

(*) 4

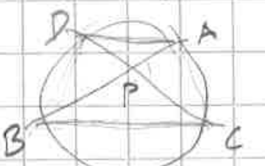
Lause 3. Jos kaksi ympyrän sekanttia leikkaavat toisensa, ovat niiden leikkauspisteen ja kehän väliset osat verrannollisia siten, että toisen sekantin osat äärimmäisinä ja toisen keskimmäisinä ovat verrannossa.

Todistus. Oletetaan, että sekanttien l_1 ja l_2 leikkauspiste P on ympyrän K ulkopuolella (toinen tapaus voidaan todistaa vastaavalla tavalla).



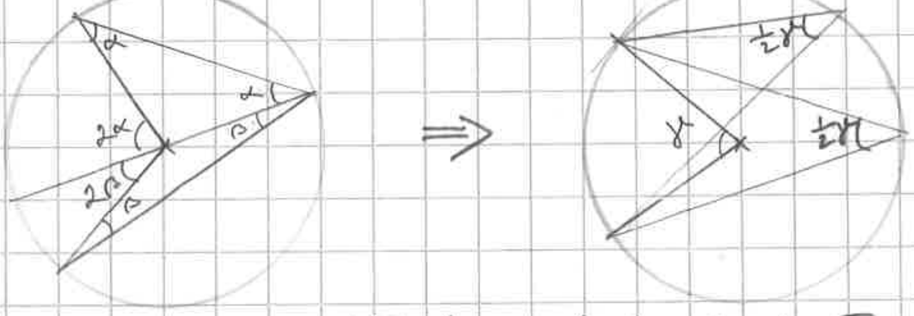
$\angle BAD \cong \angle BCD$, sillä ne ovat samaa kaarta $\widehat{BD}$ vastaavia kehäkulmia. Silloin

$\triangle PCB \sim \triangle PAD$ (kk),



joten $\dfrac{PB}{PD} = \dfrac{PC}{PA}$. □

(*) ~~Huom~~. Kehäkulma on aina puolet vastaavasta keskuskulmasta.



(Eri vaihtoehdot selviävät samantapaisella päättelyllä.)

↑(**)
Samaa kaarta vastaavat kehäkulmat ovat näin yhtä suuria.

Lauseen 3 mukaan on luku

$$PA \cdot PB = PC \cdot PD = p$$

riippumaton sekantista, joka kulkee pisteen P kautta.

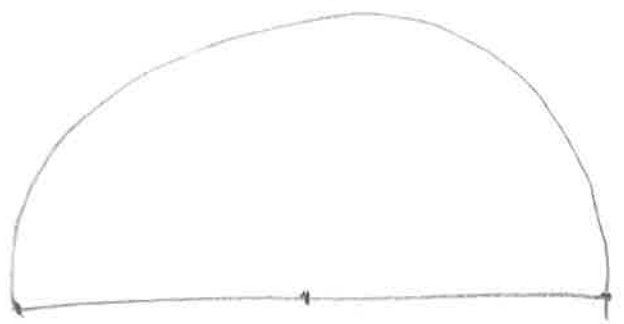
(**) Thales Miletolainen s. n. 620 eKr ??

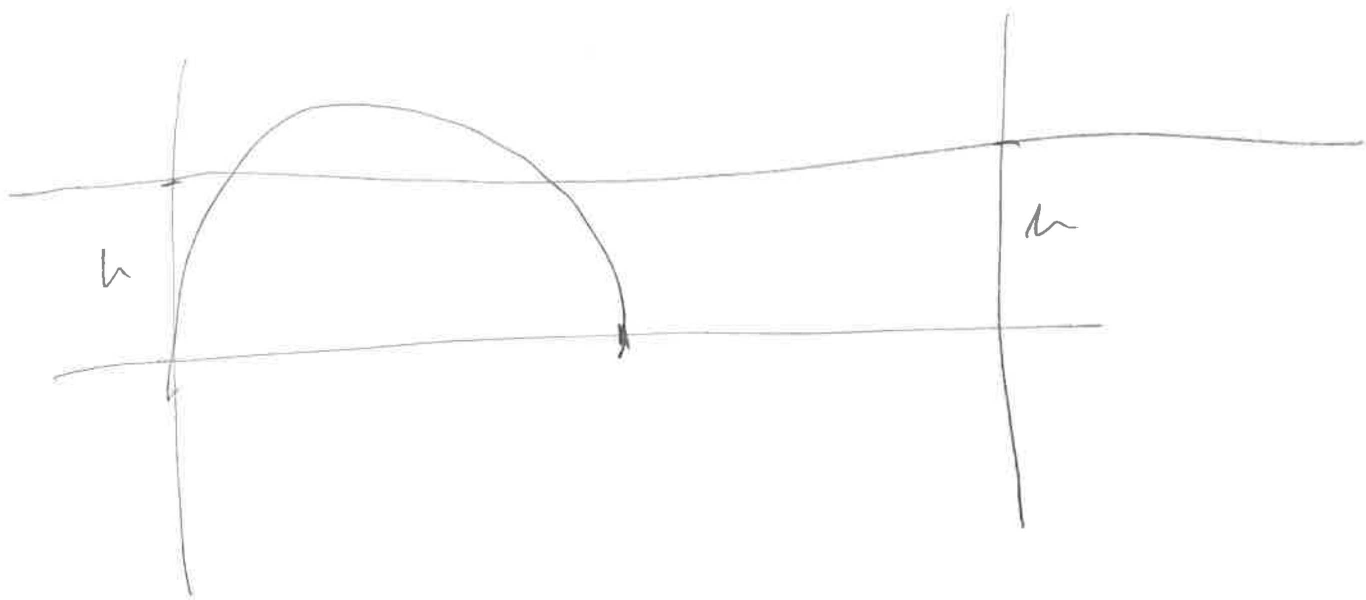
Seuraus: (Thaleen Lause)

Puolijympyrän sisältämä kehäkulma on suora.

Sovellutus: Piirrä suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa ja toinen kateetti tunnetaan.

Suorakulmainen kolmio, jonka hypotenuusa ja sitä vastaan piirretty korkeusjana tunnetaan





(**)
Yo. 1874 kvt. 2

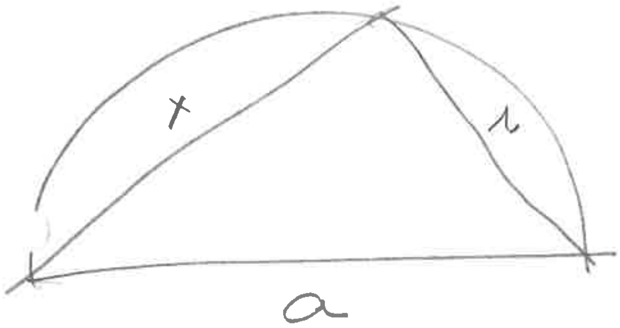
Piirrä neliö, jonka ala on yhtä suuri kuin kahden tunnetun neliön alojen erotus.

$$x^2 = a^2 - b^2$$

$$x = \sqrt{(a-b)(a+b)}$$

$$a^2 = x^2 + b^2$$

Piirrä suorak. kolmio, jonka hypotenuusa ja toinen kateetti tunnetaan

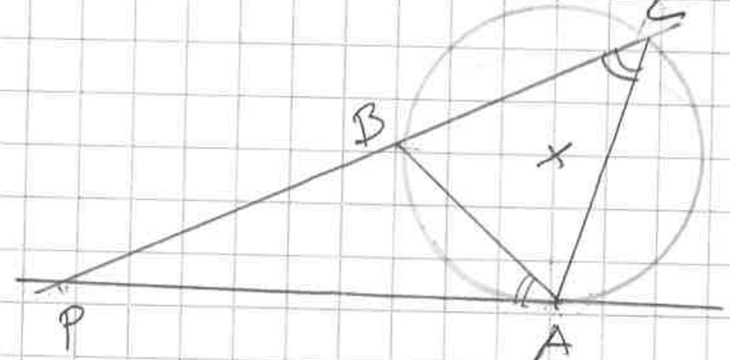


<u>Määritelmä 1.</u> Lukua p kutsutaan pisteen P <u>potenssiksi</u> ympyrän suhteen.

Esim. –87–

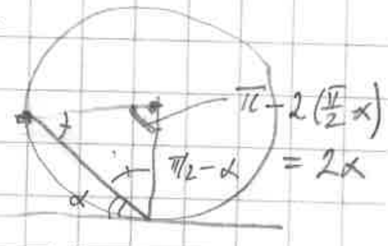
<u>Lause 4.</u> Jos ympyrän sekantti ja tangentti leikkaavat toisensa, niin leikkauspisteen ja sivuamispisteen välinen tangentin osa on leikkauspisteen ja kehän välisten sekantin osien keskiverto.

Todistus.



Jälleen $\triangle PAB \sim \triangle PCA$ (kehäkulma $\sphericalangle PAB$ toinen kylki on tangentti), jote

$$\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC} \quad \square$$



88 – tehtävä

<u>Määritelmä 2.</u> Jos jana on jaettu kahteen osaan niin, että suurempi osa on koko janan ja pienemmän osan keskiverto niin jana on jaettu <u>jatkuvaan suhteeseen</u>.

4.4.2007

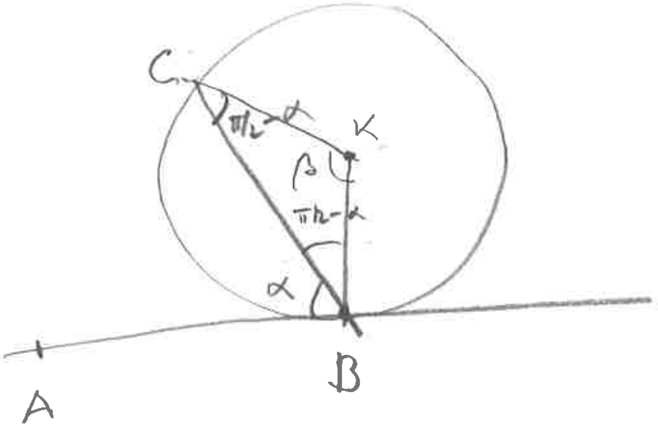
Janan jakoa jatkuvaan suhteeseen kutsutaan myös <u>kultaiseksi leikkaukseksi</u>.

<u>Tehtävä:</u> Jaa annettu jana jatkuvaan suhteeseen.

1) Piirretään annetun janan a halkaisijana ympyrä, jonka keskipiste on K.

2) Piirretään tangentti ja erotetaan siitä sivuamispisteestä A lähtien jana $a = PA$

Kehäkulma, jonka toinen kylki on ympyrän tangentti.



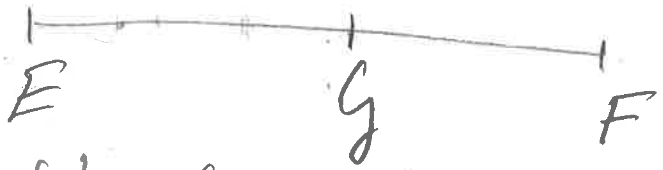
Olk. AB ympyrän tangentti, B siv. piste, C ympyrän kehällä. $\sphericalangle ABC$ on kehäkulma, vastaava keskuskulma on $\sphericalangle BKC$.

Olk. α kulma $\sphericalangle ABC$ rad. mitta ~~[illegible]~~ ja β kulma $\sphericalangle BKC$ rad. mitt.

Tasakylkisen kolmion ΔBKC kantakulmat ~~ovat~~ rad. mitta on $\pi/2 - \alpha$. Näin ollen

$$\beta = \pi - 2(\pi/2 - \alpha) = 2\alpha .$$

Kehäkulma on tässäkin tapauksessa puolet vastaavasta keskuskulmasta.



Piste G jakaa janan EF jatkuvaan suhteeseen, jos

$$\frac{EF}{EG} = \frac{EG}{GF}$$

el. kultainen leikkaus

Lause 5 Jos jatkuvaan suhteeseen jaetun janan pienempi osa erotetaan suuremmasta, jakautuu suurempi osa jatkuvaan suhteeseen.

Tod. harj. teht.

Tehtävä: Jaa annettu jana jatkuvaan suhteeseen.

Ratkaisu

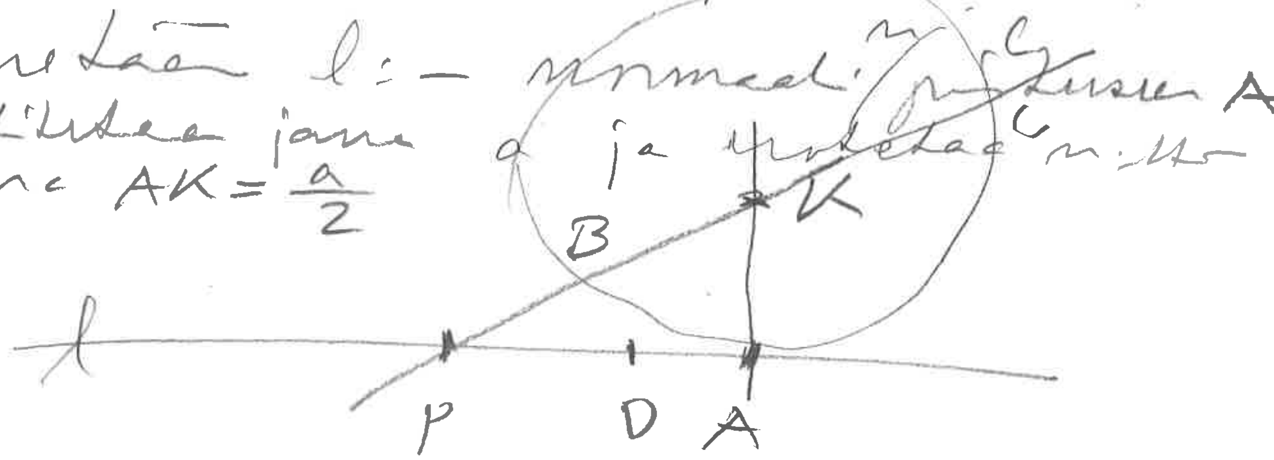
9 Annetaan perussuora l ja jana a

~~Piirretään annettu jana a janak~~

1) Erotetaan suoralta l jana PA = a

2) Piirretään l:n normaali pisteeseen A

3) Puolitetaan jana a ja erotetaan normaalilta jana $AK = \frac{a}{2}$



4) Piirretään K-keskinen ympyrä A:n kautta.

5) Piirretään suora $\overleftrightarrow{PK}$ ja olk. B se suoran ja ympyrän leikk. pisteistä ~~jos~~ s.e. $B \in PK$

6) Erotetaan janasta PA jana PD = PB.

Piste D on haettu jakopiste.

~~Perustelu: Piste B jakaa (toinen) suoran $\overleftrightarrow{PK}$ ja ympyrän leikkauspiste janan PC jatkeena sisäisesti (kts. edell.) siten, että PB on pienempi ja BC = PA suurempi jako-osa. Väite seuraa lauseesta 5.~~

Perustelu Lause 4 nojalla

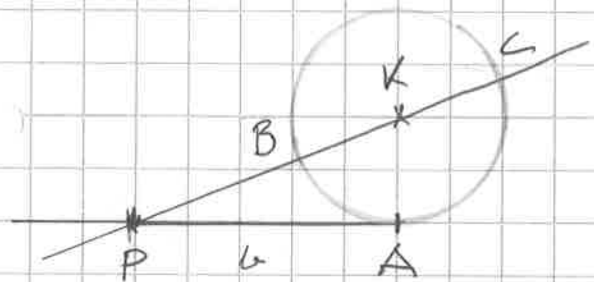
$$\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{BC}$$

Koska $PA = BC$, jakaa piste B janan PC jatkuvaan suhteeseen niin, että PB on pienempi osa ja $BC = PA$ suurempi osa. Lauseen 5 nojalla piste D jakaa janan PA jatkuvaan suhteeseen.

Tehtävä: Määrää kaksi janaa, joiden erotus ja keskiverto tunnetaan.

Annetaan kaksi janaa a ja b. On piirrettävä janat c ja d siten, että $c - d = a$ ja $c : b = b : d$.

1) Piirretään ympyrä, jonka halkaisija on a ja keskipiste K



2) Piirretään tangentti ja erotetaan sivuamispisteestä A lähtien jana $b = AP$

3) Piirretään suora $\overleftrightarrow{PK}$, olkoot B ja C tämän suoran ja ympyrän leikkauspisteet

Nyt on (Lause 4)

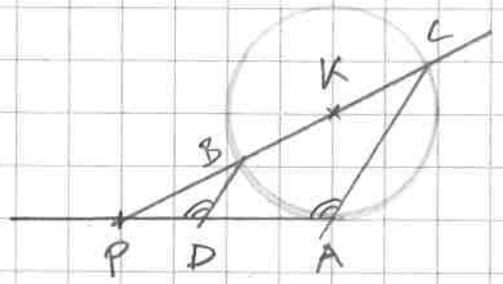
$$\frac{PB}{PA} = \frac{PA}{PC},$$

joten janat PB ja PC täyttävät vaaditut ehdot.

Valitaan edellä $a = b$. Silloin $BC = PA$, joten

$$\frac{PB}{BC} = \frac{BC}{PC}$$

Piste B jakaa jakaa janan PC kahteen osaan siten, että BC on koko janan ja toisen jako-osan keskiverto



3) Piirretään suora $\overleftrightarrow{PK}$, olkoot B ja C tämän suoran ja ympyrän leikkauspisteet.

4) Piirretään pisteen B kautta suora $\overleftrightarrow{BD} \parallel \overleftrightarrow{AC}$

Piste D jakaa janan PA jatkuvaan suhteeseen.

Perustelu: Edellä todettiin, että piste B jakaa janan PC jatkuvaan suhteeseen. Koska $\triangle PDB \sim \triangle PAC$, seuraa väite Lauseesta 3.4.

Lause 5. Jos jatkuvaan suhteeseen jaetun janan pienempi osa erotetaan suuremmasta, jakaantuu suurempi osa jatkuvaan suhteeseen.

Tod. harj. tent. □

Tentissä: ~~Uusi tapa~~ Jaa annettu jana jatkuvaan suhteeseen:

1) Piirretään annettu jana a halkaisijana ympyrä, jonka keskipiste on K.

2) Piirretään tangentti ja erotetaan siitä sivuamispisteestä A lähtien jana PA = a

3) Piirretään suora $\overleftrightarrow{PK}$, jolloin B janan PK ja ympyrän leikkauspiste.

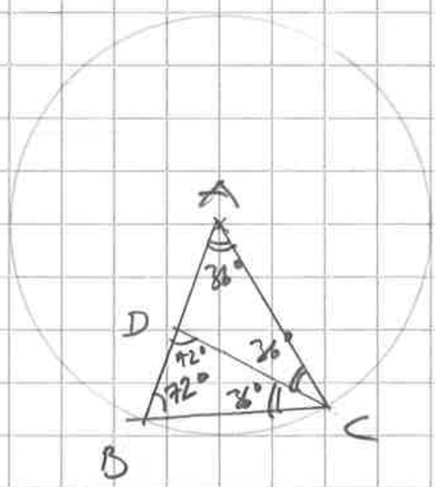
4) Erotetaan jana PD = PB janasta PA.

Piste D jakaa janan PA jatkuvaan suhteeseen

(*) ⟶

Lause 6. Ympyrään piirretyn säännöllisen kymmenkulmion sivu on säteen suurempi osa, kun säde jaetaan jatkuvaan suhteeseen.

Todistus. Ajatellaan ympyrään piirretyksi säännöllinen 10-kulmio. Se jakaantuu kymmeneksi tasakylkiseksi kolmioksi. Olkoon $\triangle ABC$ yksi niistä, missä A on ympyrän keskipiste. Silloin huippukulman $\measuredangle BAC$ radiaanimitta on $\frac{2\pi}{10}$, joten astemitta on 36°. Silloin kantakulmien astemitta on



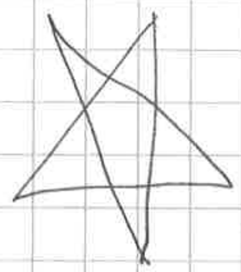
$$\frac{180^\circ - 36^\circ}{2} = 72^\circ = 2\cdot 36^\circ.$$

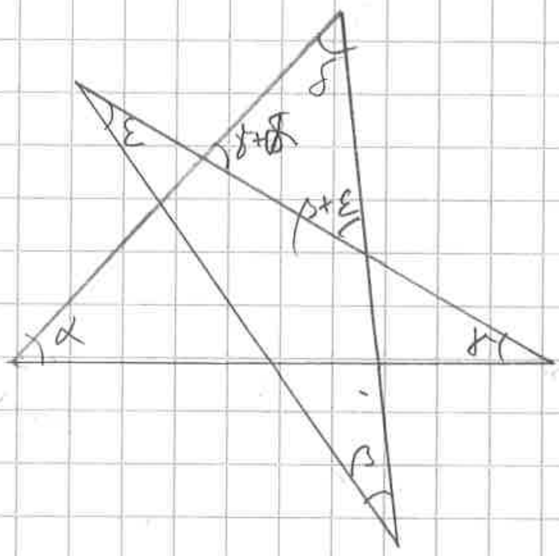
Puolitetaan kulma $\measuredangle BCA$. Syntyy kolmio $\triangle BCD$, jossa kulma $\measuredangle BDC$ astemitta on

$$180^\circ - 72^\circ - 36^\circ = 72^\circ.$$

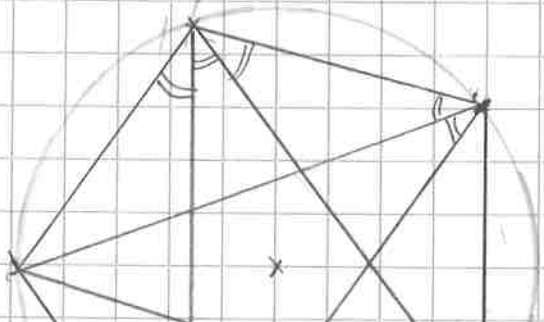
Koska kantakulmat ovat yhtäsuuret, ovat $\triangle BCD$ tasakylkisiä (Lause 2.9 korall.)
Lisäksi $\triangle ABC \sim \triangle CBD$. Näin ollen (Lause 3.4)
(ja $\triangle ADC$

Piirretään viisikanta.





Lasketaan kärkikulmien summa. Kolmiossa on aina kahden kulman radiaanimittojen summa = kolmannen kulman vieruskulman radiaanimitta. Tätä kautta päätellään, että kärkikulmien radiaanimittojen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ summa = kolmion kulmien radiaanimittojen summa = π. Kärkikulmien asteimittojen summa on siis 180°. Säännöllisen viisikannan jokaisen kärkikulman asteimitta on 180°/5 = 36°. Tätä kautta löydetään paljon kultaisia leikkauksia säännöllisessä viisikannassa. Säännöllisen 5-kulmion lävistäjät jakavat toisensa jatk. suhteessa.



$$\begin{array}{r} 36^\circ \\ 36^\circ \\ 36^\circ \\ \hline 108^\circ \end{array}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}.$$

Koska (tasakylkiset kolmiot) $BC = DC = DA$, saadaan väite. □

~~(AA) NAAAT~~

Olkoon ympyrän säde 1. Kuinka pitkä on säännöllisen 10-kulmion sivu x? Lasketaan:

$$\frac{1-x}{x} = \frac{x}{1}$$

$$x^2 = 1 - x$$

$$x^2 + x - 1 = 0$$

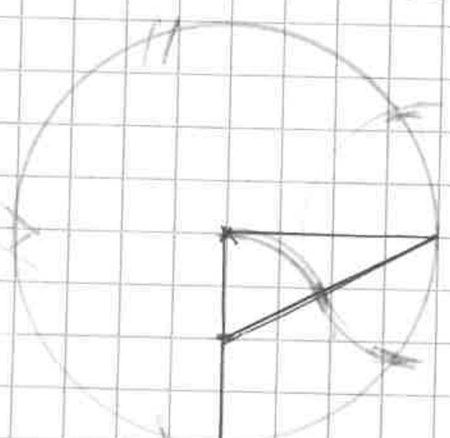
$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

$$x^2 + x - 1 = x(x+1) - 1 \Rightarrow x + 1 = \frac{1}{x}$$

Luku lisättynä yhdellä on kult. leik. luku $\approx 0,6180339\ldots$

Piirtäminen ruutupaperin avulla:
Jos suorakulmaisen kolmion kateetit ovat 1 ja 2, on hypotenuusa $\sqrt{5}$. Jos kateetit ovat $\frac{1}{2}$ ja 1, on hypotenuusa

$$\sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$



Otetaan pituusyksiköksi 4 ~~katon sivu~~ neljä ruutua säde = (eli (1 py))

Vaitaan säteeksi neljä neljä ruutua. Piirretään suorakulmainen kolmio, jonka kateetit ovat 2 ja 4 ruutua. Hypotenuusa on

$\frac{1}{2}$ 1 eli 1/2 ja 1

$\frac{\sqrt{5}}{2}$ py.

jonka suora kulma on ymp. keskip. ja

Vähennetään tästä harpilla lyhempi kateetti 2 ruutua $\hat{=} \frac{1}{2}$ py. Jäljelle jäänyt osa säännöllisen 10-kulmion sivu eli säteen suurempi osa, kun säde jaetaan jatkuvaan suhteeseen.

Näin voidaan piirtää ympyrän sisään säännöllinen 10-kulmio ja tietenkin myös säännöllinen 5-kulmio. Sään. 5-kulmion lävistäjät muodostavat säänn. viisikanta eli pentagrammin.

Jana (1 py) jaetaan jatkuvaan suhteeseen. Suurempi osa $x = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$. Pienempi osa

$$1-x = 1 - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(3-\sqrt{5}) \approx 0,381966\ldots$$

Määritelmänsä mukaan yhtälöstä $x^2+x-1=0$ seuraa:

$$x^2+x-1 = x(x+1)-1 = 0$$

$$x(x+1) = 1$$

$$x+1 = \frac{1}{x} \qquad x = \frac{1}{x} - 1$$

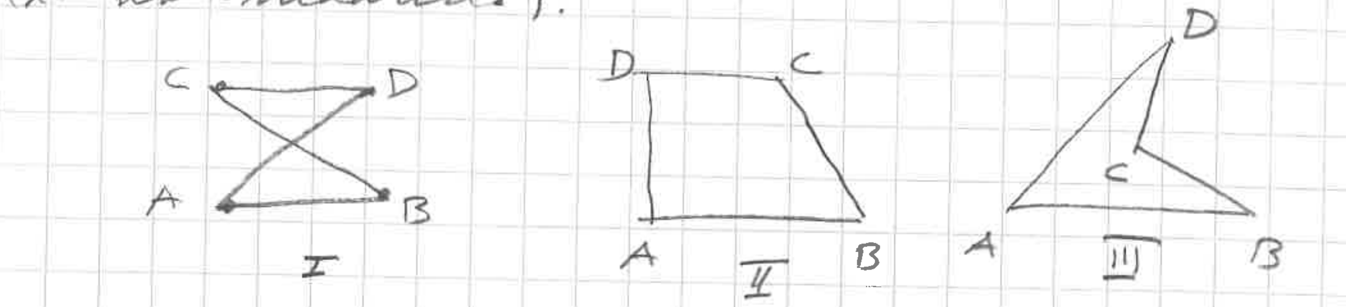
Luku lisättynä 1:llä on luvun käänteisluku.

~~Pienempi osa $1-x = 1-$~~

— 90' —

5. Nelikulmiot.

Annetaan neljä pistettä A, B, C ja D siten, että mitkään kolme niistä ei ole samalla suoralla (l. kollineaarista).



Oletetaan, että pisteet on nimetty sellaisessa järjestyksessä, että C on kulman ∡BAD aukeamassa. Silloin vaihtoehto I poistuu ja ABCD on aito nelikulmio. Jos tämän lisäksi A on kulman ∡BCD aukeamassa, vaihtoehto III poistuu ja ABCD on kupera l. konveksi nelikulmio.

Lause 1. Olkoon ABCD konveksi nelikulmio. Silloin D on kulman ∡ABC aukeamassa ja B on kulman ∡ADC aukeamassa.

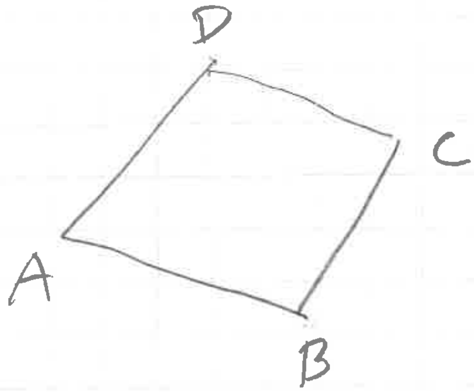
Todistus. Harjoitustehtävä. □

→ Selvyyden vuoksi tarkastelemme (ensisijaisesti) vain konvekseja nelikulmioita ABCD. Tällöin siis jokaisen kulman vastakkainen kärki on ko. kulman aukeamassa. Nelikulmion mikään kärki ei siis ole silloin erikoisasemassa.
Oletamme tuntevamme termit kärki, sivu, kulma, lävistäjä, vastakkaiset sivut tai kärjet jne.

Lause 2. Nelikulmion kulmien radiaanimittojen summa on 2π.

1. Nelikulmio on konveksi, jos ja vain jos jokainen kärki on kolmen muun kärjen muodostaman kulman aukeamassa.

Ratk



$C \in \sphericalangle BAD$:n aukeamassa $\quad \lambda + \mu + \nu = 1$

$A \in \sphericalangle BCD$:n aukeamassa $\quad A \notin BD$

$C = \lambda B + \mu A + \nu D, \quad \lambda > 0, \nu > 0, \mu \neq 0$

$A = -\frac{\lambda}{\mu} B + \frac{1}{\mu} C - \frac{\nu}{\mu} D$

$$-\frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{\mu} - \frac{\nu}{\mu} = \frac{1-\lambda-\nu}{\mu} = 1$$

Siis $-\frac{\lambda}{\mu} > 0$ ja $-\frac{\nu}{\mu} > 0$, joten $\underline{\underline{\mu < 0}}$

Väite ja vast. $D \in \sphericalangle ABC$:n aukeamassa
$B \in \sphericalangle ADC$:n aukeamassa

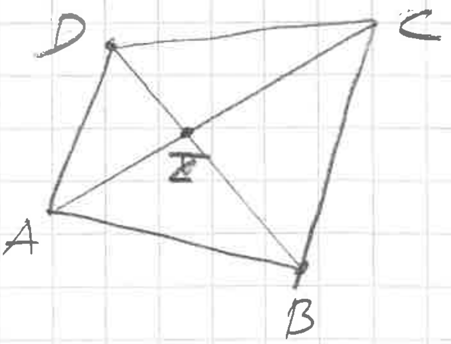
Tod $D = -\frac{\mu}{\nu} A - \frac{\lambda}{\nu} B + \frac{1}{\nu} C$

Koska $-\frac{\mu}{\nu} > 0$, $\frac{1}{\nu} > 0$ ja

$$-\frac{\mu}{\nu} - \frac{\lambda}{\nu} + \frac{1}{\nu} = \frac{1-\lambda-\mu}{\nu} = 1,$$

saadaan väite. $\square_{94}$ -

Todistus. Olkoon ABCD (konveksi) nelikulmio. Puolitasolauseen nojalla säde $\overrightarrow{AC}$ leikkaa lävistäjää BD jossakin pisteessä



$$X = (1-t)B + tD \quad , 0<t<1.$$

Vastaavasti puolitasolauseen perusteella

$$X = (1-s)A + sC \quad , 0<s<1.$$

Piste X on siis janan AC piste. Tästä seuraa, että lävistäjä AC jakaa sekä kulman $\sphericalangle BAD$ että kulman $\sphericalangle BCD$ kahteen osaan (vrt. vaihtoehto III). Kulmien yhteenlaskulauseesta seuraa nyt, että nelikulmion kulmien radiaanimittojen summa on kolmioiden $\triangle ABC$ ja $\triangle ACD$ kulmien radiaanimittojen summa. Väite seuraa kulmien yhteenlaskulauseesta. (Lause I 1.3.) □

Huom. Ei-konvekseille nelikulmioille (vaihtoehto III) voidaan todistaa sama tulos lähes sanasta sanaan samalla tavalla.

<u>Lause 3.</u> Nelikulmiolle ABCD seuraavat ehdot ovat yhtäpitäviä:

(i) Kaksi vastakkaista sivua on yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.

(ii) Lävistäjät puolittavat toisensa.

(iii) Molempien vastakkaisten sivuparien sivut ovat keskenään yhtä pitkiä.

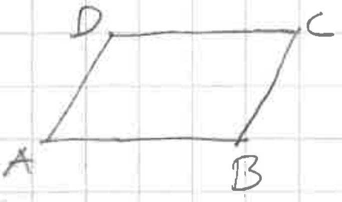
(iv) Molempien vastakkaisten kulmaparien kulmat ovat keskenään yhtä suuria.

(v) Molempien vastakkaisten sivuparien sivut ovat keskenään yhdensuuntaisia.

Todistus. Riittää osoittaa, että

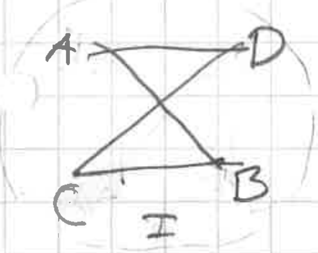
$$(i) \overset{1}{\Rightarrow} (ii) \overset{2}{\Rightarrow} (iii) \overset{3}{\Rightarrow} (iv) \overset{4}{\Rightarrow} (v) \overset{5}{\Rightarrow} (i).$$

1. (i) $\Rightarrow$ (ii). Oletetaan, että $AD \cong BC$ ja $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Tuolloin saamme, että



$$C - B = D - A.$$

(Vektoreilla on oltava sama suunta ja sama pituus.) Tällöin



$$C = B + C - B = B - A + D,$$

missä $1 - 1 + 1 = 1$. Tästä nähdään, että C on kulman $\measuredangle BAD$ aukeamassa. Poikkipalkkilauseen nojalla $\overrightarrow{AC} \cap BD \neq \emptyset$. (Oletuksesta (i) seuraa siis, että vaihtoehto I voi olla voimassa.) Olkoon

$$\overline{X} = \lambda B + \mu A + \nu D, \quad \lambda + \mu + \nu = 1.$$

Silloin $\overline{X} \in BD$, jos ja vain jos $\mu = 0$. Toisaalta $\overline{X} \in \overrightarrow{AC}$, jos ja vain jos

$$(*) \qquad \overline{X} = A + t(C - A) = A + t(B - 2A + D)$$

$$= tB + (1-2t)A + tD.$$

Koska $t + (1-2t) + t = 1$, on

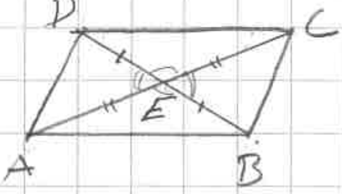
$$\overline{X} \in \overrightarrow{AC} \cap BD \iff \mu = 1 - 2t = 0 \iff t = \tfrac{1}{2}.$$

Ehdosta $(*)$ seuraa, että $\overline{X} \in \overrightarrow{AC} \cap BD$, jos ja vain jos

$$\overline{X} = \frac{1}{2}A + \frac{1}{C} = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}D.$$

Näin ollen $\overline{X}$ on sekä lävistäjän AC että lävistäjän BD keskipiste.

2. (ii) $\Rightarrow$ (iii). Oletetaan, että lävistäjät AC ja BD puolittavat toisensa. Olkoon E lävistäjien yhteinen keskipiste. Koska ristikulmat ovat keskenään yhtä suuria (Lause 1.5), seuraa yhtenevyyslauseesta SKS, että

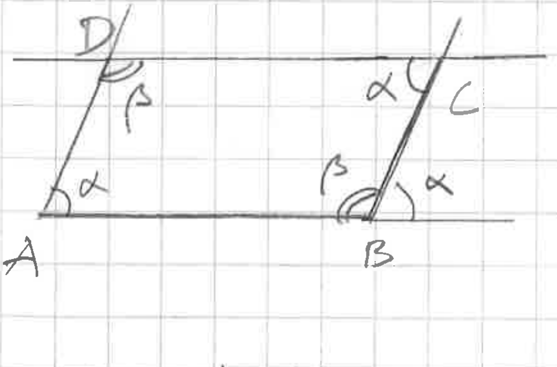


$$\triangle AED \cong \triangle CEB,$$
$$\triangle AEB \cong \triangle CED.$$

Yhtenevien kolmioiden vastinosina on $AB \cong CD$ ja $AD \cong BC$ (Lause 2.4)

3. (iii) $\Rightarrow$ (iv). Oletetaan, että $AB \cong CD$ ja $AD \cong BC$. Yhtenevyyslauseesta SSS seuraa, että $\triangle ABC \cong \triangle DCB$ ja $\triangle ADC \cong \triangle BCA$. Koska yhtenevien kolmioiden vastinkulmat ovat keskenään yhtä suuria, seuraa väite kulmien yhtenevyyslauseesta (vrt. Lauseen 2 todistus).

4. (iv) $\Rightarrow$ (v) Oletetaan, että $\sphericalangle DAB \cong \sphericalangle BCD$ ja $\sphericalangle ABC \cong \sphericalangle CDA$. Olkoon α edellisen kulmaparin ja β jälkimmäisen kulmaparin radiaanimitta. Silloin (Lause 2)



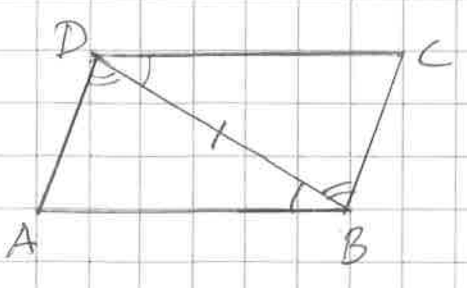
$$2\alpha + 2\beta = 2\pi$$

eli

$$\alpha + \beta = \pi,$$

joten kulman $\sphericalangle ABC$ vieruskulman radiaanimitta on α. Suora $\overleftrightarrow{BC}$ leikkaa suoria $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{CD}$ siten, että samankohtaiset kulmat ovat yhtä suuria. Tästä seuraa, että suorilla $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{DC}$ on sama suunta. Vastaavasti $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

5. (v) ⇒ (i). Oletetaan, että $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ ja $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$. Tarkastellaan siirtoa



$$T(X) = X + D - A.$$

Silloin T on siirto pitkin suoraa $\overleftrightarrow{AB}$ vektorin $D-A$ verran. Koska $\overleftrightarrow{CB} \parallel \overleftrightarrow{AD}$ on T myös siirto pitkin suoraa $\overleftrightarrow{BC}$. Koska $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$ ja $T(A) = D$, kuvaa T suoran $\overleftrightarrow{AB}$ suoraksi $\overleftrightarrow{DC}$. Koska T kuvaa suoran $\overleftrightarrow{BC}$ itselleen, kuvautuu suorien $\overleftrightarrow{AB}$ ja $\overleftrightarrow{BC}$ leikkauspiste suorien $\overleftrightarrow{DC}$ ja $\overleftrightarrow{BC}$ leikkauspisteeksi. Näin ollen

$$T(B) = C \text{ eli } B + D - A = C,$$

joten $D - A = C - B$.

5'. (v) ⇒ (i') Lauseen 1.5. (erikohtaiset kulmat) perusteella on

$$\sphericalangle ABD \cong \sphericalangle CDB \text{ ja } \sphericalangle ADB \cong \sphericalangle CBD.$$

Yhtenevyyslauseesta KSK seuraa, että $\overline{AD} \cong \overline{BC}$. □

<u>Korollaari 1.</u> Yhdensuuntaisten suorien yhdensuuntaiset välijanat ovat yhtä pitkiä.

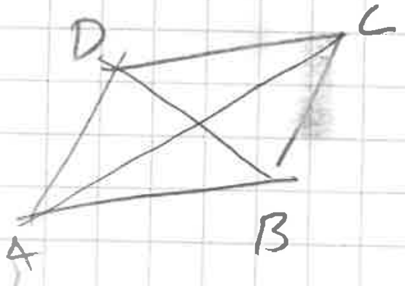
<u>Määritelmä 1</u> Nelikulmiota, joka toteuttaa minkä tahansa (ja siis myös kaikki) Lauseen 3 yhtäpitävistä ehdoista (i)–(v), kutsutaan <u>suunnikkaaksi</u>.

<u>Korollaari 2.</u> Jos suora leikkaa kaksi muuta suoraa siten, että erikohtaiset (tai samankohtaiset) kulmat ovat yhtä suuria, niin suorat ovat yhdensuuntaisia.

Lauseen 3 todistuksen 1. kohdassa tutkittiin lävistäjien leikkauspisteitä käyttämättä väitteen antamaa vihjettä hyväksi. Todistuksessa edettiin ikään kuin tutkimusmatkailijoina tuntemattomalle alueelle. Todistus antaa hyvän esimerkin keksimisen logiikasta. Uusi tulos löydetään matematiikassa yleensä tällä tavalla. Kun tulos on löydetty, tiedetään, mitä pitää todistaa. Sen jälkeen todistus voidaan usein esittää hyvin lyhyesti. Keksimisen logiikka ja todistamisen logiikka ovat joskus lähes vastakkaisia.

Harj. tehtävä: Analysoi Lauseen 3 todistuksen 1. kohta ja lyhennä se korkeintaan yhden rivin mittaiseksi.

Ratk. Alkuperäinen oletus: Nelikulmassa ABCD sivut AD ja BC ovat yhtä pitkiä ja yhdensuuntaisia.



Muokattu oletus: $C-B=D-A$.

Alkuperäinen väite: Lävistäjät puolittavat toisensa.

Muokattu väite: Janan AC keskipiste = janan BD keskipiste.

Janan AC keskipiste on $\frac{1}{2}(A+C)$
Janan BD keskipiste on $\frac{1}{2}(B+D)$.

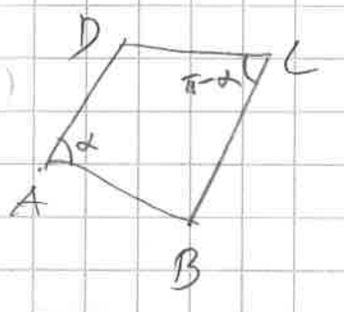
Loogillinen muotoilu:
Oletus: $C-B=D-A$
Väite: $\frac{1}{2}(A+C)=\frac{1}{2}(B+D) \iff A+C=B+D$.

Todistus $C-B=D-A \Rightarrow A+C=B+D$. $\square$

Määritelmä 2. Nelikulmio on jännenelikulmio, jos on olemassa ympyrä, jonka jänteitä nelikulmion sivut ovat. Tällöin sanotaan, että nelikulmion ympäri voidaan piirtää ympyrä.

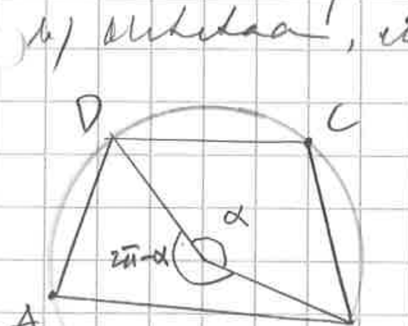
Lause 4. Nelikulmio on jännenelikulmio, ~~jos~~ jos ja vain jos sen kahden vastakkaisen kulman rad. mittojen summa on π.

Todistus. a) Oletetaan, että nelikulmiossa $ABCD$ kulmien $\measuredangle DAB$ ja $\measuredangle DCB$ rad. mittojen summa on π. Silloin myös kulmien $\measuredangle ADC$ ja $\measuredangle ABC$ rad. mittojen summa on π (Lause 2).



Piirretään ympyrä pisteiden A, B ja D kautta. Jos jana BD näkyy pisteestä A α:n suuruisessa kulmassa, niin se näkyy pisteestä C $(\pi-\alpha)$:n suuruisessa kulmassa. Koska niiden pisteiden joukko, joista annettu jana näkyy annetun kulman suuruisessa kulmassa, on ympyrän kaari, jonka jänteenä kyseinen jana on, seuraa, että C on pisteiden A, B ja D kautta kulkevalla ympyrällä. Nelikulmio on siis jännenelikulmio.

b) Oletetaan, että $ABCD$ on jännenelikulmio. Oletetaan tunnetuksi, että kehäkulma on puolet vastaavan keskuskulman rad. mitasta.

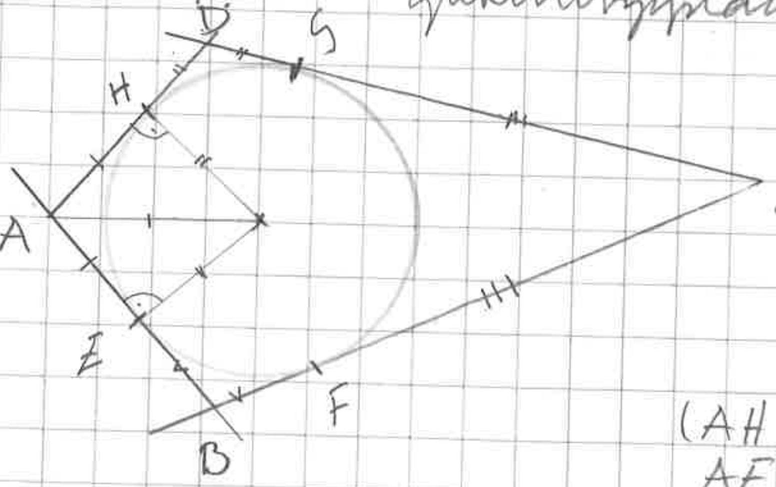


Kuvan merkinnöillä on kulma $\measuredangle DCB$ rad. mitta $\alpha/2$ ja kulma $\measuredangle DAB$ rad. mitta $\pi - \frac{\alpha}{2}$. Vastakkaisten kulmien rad. mittojen summa on siten π.

Määritelmä 3. Nelikulmio on tangenttinelikulmio, jos on olemassa ympyrä, jota nelikulmion kaikki sivut sivuavat.

Lause 5. Tangenttinelikulmiossa kahden vastakkaisen sivun pituuksien summa on yhtä suuri kuin kahden muun sivun pituuksien summa.

Todistus. Yhtenevyyslauseesta SSK (suora kulma) seuraa, että $AE \cong AH$. Vastaavasti $HD \cong DG$, $CG \cong CF$ ja $BF \cong BE$. Näin ollen



$$AD + CB =$$
$$(AH + HD) + (CF + FB) =$$
$$AE + DG + CG + BE =$$
$$(AE + BE) + (DG + CG) =$$
$$AB + CD. \ \square$$

Määritelmä 4. Nelikulmio on suorakulmio, jos sen kaikki kulmat ovat yhtä suuria.

Lause 6. Suorakulmio on suunnikas, jonka kaikki kulmat ovat suoria kulmia.

Todistus. Koska suorakulmio toteuttaa Lauseen 3 ehdon (iv), on suorakulmio suunnikas (Määritelmä 1). Lauseen 2 nojalla suorakulmion kaikki kulmat ovat suoria kulmia. □

Määritelmä 5. Nelikulmio on neljäkäs, jos sen kaikki sivut ovat yhtä pitkiä.

Lause 7. Neljäkäs on suunnikas.

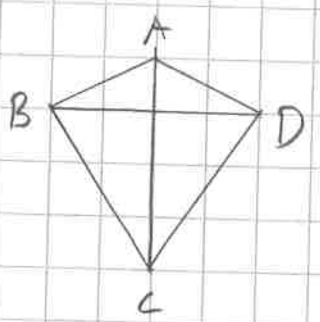
Todistus. Lause 3, ehto (iii). □

Määritelmä 6. Nelikulmio on neliö, jos sen kaikki sivut ovat keskenään yhtä pitkiä ja sen kaikki kulmat ovat keskenään yhtä suuria.

Lause 8. Nelikulmio on neliö, jos ja vain jos se on sekä suorakulmio että neljäkäs. □

Korollaari. Neliön kaikki kulmat ovat suoria kulmia. Neliö on suunnikas. □

Määritelmä 7. Kupera nelikulmio on leija, jos se koostuu kahdesta tasakylkisestä kolmiosta, joiden yhteisenä kantana nelikulmion toinen lävistäjä on.



Lause 9. Neljäkäs on leija. □

Lause 10. Leijan lävistäjät ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan. Lisäksi toinen lävistäjä puolittaa toisen lävistäjän.

Tod. Olkoon BD se lävistäjä, joka on kahden tasakylkisen kolmion kantana. Silloin $\overleftrightarrow{AC}$ on janan BD keskinormaali. □

Määritelmä 8. Nelikulmio on puolisuunnikas (trapetsi), jos sillä on kaksi keskenään yhdensuuntaista sivua.

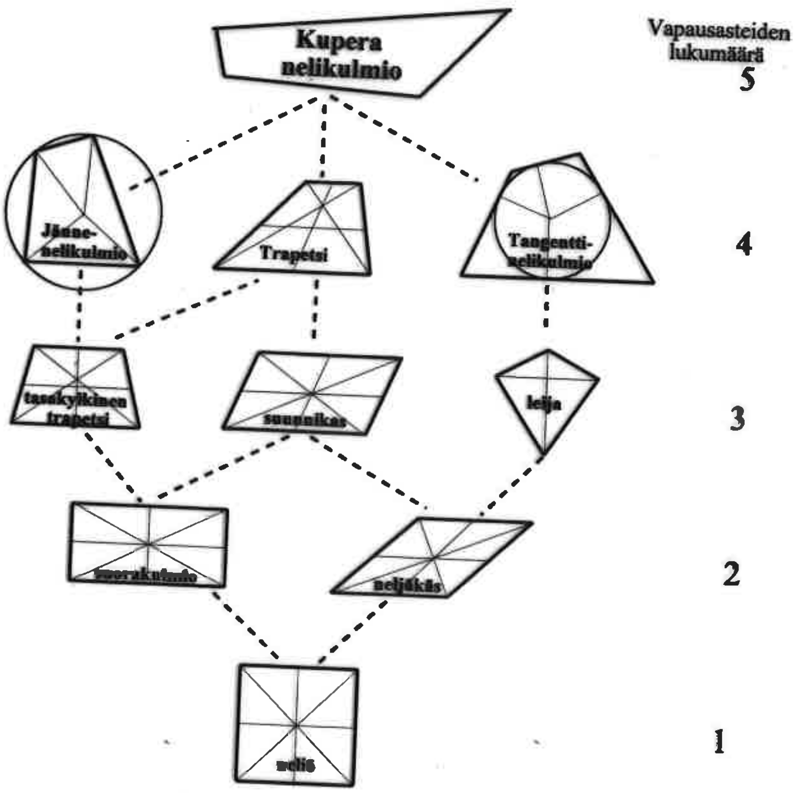
Lause 11. Suunnikas on puolisuunnikas. □

Määritelmä 9. Nelikulmio on tasakylkinen puolisuunnikas, jos sillä kaksi keskenään yhdensuuntaista sivua ja sen toiset kaksi sivua ~~ovat~~ keskenään yhtä pitkiä, mutta eivät keskenään yhdensuuntaisia.

Lause 12. Tasakylkinen puolisuunnikas on puolisuunnikas. Suunnikas ei ole tasakylkinen puolisuunnikas.

- neliö on myös suorakulmio, vaikka siinä on neljä yhtä pitkää sivua;
- neliö on myös neljäkäs, vaikka siinä on neljä suoraa kulmaa;
- tasasivuinen kolmio on myös tasakylkinen kolmio, vaikka siinä on kolme yhtä pitkää sivua

Mutta suunnikas ja puolisuunnikas ovat edelleen suomalaisessa käytännössä vierekkäin. Suunnikas ei ole puolisuunnikas, koska siinä on yhden parin asemesta kaksi paria yhdensuuntaisia sivuja. Yksikään suunnikas ei ole puolisuunnikas, eikä yksikään puolisuunnikas ole suunnikas. Minusta nyt uuden vuosituhannen alettua on aika siirtyä keskieurooppalaiseen tapaan:



Kuva 52. Kuperien nelikulmioiden luokittelu saksalaisittain

Ehdotus: **Ehdotan, että Suomessa siirrytään käytäntöön, jossa jokainen suunnikas on myös puolisuunnikas. Siirtymäkautena puolisuunnikkaasta voi käyttää nimeä trapetsi. Lisäksi ehdotan, että kuperien nelikulmioiden joukkoon otetaan nelikulmiotyyppi leija.**

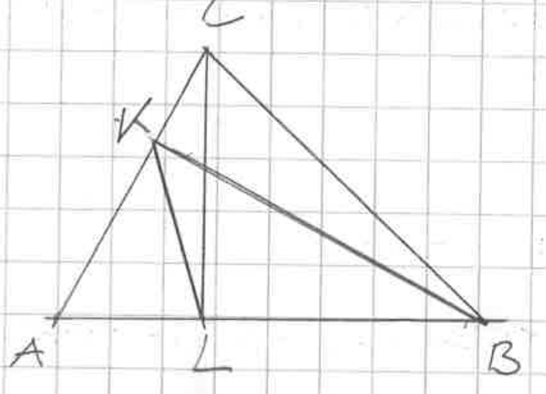
Mikäli tämä ehdotus hyväksytään, voidaan samalla ottaa käyttöön edellä esitetty nelikulmioiden "saksalainen" jaottelu.

Didaktiikan professori Julianna Szenrein kertoman mukaan tämä "saksalainen" käytäntö (ja nimitys trapéz) on myös Unkarissa voimassa. Didaktiikan dosentti Lea Lepmannin kertoman mukaan Virossa on sama puolisuunnikkaan määritelmä kuin Suomessa nykyään.

Yo. kirj. 1876 3 teht.

Todist. väittämä: Jos kolmiossa kahden korkeusviivan kantapisteet yhdistetään, saadaan alkuperäisen kolmion kanssa yhdenmuotoinen kolmio.

Tarkastellaan (aluksi) teräväkulmaista kolmiota $\triangle ABC$ ja sen korkeusjanoja BK ja CL.



Väite. $\triangle AKL \sim \triangle ABC$

Todistus. ~~Koska~~ $\triangle AKB \sim \triangle ALC$ (KK), on

$$AK : AL = AB : AC,$$ ja siis

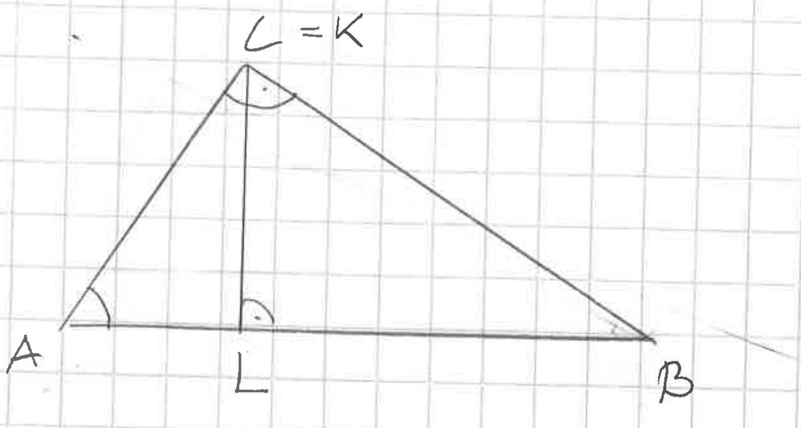
$$AK : AB = AL : AC.$$

Koska $\measuredangle KAL \cong \measuredangle BAC$, on SKS:n nojalla

$$\triangle AKL \sim \triangle ABC.$$

Suorakulmainen kolmio ja tylppäkulmainen kolmio vaativat omat kuvansa.

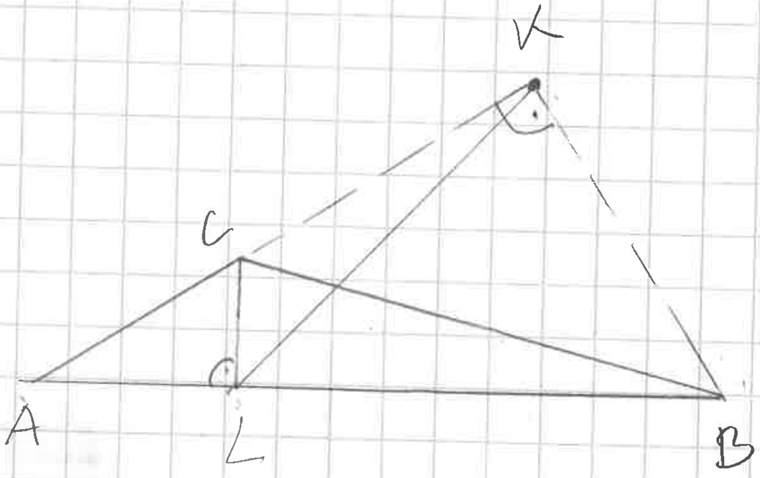
Valitaan $\measuredangle ACB$ suoraksi kulmaksi ja tylpäksi kulmaksi.



C = K

$\Delta AKL \sim \Delta ABC$

(KK)



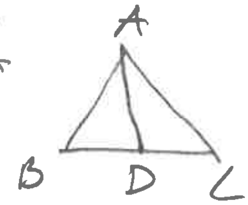
Esim. (yo.kirj. 1877, 2 tehtävä) Puolita kolmion pinta suoralla, joka kulkee kolmion sivulla olevan pisteen kautta.

Oletus: On annettu kolmio $\triangle ABC$ ja piste $O \in BC$.

Vaatimus: On piirrettävä pisteen O kautta kulkeva suora l, joka ~~jakaa~~ puolittaa kolmion $\triangle ABC$ pinta-alan – ~~kahteen~~ yhtä suureen osaan.

Ratkaisu: Olkoon $D = \frac{1}{2}(B+C)$.

1) Jos $O = D$, niin suora $l = \overleftrightarrow{DA}$ toteuttaa vaaditun ehdon.



2) Olkoon $O \neq D$. Voidaan olettaa, että $O \in BD$.

Piirretään: $\overleftrightarrow{AF} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ja $\overleftrightarrow{OF} \perp \overleftrightarrow{BC}$

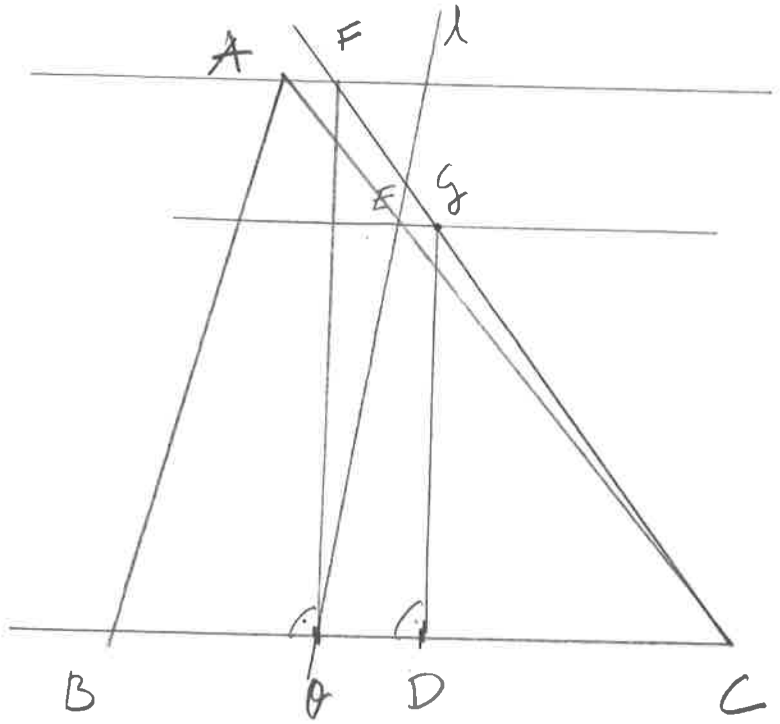
$\overleftrightarrow{CF}$

$\overleftrightarrow{DG} \perp \overleftrightarrow{BC}$, $G \in \overleftrightarrow{CF}$

$\overleftrightarrow{GE} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $E \in AC$

$\overleftrightarrow{OE}$.

Suora $l = \overleftrightarrow{OE}$ täyttää vaaditun ehdon.



Todistus: Riittää osoittaa, että kolmioilla $\triangle OEC$ ja $\triangle ADC$ on sama ala. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$(*) \qquad OC \cdot GD = DC \cdot OF. \quad \text{(Lause I.4.4.)}$$

Koska $\triangle DCG \sim \triangle OCF$ (KK), on

$$\frac{OC}{DC} = \frac{OF}{DG},$$

mistä (*) seuraa.

Tarkastelu: Esitetty ratkaisu on mahdollista suorittaa pelkästään harppia ja viivainta käyttämällä. Piste O määrää suoran l yksikäsitteisesti.

Huom. Ratkaisu on kenties kömpelö. Löytyykö mutkattomampaa?

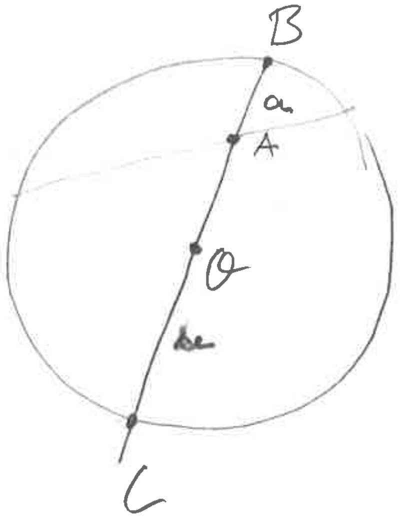
Yo. kirj. 1882 2. teht.

Piirrä ympyrässä olevan pisteen kautta jänne siten, että se tässä pisteessä jakaantuu kahteen osaan, joista toinen on kaksi kertaa niin suuri kuin toinen.

<u>Oletus.</u> Annetaan ympyrä K, jonka säde on r ja keskipiste O, sekä ympyrän sisällä piste A.

<u>Vaatimus.</u> On piirrettävä ympyrään K jänne, joka kulkee pisteen A kautta ja jonka piste A jakaa suhteessa 1:2.

<u>Ratkaisu.</u> Piirretään A:n kautta kulkeva halkaisija BC. Olkoon $a = AB$ ja $b = AC$, $a \leq b$. Silloin



$$b = 2r - a.$$

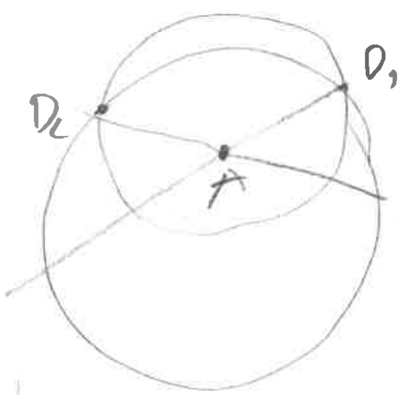
Jos etsityn jänteen osien pituudet ovat x ja $2x$, on Lauseen 3 nojalla

$$\frac{x}{a} = \frac{b}{2x},$$

josta $x = \sqrt{a\frac{b}{2}}$.

Piirretään janojen a ja $\frac{b}{2}$ keskiverto x. Piirretään A-keskinen x-säteinen ympyrä R.

1) Jos R ja K leikkaavat kahdessa pisteessä D_1 ja D_2, piirretään suorat $\overleftrightarrow{AD_1}$ ja $\overleftrightarrow{AD_2}$. Muodostuvat jänteet täyttävät vaaditun ehdon.



2) Jos R ja K sivuavat toisiaan pisteessä D, piirretään $\overleftrightarrow{AD}$. Muod. jänne toteuttaa vaad. ehdon.

3) Jos R on K:n sisällä, ei jännettä voida piirtää.

Tarkastelu: Pisteen A pienin etäisyys ympyrän K kehästä on a. Tehtävä ratkeaa, jos ja vain jos

$$x \geq a \iff x^2 \geq a^2 \iff$$

$$\frac{ab}{2} \geq a^2 \iff b \geq 2a$$

$$\iff 2r - a \geq 2a \iff a \leq \frac{2r}{3}$$

Tapaus 1 esiintyy, kun $a < \frac{2r}{3}$

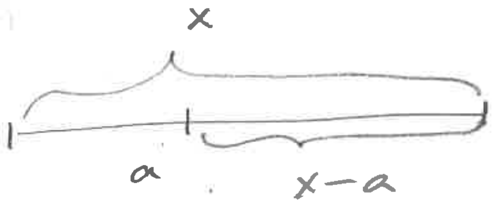
Tapaus 2 esiintyy, kun $a = \frac{2r}{3}$

Tapaus 3 esiintyy, kun $a > \frac{2r}{3}$, jolloin tehtävää ei voida ratkaista..

1898 Kevät, tehtävä 2

Piirrä semmoinen jana, että, kun se jaetaan jatkuvaisessa suhteessa, sen pienemmälle osalle on määrätty pituus.

Olkoon pienemmän osan pituus a ja etsittävän janan pituus x. Saadaan yhtälö



$$\frac{x}{x-a} = \frac{x-a}{a}$$

$$ax = x^2 - 2ax + a^2$$

$$x^2 - 3ax + a^2 = 0$$

$$x = \frac{3a \pm \sqrt{9a^2 - 4a^2}}{2} = \frac{3a \pm a\sqrt{5}}{2}$$

Koska

$$a\frac{3-\sqrt{5}}{2} < a, \text{ on } \quad x = \frac{3a + a\sqrt{5}}{2}$$

Piirtämisohje:

1) Jaetaan a jatkuvaan suhteeseen. Olkoon suurempi jako-osa b

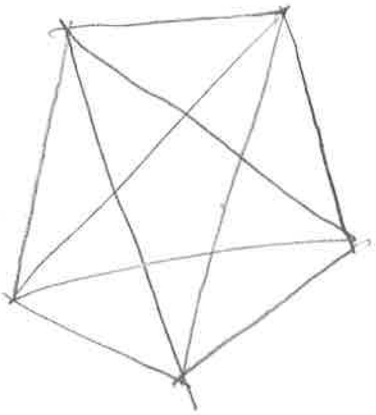
2) Muodostetaan jana $b + 2a = x$

Tarkastus: $b = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

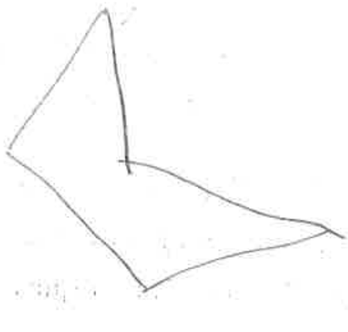
$$b + 2a = a\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2} + \frac{4}{2}\right) = a\frac{\sqrt{5}+3}{2}.$$

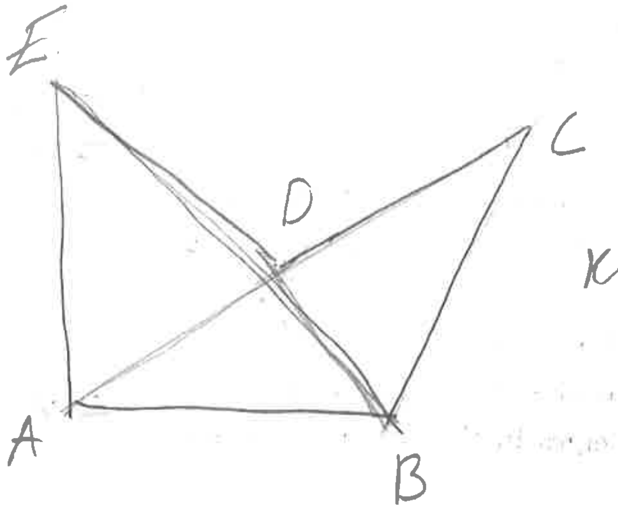
Yo.kirj. 1883, 3. teht.

Näytä toteen, että viisikulmiossa ~~a~~ kaikkien lävistäjien summa on pienempi kuin 2-kertainen piiri.



Jokainen lävistäjä on kantana kolmiossa, jonka kylkinä on kaksi samasta kärjestä alkavaa viisikulmion sivua. Kolmioepäyhtälön nojalla lävistäjän pituus on pienempi kuin näiden sivujen summa. Koska jokainen viisikulmion sivu kuuluu täsmälleen kahteen tällaiseen kolmioon, väite seuraa.





kritiikki

Pitäisikö tehtävässä olla kupera viisikulmio tai ainakin säänn. viisikulmio?