DIRICHLET'N PROBLEEMA RIEMANNIN PINNALLA

Jarmo Kiukkonen

Laudaturtutkielma
Joensuun korkeakoulu
Matematiikan ja fysiikan osasto
1983

Sisältö

1. Johdanto

Klassinen Dirichlet'n probleema on seuraavanlainen: Olkoon Y kompleksitason $\mathbb{C}$ avoin joukko ja $f\colon \partial Y \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. On määrättävä joukossa Y harmoninen ja joukossa $\overline{Y}$ jatkuva funktio siten, että $u|\partial Y = f$.

Tässä tutkielmassa tutkitaan ongelmaa yleisemmässä muodossa ottamalla tarkasteltavaksi kompleksitason $\mathbb{C}$ sijasta Hausdorffin avaruus, jolla on lokaalisti kompleksitason metriikka eli Riemannin pinta. Struktuurinsa ansiosta voidaan Riemannin pinnalla määritellä harmoniset ja subharmoniset funktiot.

Klassinen Dirichlet'n probleema Riemannin pinnalla ratkaistaan approksimoimalla ratkaisufunktiota $u\colon \overline{Y} \to \mathbb{R}$ subharmonisilla funktioilla alhaaltapäin. Tämä on niin kutsuttu Perronin-Wienerin-Brelot'n menetelmä. Tällöin on joukon Y reunan ∂Y toteutettava tietyt säännöllisyysvaatimukset.

Klassisen Dirichlet'n probleeman ratkeavuutta käytetään tämän jälkeen hyväksi todistettaessa, että Riemannin pinnan topologialla on numeroituva kanta.

Lopuksi tarkastellaan vielä yleistettyä Dirichlet'n probleemaa Riemannin pinnalla. Yleistetyn Dirichlet'n probleeman ongelmana on liittää pariin (Y,f) avoimessa joukossa Y harmoninen funktio H_f^Y, joka yhtyy klassisen Dirichlet'n probleeman ratkaisufunktioon, mikäli tällainen ratkaisufunktio on olemassa.

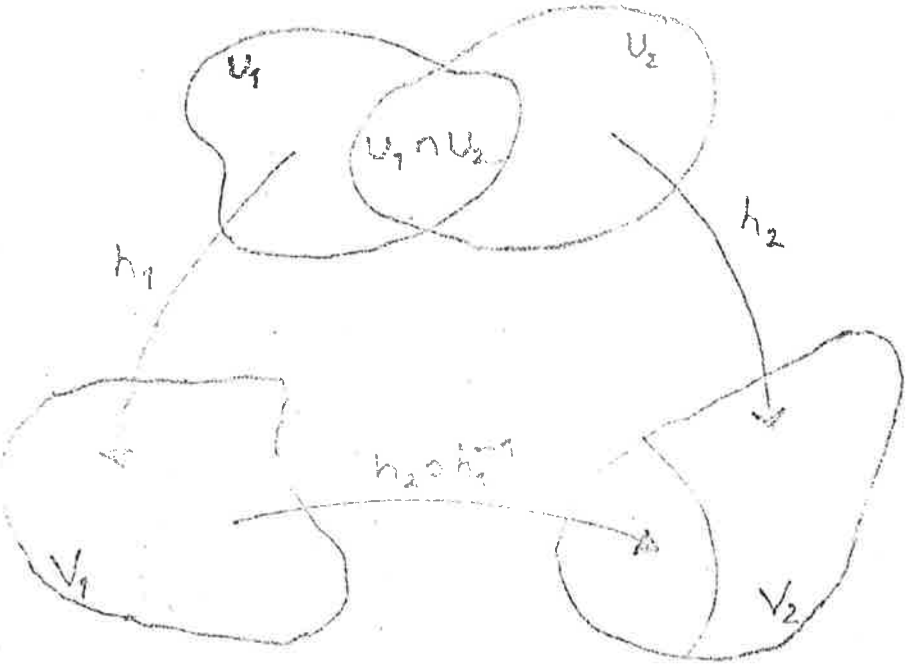
1. Riemannin pinta

2.1. Määritelmä. n-dimensionaalinen monisto on Hausdorffin avaruus X, jonka jokaisella pisteellä $x \in X$ on avaruuden $\mathbb{R}^n$ jonkin avoimen osajoukon kanssa homeomorfinen avoin ympäristö.

2.2. Määritelmä. Olkoon X kaksidimensionaalinen monisto. Moniston X kartta eli lokaali parametri(kuvaus) on homeomorfismi $h: U \to V$ avoimelta joukolta $U \subset X$ avoimelle joukolle $V \subset \mathbb{C}$. Kaksi karttaa $h_i: U_i \to V_i$, $i = 1,2$ ovat konformisesti yhteensopivat, jos kuvaus

$$h_2 \circ h_1^{-1} : h_1(U_1 \cap U_2) \to h_2(U_1 \cap U_2)$$

on konforminen (katso kuva 1).



Kuva 1.

2.3. Määritelmä. Moniston kartasto eli konforminen struktuuri on kokoelma $\mathcal{U} = \{h_i : U_i \to V_i \mid i \in I\}$ pareittain konformisesti yhteensopivia karttoja, jotka peittävät moniston X eli

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X.$$

Kaksi konformista struktuuria $\mathcal{U}, \mathcal{U}'$ ovat konformisesti yhteensopivat, jos jokainen kokoelman $\mathcal{U}$ kartta on jokaisen kokoelman $\mathcal{U}'$ kartan kanssa konformisesti yhteensopiva.

2.4. Määritelmä. Riemannin pinta on pari $(X,\mathcal{U})$, missä X on yhtenäinen Hausdorffin avaruus ja $\mathcal{U}$ avaruuden X (jokin) konforminen struktuuri. Kun on selvää, mistä konformisesta struktuurista $\mathcal{U}$ kulloinkin on kyse, kirjoitetaan merkinnän $(X,\mathcal{U})$ sijasta pelkästään X.

2.5. Huomautus. Lokaalisti Riemannin pinta X käyttäytyy kuten kompleksitason avoin joukko. Tuleehan kartan $h: U \to V \subset \mathbb{C}$ avulla avoin joukko $U \subset X$ kuvatuksi homeomorfisesti joukolle V. Kuitenkin Riemannin pinnan X annettu piste x saattaa sisältyä moneen karttaan, joista mikään ei ole muita erikoisemmassa asemassa. Siksi voidaan vain sellaiset funktioteorian kompleksitasoon liittyvät käsitteet ja tulokset, jotka ovat invariantteja konformisissa kuvauksissa, siirtää Riemannin pinnalle eli tällaisten käsitteiden ja tulosten tapauksessa ei sillä, mikä erityinen kartta on valittu, ole merkitystä.

2.6. Määritelmä. Olkoon $h: U \to V$ Riemannin pinnan X kartta. Paria (U,h) kutsutaan parametriympäristöksi jokaiselle pisteelle $x \in U$.

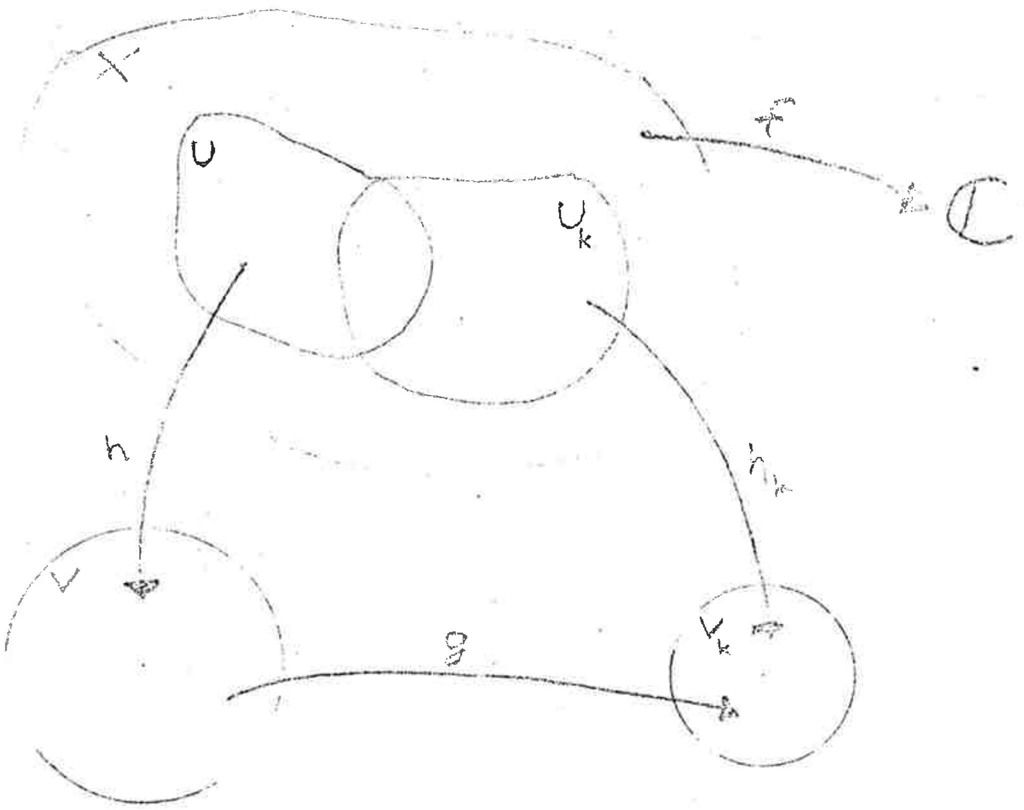
2.7. Määritelmä. Riemannin pinnan X parametrikiekko on pari (D,h), missä D on Riemannin pinnan X alue ja h kartta joltakin sulkeuman $\bar{D}$ avoimelta ympäristöltä U siten, että h kuvaa sulkeuman $\bar{D}$ bijektiivisesti kiekolle $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$.
Piste $h^{-1}(0)$ on parametrikiekon (D,h) keskus.
Tavallisesti identifioidaan joukot $\bar{D}$ ja $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq 1\}$, "unohdetaan" kuvaus h ja sanotaan yksinkertaisesti kiekko D.

3. Harmoninen funktio Riemannin pinnalla

3.1. Määritelmä. Olkoon X Riemannin pinta ja $\mathcal{U} = \{h_i : U_i \to V_i \mid i \in I\}$ sen (jokin) kartasto. Riemannin pinnalla X määritelty kompleksiarvoinen funktio f on analyyttinen, jos $f \circ h_i^{-1}$ on tavallisessa mielessä analyyttinen kaikille $i \in I$.

3.2. Lause. Analyyttisyys ei riipu käytetystä kartastosta.

Todistus. Olkoon $\mathcal{U} = \{h_i : U_i \to V_i \mid i \in I\}$ se Riemannin pinnan X kartasto, jonka avulla funktion f analyyttisyys on määritelty ja olkoon $h: U \to V$ jonkin toisen kartaston $\mathcal{U}'$ mielivaltainen kartta. On näytettävä, että $f \circ h^{-1}$ on tavallisessa mielessä analyyttinen.



Kuva 2.

Olkoon h_k kokoelman $\mathcal{U}$ mielivaltainen kuvaus. Tarvittaessa siirtymällä komponentteihin ja pienentämällä joukkoja V ja V_k voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että V ja V_k ovat avoimia kiekkoja, jolloin V voidaan analyyttisesti kuvata joukolle V_k. Merkitään tätä kuvausta g. Riittää tarkastella vain tapauksia $k \in I$, joille $U \cap U_k \neq \emptyset$. Tällöin joukossa $h(U \cap U_k)$ on voimassa

$$f \circ h^{-1} = f \circ h_k^{-1} \circ g ,$$

(katso kuva 2).

Koska funktio $f \circ h_k^{-1} \circ g$ on tavallisessa mielessä analyyttinen, on $f \circ h^{-1}$ tavallisessa mielessä analyyttinen joukossa $h(U \cap U_k)$.

Koska lisäksi

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X ,$$

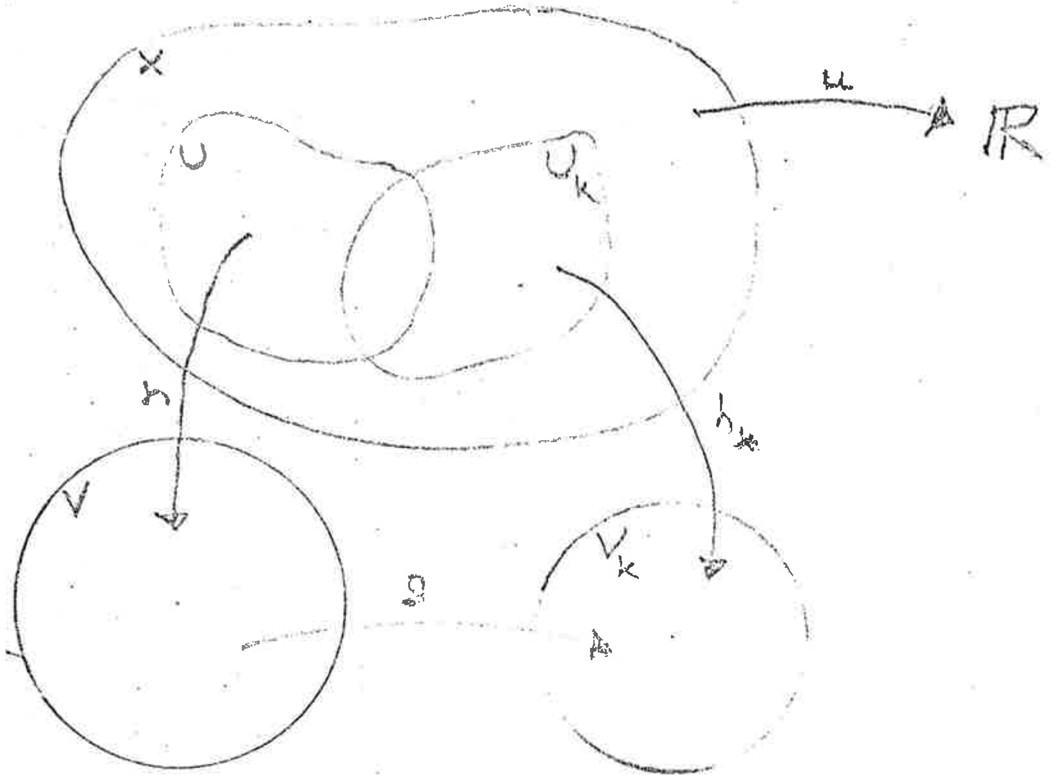
on $f \circ h^{-1}$ tavallisessa mielessä analyyttinen koko joukossa $h(U) = V$.

<u>3.3.</u> <u>Määritelmä</u>. Olkoon X Riemannin pinta ja $\mathcal{U} = \{h_i : U_i \to V_i \mid i \in I\}$ sen (jokin) kartasto. Riemannin pinnalla X määritelty reaaliarvoinen funktio u on <u>harmoninen</u>, jos $u \circ h_i^{-1}$ on tavallisessa mielessä harmoninen kaikille $i \in I$.

<u>3.4.</u> <u>Lause</u>. Harmonisuus ei riipu käytetystä kartastosta.

<u>Todistus</u>. Olkoon $\mathcal{U} = \{h_i : U_i \to V_i \mid i \in I\}$ se Riemannin pinnan X kartasto, jonka avulla funktion u harmonisuus on määritelty ja olkoon $h: U \to V$ jonkin toisen kartaston $\mathcal{U}'$ mielivaltainen kartta. On näytettävä, että $u \circ h^{-1}$ on tavallisessa mielessä harmoninen.

Olkoon h_k kokoelman $\mathcal{U}$ mielivaltainen kuvaus. Samoin kuin lauseen 3.2. todistuksessa voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että V ja V_k ovat avoimia kiekkoja, joilloin $V \subset \mathbb{C}$ voidaan kuvata analyyttisesti kiekolle $V_k \subset \mathbb{C}$. Merkitään tätä kuvausta g. Riittää tarkastella vain tapauksia $k \in I$, joille $U \cap U_k \neq \emptyset$. (Katso kuva 3.)



Kuva 3.

Merkitään avoimen kiekon V pisteitä $\zeta = \xi + i\eta$ ja avoimen kiekon V_k pisteitä $z = x + iy$. On näytettävä, että kuvaus $u \circ h^{-1}$ on harmoninen eli

$$\Delta(u \circ h^{-1}) = \frac{\partial^2(u \circ h^{-1})}{\partial \xi^2} \quad \frac{\partial^2(u \circ h^{-1})}{\partial \eta^2} = 0.$$

Joukossa $h(U \cap U_k)$ on voimassa

$$u \circ h^{-1} = u \circ h_k^{-1} \circ g.$$

Mutta koska

$$\Delta(u \circ h^{-1}) = \Delta(u \circ h_k^{-1}) \cdot |g'(\zeta)|^2$$

(todistuksesta katso [2], sivu 198) ja koska $\Delta(u \circ h_k^{-1}) = 0$, on myös $\Delta(u \circ h^{-1}) = 0$ eli $u \circ h^{-1}$ on harmoninen joukossa $h(U_k \cap U)$.

Koska lisäksi

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X ,$$

on $u \circ h^{-1}$ harmoninen koko joukossa $h(U) = V$.

3.5. Lause. Riemannin pinnalla X määritellyn analyyttisen funktion f reaaliosa ja imaginääriosa ovat harmonisia funktioita.

Todistus. Olkoon $\mathcal{U} = \{ h_i : U_i \to V_i \mid i \in I \}$ Riemannin pinnan X (jokin) kartasto. Kuvaus

$$f \circ h_i^{-1} : h_i(U_i) \to \mathbb{C}$$

on analyyttinen tavallisessa mielessä kaikille $i \in I$. Väite seuraa nyt välittömästi siitä, että tavallisessa mielessä analyyttisen funktion reaaliosa ja imaginääriosa ovat harmonisia funktioita.

3.6. Lause. (Maksimiperiaate harmonisille funktioille Riemannin pinnalla.) Riemannin pinnalla X määritelty harmoninen funktio u, jolla on maksimi, on vakiofunktio.

Todistus. Olkoon $\mathcal{U} = \{ h_i : U_i \to V_i \mid i \in I \}$ Riemannin pinnan X (jokin) kartasto ja olkoon $x_0 \in X$ se piste, jossa u saavuttaa maksiminsa.

Koska

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X ,$$

niin on olemassa avoin joukko U_k, $k \in I$ siten, että $x_0 \in U_k$. Tavallisen harmonisen funktion maksimiperiaatteen nojalla on funktio $u \circ h_k^{-1}$ vakio määrittelyjoukossaan $h_k(U_k)$. Mutta tästä seuraa, että niiden pisteiden, joissa u saa maksiminsa, muodostama joukko $E = \{ x \in X \mid u(x) = x_0 \}$, on avoin.

Toisaalta E on myös suljettu, sillä olkoon $y \in X$ joukon E kasaantumispiste ja jono $(x_n)_{n \in N}$ joukon E alkioita olkoon kohti pistettä y suppeneva jono. Koska

$$\bigcup_{i \in I} U_i = X ,$$

niin on olemassa avoin joukko U_l, $l \in I$ siten, että $y \in U_l$. Lisäksi koska y on kasaantumispiste kuuluu joukkoon U_l ainakin yksi joukon $\{ x_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ alkio. Sovelletaan tavallista harmonisten funktioiden maksimiperiaatetta funktioon $u \circ h^{-1}$, mistä saadaan, että funktio u on vakio $\equiv x_0$ avoimessa joukossa U_l ja erikoisesti pisteessä y eli $y \in E$. Tämä tarkoittaa, että E on suljettu.

Koska joukko E sisältää ainakin pisteen x_0, on se epätyhjä. Riemannin pinnan X yhtenäisyyden takia täytyy joukon E komplementin olla tyhjä, mikä tarkoittaa sitä, että funktio u saa vakioarvon $\equiv x_0$ koko Riemannin pinnalla X.

<u>3.7.</u> <u>Lause</u>. (Minimiperiaate harmonisille funktioille Riemannin pinnalla.) Riemannin pinnalla X määritelty harmoninen funktio u, jolla on minimi, on vakiofunktio.

<u>Todistus</u>. Väite todistetaan täsmälleen samalla tavalla kuin lause 3.6. lukuunottamatta seikkaa, että tavallisen harmo-

nisten funktioiden maksimiperiaatteen sijasta on käytettävä tavallista harmonisten funktioiden minimiperiaatetta.

4. Klassinen Dirichlet'n probleema Riemannin pinnalla

4.1. Määritelmä. Klassisella Dirichlet'n probleemalla Riemannin pinnalla X tarkoitetaan seuraavaa: Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko siten, että $\partial Y \neq \emptyset$ (∂Y tarkoittaa joukon Y reunaa) ja $f\colon \partial Y \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. On löydettävä jatkuva funktio $u\colon \overline{Y} \to \mathbb{R}$, joka on harmoninen avoimessa joukossa Y ja jolle $u|\partial Y = f$.

4.2. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin relatiivikompakti (eli $\overline{Y}$ on kompakti) joukko siten, että $\partial Y \neq \emptyset$ ja $f\colon \partial Y \to \mathbb{R}$ jatkuva funktio. Jos Dirichlet'n probleemalla joukossa Y reunafunktion f suhteen on ratkaisu, niin se on yksikäsitteinen.

Todistus. Oletetaan, että funktiot u_i, $i = 1,2$ ovat ratkaisufunktioita. Tällöin reunalla ∂Y on

$$u_1 - u_2 = 0.$$

Koska $\overline{Y}$ on kompakti, on funktiolla $u_1 - u_2$ maksimi joukossa $\overline{Y}$ ja siis maksimiperiaatteen (sivu 10) nojalla funktio $u_1 - u_2$ on vakio $\equiv 0$ sulkeumassa $\overline{Y}$ eli

$$u_1 \equiv u_2 .$$

4.3. Merkintä. Merkitään

$$D(R) := \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| < R \}, \quad (R > 0) .$$

4.4. Lause. Jos $f\colon \partial D(R) \to \mathbb{R}$ on jatkuva ja jos asetetaan

$$(*) \qquad u(z) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{R^2 - |z|^2}{|Re^{i\theta} - z|^2} f(Re^{i\theta})\, d\theta$$

kaikille $|z| < R$ ja

$$u(z) := f(z)$$

kaikille $|z| = R$, niin u on jatkuva sulkeumassa $\overline{D(R)}$ ja harmoninen avoimessa kiekossa $D(R)$.

Ennen kuin todistetaan edellä oleva lause, näytetään toteen seuraava tarvittava apulause.

__4.5.__ __Apulause.__ Olkoon $\zeta \in \partial D(R)$. Kaikille $z \neq \zeta$ olkoon

$$F(z, \zeta) := \frac{\zeta + z}{\zeta - z}.$$

Tällöin funktio

$$G(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} F(z, \zeta)\, f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta},$$

missä f on lauseessa 4.4. määritelty funktio, on analyyttinen

__Todistus.__ Olkoon $z \in D(R)$ ja $z + h \in D(R)$. On näytettävä, että on olemassa raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(z+h) - G(z)}{h}.$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(z+h) - G(z)}{h} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi i h} \int_{|\zeta|=R} (F(z+h, \zeta) - F(z, \zeta))\, f(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta} =$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)}\, d\zeta =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} \, d\zeta \, .$$

Koska $z \neq \zeta$, on integroitava

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2}$$

määritelty ja jatkuva joukossa $\partial D(R)$, mistä seuraa, että vaadittu raja-arvo

$$\lim_{h \to 0} \frac{G(z+h) - G(z)}{h}$$

on olemassa kaikille $z \in D(R)$ eli G on analyyttinen avoimessa kiekossa $D(R)$.

4.6. Lauseen 4.4. todistus.

Olkoon $\zeta \in \partial D(R)$ ja asetetaan kaikille $z \neq \zeta$

$$P(z, \zeta) := \frac{|\zeta|^2 - |z|^2}{|\zeta - z|^2} \, ,$$

$$F(z, \zeta) := \frac{\zeta + z}{\zeta - z} \, .$$

Käyttämällä kaavaa $\mathrm{Re}\, w = \frac{1}{2}(w + \overline{w})$ todetaan, että on voimassa

$$P(z, \zeta) := \mathrm{Re}(F(z, \zeta)) .$$

Näin ollen (**) (katso sivu 14) voidaan kirjoittaa muodossa

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, Re^{i\vartheta}) \, f(Re^{i\vartheta}) \, d\vartheta$$

$$= \mathrm{Re} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(z, Re^{i\vartheta}) \, f(Re^{i\vartheta}) \, d\vartheta \right)$$

$$= \mathrm{Re} \left(\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta|=R} F(z, \zeta) \, f(\zeta) \, \frac{d\zeta}{\zeta} \right) .$$

Apulauseen 4.5. (sivu 14) nojalla on u avoimessa kiekossa $D(R)$ analyyttisen funktion reaaliosa, siis u on harmoninen (lause 3.5. sivu 10).

On vielä näytettävä, että u on jatkuva jokaisessa pisteessä $Re^{i\theta} \in \partial D(R)$, $\theta \in [0,2\pi]$. Residylauseen avulla saadaan

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,Re^{i\theta})d\theta = Re\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta|=R} \frac{\zeta+z}{\zeta-z}\frac{d\zeta}{\zeta}\right) = 1 .$$

Jos $\zeta_0 \in \partial D(R)$ ja $z \in D(R)$, on näin ollen kaikille $\zeta = Re^{i\theta}$

$$u(z) - f(\zeta_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z,\zeta)(f(\zeta)-f(\zeta_0))\, d\theta .$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Koska f on jatkuva määrittelyjoukossaan $\partial D(R)$, on olemassa $\delta_0 > 0$ siten, että

$$|f(\zeta) - f(\zeta_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} ,$$

kun $|\zeta - \zeta_0| \leq \delta_0$. Samoin on olemassa vakio $M > 0$ siten, että

$$|f(\zeta)| \leq M$$

kaikille $\zeta \in \partial D(R)$. Jaetaan integrointiväli $[0,2\pi]$ kahteen osaan: A koostukoon kaikista $\theta \in [0,2\pi]$, joille $|Re^{i\theta} - \zeta_0| \leq \delta_0$ ja olkoon B loput välin $[0,2\pi]$ pisteet. Tällöin on voimassa

$$|u(z) - f(\zeta_0)| \leq$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_A P(z,\zeta)\frac{\varepsilon}{2}\, d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_B P(z,\zeta)\cdot 2M\, d\theta \leq$$

$$\frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{\pi}\int_B P(z,Re^{i\theta})\, d\theta .$$

Jos valitaan $|z-\zeta_0| =: \delta < \delta_0/2$, niin kaikille $\theta \in B$ on voimassa

$$|Re^{i\theta} - z| \geq |Re^{i\theta} - \zeta_0| - |z - \zeta_0| \geq \delta_0/2$$

ja

$$P(z, Re^{i\theta}) = \frac{(R+|z|)(R-|z|)}{|Re^{i\theta}-z|^2} \leq \frac{2R\delta}{(\delta_0/2)^2} = \frac{8R}{\delta_0^2}\cdot\delta$$

ja siis on

$$|u(z) - f(\zeta_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{16RM}{\delta_0^2}\delta \leq \varepsilon ,$$

kun $|z-\zeta_0|$ on riittävän pieni.

4.7. Seurauslause. Olkoon $u\colon D(R) \to \mathbb{R}$ harmoninen funktio. Tällöin kaikille $r < R$ ja $|z| < r$ on voimassa

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\theta} - z|^2}\, u(re^{i\theta})\, d\theta .$$

Erikoisesti funktiolla u on keskiarvo-ominaisuus

$$u(o) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})\, d\theta .$$

Todistus. Väitteet seuraavat lauseesta 4.4. (sivu 13), koska Dirichlet'n probleeman ratkaisu on yksikäsitteinen.

4.8. Seurauslause. Olkoon $u_n\colon D(R) \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ harmonisten funktioiden muodostama jono, joka jokaisessa avoimen kiekon $D(R)$ kompaktissa osajoukossa suppenee tasaisesti kohti funktiota $u\colon D(R) \to \mathbb{R}$. Tällöin myös u on harmoninen.

Todistus. Jokaiselle $r < R$ ja kaikille $|z| < r$ on seurauslauseen 4.7. (sivu 17) nojalla voimassa

$$u_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})\, u_n(re^{i\vartheta})\, d\vartheta ,$$

missä $P(z,\zeta)$ olkoon määritelty kuten kohdassa 4.6. (sivu 15). Koska funktiojono $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reunalla $\partial D(R)$ suppenee tasaisesti kohti funktiota u, on ylläoleva integraalilauseke voimassa myös funktiolle u. Lauseesta 4.4. (sivu 13) seuraa nyt, että u on avoimessa kiekossa $D(R)$ harmoninen.

4.9. Lause. (Harnackin lause.) Olkoon $M \in \mathbb{R}$ ja

$$u_0 \le u_1 \le u_2 \le \dots \le M$$

kasvava ja rajoitettu jono harmonisia funktioita $u_n\colon D(R) \to \mathbb{R}$. Tällöin jono suppenee tasaisesti kiekon $D(R)$ jokaisessa kompaktissa osajoukossa kohti erästä harmonista funktiota $u\colon D(R) \to \mathbb{R}$.

Todistus. Olkoon $K \subset D(R)$ kompakti. Tällöin on olemassa vakiot $\rho < r < R$ siten, että

$$K \subset \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le \rho\} .$$

Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu ja

$$\varepsilon' := \frac{r-\rho}{r+\rho}\varepsilon .$$

Koska jono $(u_n(0))_{n}$ on kasvava ja rajoitettu, on olemassa $N \in \mathbb{N}$ siten, että

$$u_n(0) - u_m(0) \leq \varepsilon'$$

kaikille $n \geq m \geq N$. Koska kaikille $|z| \leq \rho$ on voimassa

$$0 \leq P(z, re^{i\vartheta}) =$$
$$\frac{|re^{i\vartheta}|^2 - |z|^2}{|re^{i\vartheta} - z|^2} =$$
$$\frac{r^2 - |z|^2}{|re^{i\vartheta} - z|^2} \leq$$
$$\frac{r^2 - |z|^2}{(|re^{i\vartheta}| - |z|)^2} =$$
$$\frac{r+|z|}{r-|z|} \leq \frac{r+\rho}{r-\rho} ,$$

saadaan kaikille $z \in K$

$$u_n(z) - u_m(z) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, re^{i\vartheta})(u_n(re^{i\vartheta}) - u_m(re^{i\vartheta}))\, d\vartheta \leq$$
$$\frac{r+\rho}{r-\rho}\,\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (u_n(re^{i\vartheta}) - u_m(re^{i\vartheta}))\, d\vartheta =$$
$$\frac{r+\rho}{r-\rho}(u_n(0) - u_m(0)) \leq \varepsilon .$$

Siis funktiojono $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee joukossa K tasaisesti. Seurauslauseen 4.8. (sivu 18) mukaan on rajafunktio harmoninen.

Siirrytään nyt tutkimaan Dirichlet'n probleemaa mielivaltaisella Riemannin pinnalla X.

4.10. Lause. Riemannin pinnalla X on Dirichlet'n probleema ratkaistavissa kaikille alueille $D \subset X$, joiden sulkeuma on kompakti ja sisältyy johonkin karttaan (U,z) siten, että $z(D)$ on kiekko.

Todistus. Väite seuraa välittömästi siitä, että $z(D)$ on kuvattavissa konformisesti kiekolle $D(R)$, jolle Dirichlet'n probleema on edellä ratkaistu (lause 4.4. sivu 13) ja siitä, että harmonisuus on konformisesti invariantti ominaisuus (lause 3.4. sivu 8).

4.11. Merkintöjä. Olkoon X Riemannin pinta. Avoimelle joukolle $Y \subset X$ merkitään $\mathrm{Reg}(Y)$ kokoelmaa, joka koostuu niistä alueista $D \subset Y$, jotka ovat relatiivikompakteja ja joille Dirichlet'n probleema on ratkaistavissa jokaiselle jatkuvalle reunafunktiolle $f\colon \partial D \to \mathbb{R}$.
Jatkuvalle funktiolle $u\colon Y \to \mathbb{R}$ ja alueelle $D \in \mathrm{Reg}(Y)$ merkitään $P_D u$ tarkoittamaan sitä avoimessa joukossa Y jatkuvaa funktiota, joka joukossa $Y \setminus D$ yhtyy funktioon u ja joukossa $\bar{D}$ yhtyy Dirichlet'n probleeman ratkaisuun, kun reunafunktiona on $u|\partial D$.
Symbolilla $C(Y)$ tarkoitetaan vektoriavaruutta, joka koostuu kaikista jatkuvista funktioista $u\colon Y \to \mathbb{R}$.

4.12. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko ja $D \in \mathrm{Reg}(Y)$. Kaikille $u \in C(Y)$ ja $v \in C(Y)$ sekä $\lambda \in \mathbb{R}$ on voimassa

i) $P_D(u+v) = P_D u + P_D v$,

ii) $P_D(\lambda u) = \lambda P_D u$,

iii) Jos $u \le v$, niin $P_D u \le P_D v$.

Todistus. Joukossa $Y \setminus \bar{D}$ ovat väitteet triviaalisti voimassa, joten ne riittää näyttää toteen vain joukossa $\bar{D}$. Todistetaan ensin väite i). Koska $\bar{D}$ on kompakti, on jatkuvalla funktiolla

$$f = P_D u + P_D v - P_D(u+v)$$

maksimi sulkeumassa $\bar{D}$. Harmonisten funktioiden maksimiperiaatteen nojalla kyseinen maksimi kuuluu joukkoon ∂D, mutta tässä joukossa

$$f = u+v - (u+v) = 0 ,$$

joten

$$P_D u + P_D v - P_D(u+v) \leq 0 ,$$

joukossa $\bar{D}$. Vastaavasti harmonisten funktioiden minimiperiaatteen nojalla on

$$P_D u + P_D v - P_D(u+v) \geq 0$$

joukossa $\bar{D}$.
Siis sulkeumassa $\bar{D}$ on voimassa

$$P_D u + P_D v - P_D(u+v) = 0$$

eli

$$P_D(u+v) = P_D u + P_D v .$$

Väite ii) todistetaan samaan tapaan kuin väite i) toteamalla, että sulkeumassa $\bar{D}$ on harmoninen funktio

$$\lambda P_D u - P_D(\lambda u)$$

vakio = 0 harmonisten funktioiden maksimi- ja minimiperiaatteen nojalla.

Kohta iii) todistetaan seuraavasti. Koska $\bar{D}$ on kompakti, on jatkuvalla funktiolla

$$w = P_D u - P_D v$$

maksimi kyseisessä joukossa $\bar{D}$. Harmonisten funktioiden maksimiperiaatteen nojalla tämä maksimi kuuluu joukkoon ∂D, mutta joukossa ∂D on

$$w = u - v \leq 0 ,$$

joten

$$P_D u - P_D v \leq 0$$

eli

$$P_D u \leq P_D v .$$

4.13. Lause. Funktio $u \in \mathcal{C}(Y)$ on harmoninen jos ja vain jos

$$P_D u = u$$

kaikille $D \in \mathrm{Reg}(Y)$.

Todistus. Olkoon ensin $P_D u = u$ kaikille $D \in \mathrm{Reg}(Y)$. Valitaan jokaiselle pisteelle $x \in Y$ parametriympäristö $(U, z) \subset Y$ ja ympäristöstä (U, z) relatiivikompakti alue D_0 siten, että $\bar{D}_0 \subset (U, z)$ ja $z(D_0)$ on kiekko. Tällöin lauseen 4.10. (sivu 20) perusteella $D_0 \in \mathrm{Reg}(Y)$. Koska

$$P_{D_0} u(x) = u(x)$$

ja koska $P_{D_0}u$ on harmoninen pisteen x eräässä ympäristössä, on myös u harmoninen samassa pisteen x ympäristössä.

Kääntäen jos $u \in \mathcal{C}(Y)$ on harmoninen, niin $P_D u = u$ kaikille $D \in \mathrm{Reg}(Y)$, koska Dirichlet'n probleeman ratkaisufunktio on yksikäsitteinen.

4.14. Määritelmä. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko. Jatkuva funktio $u: Y \to \mathbb{R}$ on subharmoninen, jos

$$P_D u \geq u$$

kaikille $D \in \mathrm{Reg}(Y)$.

4.15. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko. Jos $u: Y \to \mathbb{R}$ ja $v: Y \to \mathbb{R}$ ovat subharmonisia funktioita ja jos λ on reaaliluku ≥ 0, niin myös funktiot $u+v$, λu ja $\sup(u,v)$ avoimessa joukossa Y ovat subharmonisia.

Todistus. Lause seuraa suoraan määritelmästä 4.14.

4.16. Määritelmä. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko. Funktio $u: Y \to \mathbb{R}$ on lokaalisti subharmoninen, jos u on jokaisen joukon Y pisteen jossakin ympäristössä aubharmoninen.

4.17. Lause. (Maksimiperiaate lokaalisti subharmonisille funktioille.) Olkoon Y Riemannin pinnan X alue ja $u: Y \to \mathbb{R}$ lokaalisti subharmoninen funktio. Saakoon u maksimiarvonsa pisteessä $x_0 \in Y$. Tällöin u on vakiofunktio.

Todistus. Olkoon $u(x_0) =: c$ ja

$$S := \{x \in Y \mid u(x) = c\} .$$

Jos $S \neq Y$, niin S on alueen Y aito osajoukko eli

$$T := (X \setminus S) \cap Y \neq \emptyset .$$

Todistetaan, että on olemassa $a \in Y$ siten, että $a \in \partial S = \overline{S} \cap \overline{T}$, missä $\overline{S}$ tarkoittaa joukon S sulkeumaa. Tehdään vastaoletus

$$\partial S \cap Y = \emptyset .$$

Koska $T = Y \setminus S$, on voimassa

$$Y = S \cup T \subset \overline{S} \cup \overline{T} =$$
$$\mathrm{int}S \cup (\partial S \cap Y) \cup \mathrm{int}T =$$
$$\mathrm{int}S \cup \mathrm{int}T \subset S \cup T = Y ,$$

missä $\mathrm{int}S$ tarkoittaa joukon S sisäpisteiden joukkoa. Näin ollen alue Y on kahden avoimen epätyhjän joukon yhdiste eli ei-yhtenäinen. On saatu aikaan ristiriita, joten on olemassa

$$a \in \partial S \cap Y .$$

Koska u on jatkuva, on voimassa $u(a) = c$. Jokaisessa pisteen a ympäristössä on piste x siten, että $u(x) < c$. Tämän vuoksi on olemassa pisteen a avoin ympäristö $D \in \mathrm{Reg}(Y)$ siten, että $u \mid \partial D$ ei ole vakiofunktio $= c$ (käytetään lausetta 4.10. sivu 20). Koska u on lokaalisti harmoninen, voidaan lisäksi olettaa, että u on jossakin sulkeuman $\overline{D}$ ympäristössä subharmoninen, joten

$$u \leq P_D u =: v .$$

Lauseen 4.13. (sivu 22) perusteella on funktio v harmoninen alueessa D. Koska

$$v|\partial D = u|\partial D \leq c\ ,$$

saadaan harmonisten funktioiden maksimiperiaatteen perusteella

$$v \leq c$$

sulkeumassa $\bar{D}$. Koska

$$u(a) = c \leq v(a)\ ,$$

saa v maksimiarvonsa pisteessä a. Se on siis vakiofunktio $= c$ sulkeumassa $\bar{D}$. Mutta tämä on ristiriita alueen D valinnan kanssa. Siis sivulla 24 tehty oletus, että on $S \neq Y$ on väärä, joten täytyy olla $S = Y$.

4.18. Seurauslause. Olkoon Y Riemannin pinnan Y alue. Jos $u\colon Y \to \mathbb{R}$ on lokaalisti subharmoninen, niin u on subharmoninen.

Todistus. Olkoon $D \in \mathrm{Reg}(Y)$ mielivaltainen. Koska $P_D u$ on alueessa D harmoninen, on

$$v := u - P_D u$$

alueessa D lokaalisti subharmoninen. Koska $v|\partial D = 0$, on maksimiperiaatteen nojalla $v \leq 0$ alueessa D, eli

$$P_D u \geq u\ .$$

4.19. Lause. (Perronin lemma.) Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko ja $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(Y)$ epätyhjä perhe joukossa Y subharmonisia funktioita siten, että kyseisellä perheellä on seuraavat ominaisuudet:

i) Jos $u \in \mathcal{M}$ ja $v \in \mathcal{M}$, niin $\sup(u,v) \in \mathcal{M}$,

ii) Jos $u \in \mathcal{M}$, $D \in \mathrm{Reg}(Y)$, niin $P_D u \in \mathcal{M}$,

iii) On olemassa vakio $K \in \mathbb{R}$ siten, että

$$u \leq K$$

kaikille $u \in \mathcal{M}$.

Tällöin funktio $u^*\colon Y \to \mathbb{R}$, jolle

$$u^*(x) := \sup\{u(x) \mid u \in \mathcal{M}\}$$

on harmoninen joukossa Y.

<u>Todistus.</u> Olkoon $a \in Y$ ja $D \in \mathrm{Reg}(Y)$ pisteen a ympäristö (tällainen ympäristö on lauseen 4.10. (sivu 20) perusteella aina olemassa). Valitaan jono $u_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ siten, että

$$\lim_{n\to\infty} u_n(a) = u^*(a) .$$

Kohdan i) perusteella voidaan olettaa, että

$$u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots$$

Olkoon $v_n := P_D u_n$. Tällöin on voimassa myös

$$v_0 \leq v_1 \leq v_2 \leq \dots ,$$

Harnackin lauseen (lause 4.9. sivu 18) perusteella jono (v_n) suppenee tasaisesti alueen D jokaisessa kompaktissa osajoukossa kohti jotakin harmonista funktiota $v\colon D \to \mathbb{R}$. Tarkkaan ottaen lauseessa 4.9. todistetaan Harnackin lause kompleksitason kiekolle $D(R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$, $(R > 0)$, mutta koska harmonisuus on konformisesti invariantti ominaisuus, on lause lokaalisti voimassa mielivaltaisella Riemannin pinnalla X (tarvittaessa aluetta D pienennetään). Koska funktiot u_n, $n \in \mathbb{N}$ ovat subharmonisia eräässä pisteen a ympäristössä, on voimassa

$$v_n(a) = P_D u_n(a) \geq u_n(a)$$

ja siis

$$v(a) = u^*(a) .$$

Funktion u^* määritelmän nojalla on alueessa D voimassa

$$v \leq u^* .$$

Näytetään nyt, että $v(x) = u^*(x)$ jokaiselle $x \in D$. Olkoon sitä varten $w_n \in \mathcal{M}$, $n \in \mathbb{N}$ jono, jolle

$$\lim_{n \to \infty} w_n(x) = u^*(x) .$$

Kohtien i) ja ii) perusteella voidaan olettaa, että

$$v_n \leq w_n = P_D w_n$$

ja

$$w_n \leq w_{n+1}$$

kaikille $n \in \mathbb{N}$. Näin ollen jono $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suppenee tasaisesti jokaisessa alueen D kompaktissa osajoukossa kohti erästä harmonista funktiota $w: D \to \mathbb{R}$ siten, että

$$v \leq w \leq u^* .$$

Koska $v(a) = w(a) = u^*(a)$, seuraa maksimiperiaatteesta alueessa D harmoniselle funktiolle $v - w$, että $v(y) = w(y)$ kaikille $y \in D$, erikoisesti on

$$v(x) = w(x) = u^*(x) .$$

Siis $u^* = w$ on alueessa D harmoninen eli u^* on lokaalisti harmoninen, mistä seuraa samaan tapaan todistamalla kuin lauseessa 4.18. (sivu 25), että u^* on harmoninen.

4.20. Dirichlet'n probleeman ratkaisemiseksi käytetään seuraavanlaista menetelmää, niin kutsuttua Perronin menetelmää:

Olkoon

$$f: \partial Y \to \mathbb{R}$$

jatkuva, rajoitettu funktio (ei edellytetä, että $\overline{Y}$ olisi kompakti) ja

$$K := \sup\{f(x) \mid x \in \partial Y\} .$$

Merkitään symbolilla $\mathcal{B}_f$ kaikkien niiden funktioiden $u \in \mathcal{C}(\overline{Y})$ perhettä, joille

i) $u|Y$ on subharmoninen

ii) $u|\partial Y \leq f$, $u \leq K$.

Perronin lemman (sivu 25) nojalla on

$$u^* := \sup\{u \mid u \in \mathcal{B}_f\}$$

avoimessa joukossa Y harmoninen. Jotta näin saataisiin klassiselle Dirichlet'n probleemalle ratkaisu, täytyy jokaiselle pisteelle $x \in \partial Y$ olla voimassa

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x) .$$

Tämä on voimassa vain tiettyjen ehtojen vallitessa.

4.21. Määritelmä. Piste $x \in \partial Y$ on säännöllinen, jos pisteellä x on sellainen avoin ympäristö U, että on olemassa funktio $\beta \in \mathcal{C}(\overline{Y} \cap U)$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

i) $\beta | Y \cap U$ on subharmoninen ,

ii) $\beta(x) = 0$ ja $\beta(y) < 0$ kaikilla $y \in (\overline{Y} \cap U) \setminus \{x\}$.

Funktio β on nimeltään estefunktio pisteen x suhteen.

4.22. Huomautus. Olkoon $x \in \partial Y$ avoimen joukon Y säännöllinen reunapiste. Jos tällöin Y_1 on joukon Y avoin osajoukko, jolle $x \in \partial Y_1$, niin x on myös avoimen joukon Y_1 säännöllinen reunapiste. Tästä seuraa välittömästi: Jos avoimella joukolla Y on säännöllinen reuna (toisin sanoen kaikki reunapisteet ovat säännöllisiä), niin myös jokaisella avoimen joukon Y komponentilla on säännöllinen reuna.

4.23. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko ja olkoon $x \in \partial Y$ säännöllinen reunapiste ja olkoot $m \leq c$ reaalisia vakioita. Tällöin on olemassa pisteen x ympäristö V ja funktio $v \in \mathcal{C}(\overline{Y})$, jolla on seuraavat ominaisuudet:

i) $v | Y$ on subharmoninen ,

ii) $v(x) = c$, $v | \overline{Y} \cap V \leq c$,

iii) $v|\overline{Y}\setminus V = m$.

Todistus. Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $c = 0$ (vakion lisääminen ei vaikuta subharmonisuuteen). Olkoon U pisteen x avoin ympäristö ja $\beta \in \mathcal{C}(\overline{Y} \cap U)$ estefunktio pisteen x suhteen. Tällöin on olemassa relatiivikompakti pisteen x ympäristö V siten, että $\overline{V} \subset U$. Nyt on voimassa

$$\sup \{ \beta(y) \mid y \in \partial V \cap \overline{Y} \} < 0 ,$$

siis on olemassa vakio $k > 0$ siten, että

$$k\beta | \partial V \cap \overline{Y} < m .$$

Määritellään

$$v := \begin{cases} \sup(m, k\beta) & \text{joukossa } \overline{Y} \cap V \\ m & \text{joukossa } \overline{Y} \setminus V . \end{cases}$$

Funktio v on sulkeumassa $\overline{Y}$ jatkuva, sillä ainoat epätriviaalit jatkuvuuspisteet ovat pisteet $x \in \partial V \cap \overline{Y}$, mutta näissä pisteissä jatkuvuus seuraa siitä, että β on jatkuva joukossa $U \supset \overline{V}$. Lisäksi v on lokaalisti subharmoninen avoimessa joukossa Y. Jälleen riittää tarkastella mielivaltaista pistettä x joukossa $\partial V \cap \overline{Y}$. Koska $k\beta(x) < m$ ja koska $k\beta$ on jatkuva eräässä pisteen x ympäristössä W, niin on $k\beta < m$ jossakin pisteen x ympäristössä W'. Siis on $v = m$ joukossa W' eli v on lokaalisti subharmoninen ja edelleen seurauslauseen 4.18. (sivu 25) perusteella v on subharmoninen. Funktio v toteuttaa ehdon ii), koska β on estefunktio pisteen x suhteen ja

v toteuttaa ehdon iii) määritelmästään johtuen. Siis $v \in \mathcal{C}(\overline{Y})$ on lauseessa vaadittu funktio.

4.24. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin osajoukko, $f\colon \partial Y \to \mathbb{R}$ jatkuva, rajoitettu funktio ja

$$u^* = \sup\{u \mid u \in \mathcal{V}_f\},$$

missä $\mathcal{V}_f$ on kohdassa 4.20. (sivu 28) määritelty funktioperhe. Tällöin on jokaiselle säännölliselle reunapisteelle $x \in \partial Y$ voimassa

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u^*(y) = f(x).$$

Todistus. Olkoon $\varepsilon > 0$ annettu. Funktion f jatkuvuuden perusteella on olemassa pisteen x relatiivikompakti avoin ympäristö V, jolle

$$f(x) - \varepsilon \leq f(y) \leq f(x) + \varepsilon$$

kaikille $y \in \partial Y \cap V$.

Olkoot $k < K$ reaalisia vakioita, joille

$$k \leq f(y) \leq K$$

kaikille $y \in \partial Y$.

a) Valitaan lauseen 4.23. (sivu 29) mukaisesti joukossa Y subharmoninen funktio $v \in \mathcal{C}(\overline{Y})$, jolle

$$v(x) = f(x) - \varepsilon\,;$$

$$v|\overline{Y} \cap V \leq f(x) - \varepsilon\,,$$

$$v|Y \setminus V = k - \varepsilon\,.$$

Tällöin on voimassa $v|\partial Y \leq f$ eli siis on $v \in \mathcal{V}_f$, mistä seuraa, että

$$v \leq u^* = \sup\{u \mid u \in \mathcal{P}_f\} .$$

Näin ollen on

$$\varliminf_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u^*(y) \geq v(x) = f(x) - \varepsilon .$$

b) Samoin lauseen 4.23. (sivu 29) mukaan on olemassa avoimessa joukossa Y subharmoninen funktio $w \in C(\overline{Y})$, jolle

$$w(x) = - f(x) ,$$

$$w|\overline{Y} \cap V \leq - f(x) ,$$

$$w|\overline{Y} \setminus V = - K .$$

Perheen $\mathcal{P}_f$ määritelmästä seuraa, että jokaiselle $u \in \mathcal{P}_f$ ja jokaiselle $y \in \partial Y \cap V$ on

$$u(y) \leq f(x) + \varepsilon ,$$

siis on

$$u(y) + w(y) \leq \varepsilon$$

pisteelle $y \in \partial Y \cap V$.

Tämän lisäksi on voimassa

$$u(z) + w(z) \leq K - K = 0$$

kaikille $z \in \overline{Y} \cap \partial V$.

Maksimiperiaatteen nojalla on joukossa $Y \cap V$ subharmoniselle funktiolle $u + w$ voimassa

$$u + w \leq \varepsilon$$

joukossa $\overline{Y} \cap V$, siis on

$$u|_{Y\cap V} \leq \varepsilon - w|_{Y\cap V}$$

kaikille $u \in \mathcal{R}_f$.

Tästä seuraa, että

$$\overline{\lim_{\substack{y\to x\\ y\in Y}}}\; u^*(y) \leq \varepsilon - w(x) = f(x) + \varepsilon .$$

Kohdista a) ja b) seuraa väite.

4.25. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin osajoukko. Olkoot kaikki joukon Y reunapisteet säännöllisiä. Tällöin voidaan klassinen Dirichlet'n probleema avoimessa joukossa Y ratkaista jokaiselle jatkuvalle, rajoitetulle reunafunktiolle $f\colon \partial Y \to \mathbb{R}$.

Todistus. Väite seuraa suoraan kohdasta 4.20. (sivu 28) ja lauseesta 4.24. (sivu 31).

4.26. Lopuksi annetaan vielä riittävä geometrinen kriteeri, joka takaa sen, että reunapiste on säännöllinen. Pisteen säännöllisyys ei riipu Riemannin pinnan määrittelyssä käytetystä kartastosta, joten riittää, että edellä mainittu kriteeri formuloidaan tapauksessa $Y \subset \mathbb{C}$. Yleinen tapaus, jossa kompleksitason $\mathbb{C}$ sijalla on mielivaltainen Riemannin pinta X, palautuu tähän käyttämällä karttaa $(U,z) \subset X$, jolle

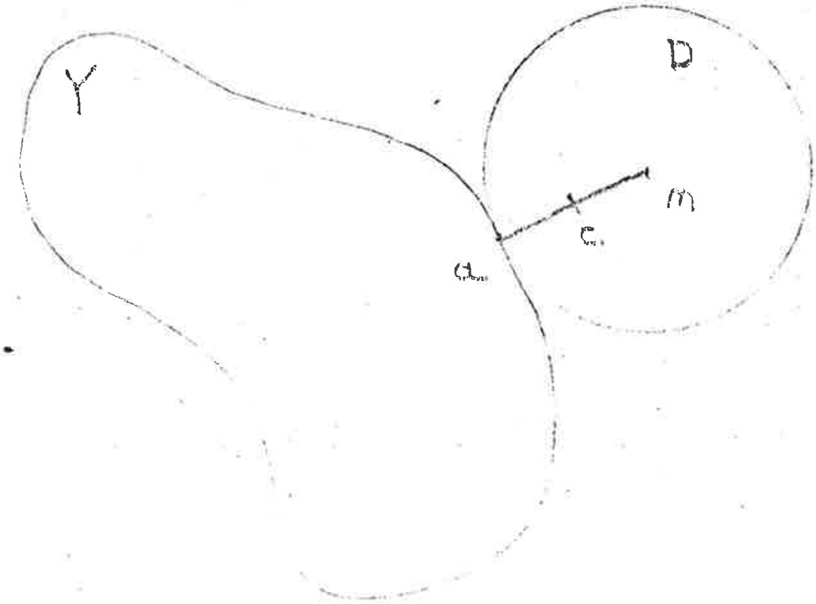
$$Y \subset z(U) .$$

4.27. Lause. Olkoon Y kompleksitason $\mathbb{C}$ avoin osajoukko ja $a \in \partial Y$. Oletetaan, että on olemassa kiekko

$$D = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z - m| < r \} , \quad (m \in \mathbb{C},\ r > 0)$$

siten, että $a \in \partial D$ ja $\bar{D} \cap Y = \emptyset$. Tällöin a on säännöllinen reunapiste.

Todistus. Asetetaan $c := \frac{a+m}{2}$ (katso kuva 4).



Kuva 4.

Tällöin saadaan funktiosta

$$\beta(z) := \log\tfrac{r}{2} - \log|z-c|$$

estefunktio pisteen a suhteen.

Ehtojen kontrolli:

i) Yleisyyttä rajoittamatta voidaan olettaa, että $c = 0$. Tällöin funktiolle

$$\beta(z) = \log\tfrac{r}{2} - \log|x+iy|$$

$$= \log\tfrac{r}{2} - \tfrac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$

on voimassa

$$\frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta}{\partial y^2} = 0 ,$$

eli β on harmoninen ja siis triviaalisti subharmoninen.

ii)

$$\beta(a) = \log\frac{r}{2} - \log|a-c| = 0$$

$$\beta(y) = \log\frac{r}{2} - \log|y-c| < 0$$

kaikille $y \neq a$.

5. Riemannin pinnan numeroituvuus

5.1. Klassisen Dirichlet'n probleeman käytöstä tullaan lopuksi todistamaan, että Riemannin pinta toteuttaa toisen numeroituvuusaksiomaan: Riemannin pinnan X avointen joukkojen kokoelmalla on numeroituva kanta. Jos topologinen avaruus X on separoituva eli on olemassa tiheä osajoukko $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset X$ ja jos X on metrisoituva, niin rationaalisäteisten x_n-keskisten avoimien kiekkojen kokoelma muodostaa avaruuden X numeroituvan kannan (katso [5], sivu 187).

5.2. Lause. Riemannin pinnan X konformisessa struktuurissa $\{h_i\colon U_i \to V_i \mid i \in I\}$ voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että jokainen joukko V_i, $i \in I$ on kiekko $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\} = D(1)$.

Todistus. Voidaan olettaa, että V_i on yhdesti yhtenäinen kaikilla $i \in I$ (tarvittaessa jaetaan U_i pienempiin joukkoihin U_{ij}, $j \in J$ ja tarkastellaan konformista struktuuria, jossa karttoja ovat rajoittumakuvaukset $h_i \mid U_{ij}$). Riemannin kuvauslauseen (katso [11], sivu 228) nojalla on olemassa konforminen kuvaus $f\colon V_i \to D(1)$. Konformisen kuvauksen käänteiskuvaus on myös aina konforminen, joten kuvaus $f^{-1}\colon D(1) \to V_i$ on konforminen kaikilla $i \in I$. Lisäksi koska tasoalueet V_i ja $D(1)$ ovat keskenään homeomorfiset, voidaan kartta $h_i\colon U_i \to V_i$ korvata kartalla $H_i\colon U_i \to D(1)$ kaikilla $i \in I$ Riemannin pinnan X säilyessä samana.

5.3. Lause. Riemannin pinta X on numeroituva eli toteuttaa toisen numeroituvuusaksioman, jos ja vain jos X voidaan peittää numeroituvalla määrällä parametrikiekkoja.

Todistus. Olkoon ensin $\{D_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ sellainen peite. On näytettävä, että Riemannin pinnan X topologialla on numeroituva kanta.

Jokaista parametrikiekkoa D_n vastaa homeomorfismi h_n kiekolle $D(1) \subset \mathbb{C}$. Valitaan yksikkökiekosta $D(1)$ avoimet osakiekot, joiden keskipisteen koordinaatit ja säde ovat rationaaliset, jolloin näiden kiekkojen alkukuvat parametrikuvauksissa h_n muodostavat numeroituvan kannan joukolle X. Olkoon nimittäin $Y \subset X$ avoin ja $x \in Y$. Silloin on

$$x \in Y \cap D_i$$

jollekin $i \in \mathbb{N}$. Valitaan kutakin $x \in Y$ kohti joukon D_i niin pieni osajoukko D_{ij}, että on voimassa

$$D_{ij} \subset Y$$

ja D_{ij} on jokin edellä mainituista yksikkökiekon osakiekon alkukuvista, joita on valitatapansa perusteella numeroituva määrä. Siis on

$$Y = \bigcup_{x \in Y} \{x\} \subset \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N}}} D_{ij} \subset Y$$

eli

$$Y = \bigcup_{\substack{i \in \mathbb{N} \\ j \in \mathbb{N}}} D_{ij} ,$$

joten avoin joukko Y voidaan aina lausua numeroituvan monen avoimen kiekon D_{ij} yhdisteenä.
Olkoon kääntäen X numeroituva. Lauseen 5.2. (sivu 36) perusteella konformisessa struktuurissa $\{h_i: U_i \to V_i | i \in I\}$ voidaan yleisyyttä rajoittamatta olettaa, että jokainen joukko V_i, $i \in I$ on kiekko $D(1) \subset \mathbb{C}$, jolloin joukot U_i, $i \in I$ ovat parametrikiekkoja. Lindelöfin lauseen (katso [5], sivu 174) nojalla peitteellä $\{U_i\}_{i \in I}$ on numeroituva osapeite, mikä on vaadittu numeroituva peite parametrikiekkoja.

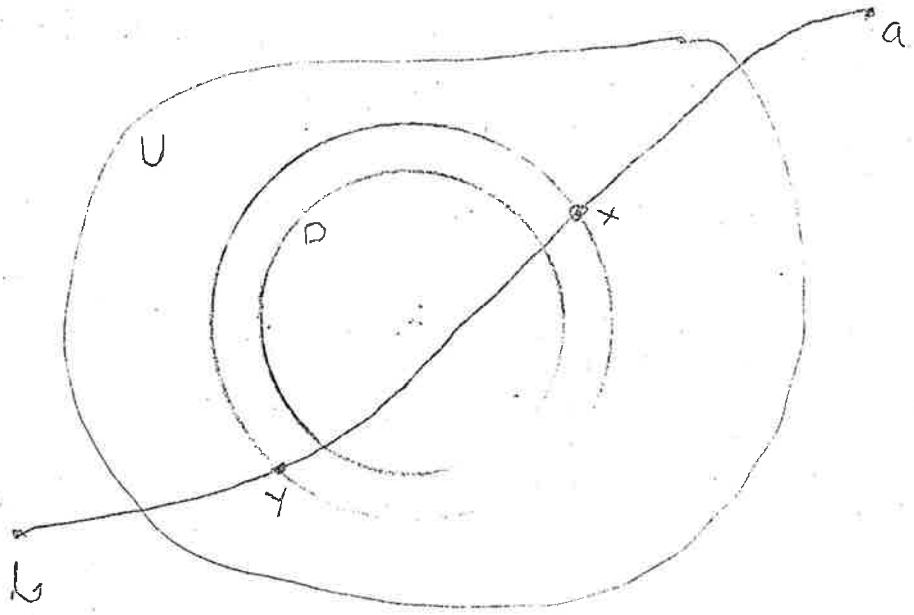
5.4. Määritelmä. Rei'itetty Riemannin pinta on Riemannin pinta X, josta on poistettu jonkin parametrikiekon sulkeuma $\bar{D}$. Merkitään $X \setminus \bar{D}$.

5.5. Lause. Rei'itetty Riemannin pinta $X \setminus \bar{D}$ on alue.
Todistus. Suljetun joukon komplementtina $X \setminus \bar{D}$ on triviaalisti avoin. Todistetaan $X \setminus \bar{D}$ polkuyhtenäiseksi, mistä seuraa sen yhtenäisyys.
Olkoon siis a ja b joukon $X \setminus \bar{D}$ kaksi pistettä ja olkoon (U,z) parametriympäristö siten, että $\bar{D} \subset U$ (tällainen ympäristö on aina olemassa, katso määritelmä 2.7., sivu 6).
Tällöin on olemassa $r > 1$ siten, että

$$\overline{D(r)} \subset U .$$

Koska X on unioni kompleksitason alueiden V_i kanssa homeomorfisista alueista U_i ja koska V_i on polkuyhtenäinen kaikilla $i \in I$, on X polkuyhtenäinen, joten pisteet a ja b aina yhdistettävissä polulla $\gamma(a,b) \subset X$.
Jos $\gamma(a,b) \cap \bar{D} = \emptyset$, on väite todistettu.

Olkoon siis $\gamma(a,b) \cap \overline{D} \neq \emptyset$. Merkitään polun $\gamma(a,b)$ ja kehän $\{z=re^{i\theta} \mid \theta \in [0,2\pi]\}$ leikkauspisteitä x ja y (katso kuva 5).



Kuva 5.

Korvataan polun $\gamma(a,b)$ pisteet x ja y yhdistävä osa kehän $\{z=re^{i\theta} \mid \theta \in [0,2\pi]\}$ kaarella pisteestä x pisteeseen y, jolloin saadaan uusi polku $\gamma_1(a,b)$, jolle

$$\gamma_1(a,b) \cap \overline{D} = \emptyset$$

eli $\gamma_1(a,b) \subset X \setminus \overline{D}$.

Näin ollen $X \setminus \overline{D}$ on polkuyhtenäinen ja siis yhtenäinen.

<u>5.6.</u> <u>Lause.</u> Jos rei'itetty Riemannin pinta $X \setminus \overline{D}$ jollakin parametrikiekolla D on numeroituva, on myös alkuperäinen Riemannin pinta X numeroituva.

Todistus. Parametrikiekon sulkeuma $\bar{D}$ on kompakti joukko. Siten se voidaan peittää äärellisellä määrällä parametrikiekkoja. Lisäämällä nämä rei'itetyn Riemannin pinnan numeroituvaan parametrikiekkopeitteeseen saadaan alkuperäiselle Riemannin pinnalle X numeroituva peite parametrikiekkoja, joten se lauseen 5.3. (sivu 37) nojalla toteuttaa toisen numeroituvuusaksiooman.

5.7. Apulause. Olkoon Y Riemannin pinnan X alue. Jos u on harmoninen alueessa Y ja jos u on vakio $= c$ jossakin alueessa $U \subset Y$, niin u on vakio $= c$ koko alueessa Y.

Todistus. Määritellään $v = u_x - iu_y$ ja todistetaan, että v on analyyttinen, jolloin koska $v = 0$ eräässä alueessa $U \subset Y$, se analyyttisena funktiona häviää koko alueessa Y (katso [5], sivu 61).
Funktio v toteuttaa Cauchyn-Riemannin yhtälöt, sillä

$$(u_x)_x = (-u_y)_y ,$$

koska $\Delta u = 0$, ja

$$(u_x)_y = -(-u_y)_x ,$$

koska $u_{xy} = u_{yx}$. Funktiolla v on lisäksi jatkuvat osittaisderivaatat, joten se on analyyttinen alueessa Y.

5.8. Lause. Olkoon U parametriympäristö Riemannin pinnalla X ja D parametrikiekko siten, että $\bar{D} \subset U$. Tällöin $X \setminus \bar{D}$ on metrisoituva.

Todistus. Olkoon f reunalla ∂D määritelty, ei-vakio, jatkuva, rajoitettu ja reaaliarvoinen funktio. Tällöin voi-

daan lauseiden 4.25. (sivu 33) ja 4.27. (sivu 33) nojalla klassinen Dirichlet'n probleema ratkaista joukolle $X \setminus \bar{D}$. Ratkaisufunktiolla u on funktion f määräämät arvot reunalla ∂D ja se ei siten ole vakiofunktio.
Määritellään seuraavanlainen kuvaus joukolta $(X \setminus \bar{D}) \times (X \setminus \bar{D})$ ei-negatiivisten reaalilukujan joukkoon: Olkoon $x \in X \setminus \bar{D}$ ja $y \in X \setminus \bar{D}$ ja γ mielivaltainen pisteet x ja y yhdistävä, paloittain jatkuvasti derivoituva polku joukossa $X \setminus \bar{D}$ (lauseen 5.5., sivu 38, todistuksesta käy ilmi, että tällainen polku on aina olemassa). Määritellään

$$d(x,y) = \inf_{\{\gamma\}} \left\{ \int_{\gamma} |\text{grad } u| \, |dz| \right\}.$$

Koska $|\text{grad } u| \geq 0$, on arvojoukkona todellakin joukko $[0, \infty[$.
Todistetaan, että näin määritelty kuvaus d on metriikka käymällä läpi metriikan kolme ehtoa a), b) ja c).

a) $\qquad d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

kaikille $x \in X \setminus \bar{D}$, $y \in X \setminus \bar{D}$ ja $z \in X \setminus \bar{D}$.
Olkoon γ_1 mielivaltainen pisteet x ja y yhdistävä, paloittain derivoituva polku ja γ_2 mielivaltainen pisteet y ja z yhdistävä, paloittain derivoituva polku. Merkitään $\Gamma(x,y)$ polkukokoelmaa, joka koostuu kaikista pisteet x ja y yhdistävistä, paloittain jatkuvasti derivoituvista poluista ja merkitään

$$\Gamma = \{ \gamma_1 \gamma_2 \mid \gamma_1 \in \Gamma(x,y), \ \gamma_2 \in \Gamma(y,z) \} .$$

Tulopolulle $\gamma_1 \gamma_2$ on voimassa

$\gamma_1 \gamma_2 \in \Gamma(x,z)$

kaikille $\gamma_1 \in \Gamma(x,y)$, $\gamma_2 \in \Gamma(y,z)$.
Koska muotoa $\gamma_1\gamma_2$ olevien polkujen joukko on joukon $\Gamma(x,z)$ osajoukko, on voimassa

$$
\begin{aligned}
d(x,z) &= \inf_{\gamma \in \Gamma(x,z)} \left\{ \int_{\gamma} |\operatorname{grad} u|\,|dz| \right\} \\
&\leq \inf_{\gamma \in \Gamma} \left\{ \int_{\gamma} |\operatorname{grad} u|\,|dz| \right\} \\
&= \inf_{\{\gamma_1\}} \left\{ \int_{\gamma_1} |\operatorname{grad} u|\,|dz| \right\} + \inf_{\{\gamma_2\}} \left\{ \int_{\gamma_2} |\operatorname{grad} u|\,|dz| \right\} \\
&= d(x,y) + d(y,z) .
\end{aligned}
$$

b) $$d(x,y) = d(y,x)$$

kaikille $x \in X \setminus \bar{D}$ ja $y \in X \setminus \bar{D}$.
Olkoon $\gamma : [a,b] \to X \setminus \bar{D}$ pisteet x ja y yhdistävä palottain jatkuvasti derivoituva polku joukossa $X \setminus \bar{D}$. Polun γ käänteispolku $-\gamma$ on pisteet y ja x yhdistävä, palottain jatkuvasti derivoituva polku, jolle on voimassa

$$-\gamma(t) = \gamma(a+b-t) .$$

Tällöin on

$$d(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} \left\{ \int_a^b |\operatorname{grad} u(\gamma(t))|\,|\gamma'(t)|\,dt \right\} .$$

Sijoitetaan

$$s = a + b - t$$
$$ds = - dt ,$$

jolloin saadaan

$$\int_{-\gamma} |\operatorname{grad} u|\,|dz| =$$
$$\int_a^b |\operatorname{grad} u(\gamma(a+b-t))|\,\left|\frac{d}{dt}\gamma(a+b-t)\right|\,dt =$$

$$= \int_{u}^{a} |\text{grad } u(\gamma(s))| \, |\gamma'(s)| \, (-ds)$$

$$= \int_{\gamma} |\text{grad } u| \, |dz| \, ,$$

joten joukkoa $\Gamma(x,y)$ vastaava muotoa

$$\int_{\gamma} |\text{grad } u| \, |dz|$$

olevien polkuintegraalien joukko on sama kuin joukkoa $\Gamma(y,x)$ vastaavien polkuintegraalien joukko.

Siis on

$$d(x,y) = \inf_{\gamma \in \Gamma(x,y)} \left\{ \int_{\gamma} |\text{grad } u| \, |dz| \right\}$$

$$= \inf_{\gamma \in \Gamma(y,x)} \left\{ \int_{\gamma} |\text{grad } u| \, |dz| \right\}$$

$$= d(y,x) \, .$$

c) $d(x,y) = 0$ jos ja vain jos $x = y$.

Olkoon ensinnäkin $x = y$ ja $\gamma \in \Gamma(x,y) = \Gamma(x,x)$.

Olkoon (U,z) pisteen x sellainen yhdesti yhtenäinen parametriympäristö, että $U \cap \bar{D} = \emptyset$. Valitaan polku $\gamma \in \Gamma(x,x)$ siten, että $\gamma \subset U$. Koska $|\text{grad } u|$ on analyyttinen joukossa U, on Cauchyn integraalilauseen nojalla

$$\int_{\gamma} |\text{grad } u| \, |dz| = 0 \, ,$$

joten on

$$\inf_{\gamma \in \Gamma(x,x)} \left\{ \int_{\gamma} |\text{grad } u| \, |dz| \right\} = 0 \, .$$

eli $d(x,x) = 0$.

Olkoon sitten $x \neq y$. On näytettävä, että $d(x,y) > 0$. Tämä seuraa siitä, että $|\mathrm{grad}\ u| > 0$ jokaiselle pisteet x ja y yhdistävälle, palottain jatkuvasti derivoituvalle polulle $\gamma^{c}(x,y)$. Jos nimittäin olisi olemassa palottain derivoituva polku γ, jolle

$$|\mathrm{grad}\ u| < \varepsilon \quad , \varepsilon > 0$$

niin suunnatulle derivaatalle α olisi voimassa

$$\left|\frac{du}{d\alpha}\right| \leq |\mathrm{grad}\ u| \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon = 0$$

jokaisessa polun γ^{c} pisteessä x. Mutta tästä seuraisi, että funktion u täytyy olla vakio jokaisen pisteen x jossakin ympäristössä, onhan funktion u muutos differentiaalisella välillä $d\alpha$ suunnassa α

$$\frac{du}{d\alpha} = 0 ,$$

missä lisäksi α on mielivaltainen suunta. Siitä, että pisteellä x on ympäristö, jossa u on vakio seuraa, että u on vakio koko alueessa $X \setminus \bar{D}$ (katso apulause 5.5. (sivu 38) ja apulause 5.7 (sivu 40)).

Kohdista a), b) ja c) seuraa väite.

<u>5.9.</u> <u>Lause.</u> Rei'itetty Riemannin pinta $X \setminus \bar{D}$ on separoituva.

<u>Todistus.</u> Lauseen 5.8. (sivu 40) nojalla $X \setminus \bar{D}$ on metrisoituva. Lauseen 5.5. (sivu 38) nojalla $X \setminus \bar{D}$ on yhtenäinen. Koska lisäksi jokaisella pisteellä $x \in X \setminus \bar{D}$ on olemassa avoin ympäristö, joka on homeomorfinen erään tasoalueen kanssa, on $X \setminus \bar{D}$ lokaalisti separoituva.

Väite seuraa nyt siitä, että metrisoituva, yhtenäinen ja lokaalisti separoituva topologinen avaruus on aina globaalisti separoituva (katso [12], sivu 75).

5.10. Lause. Riemannin pinta X on numeroituva.

Todistus. Lauseen 5.6. (sivu 39) perusteella riittää todistaa, että rei'itetty Riemannin pinta $X \setminus \overline{D}$ on numeroituva jollakin parametrikiekolla D. Mutta lauseen 5.8. (sivu 40) perusteella $X \setminus \overline{D}$ on metrisoituva ja lauseen 5.9. (sivu 44) nojalla se on separoituva, joten se on numeroituva (katso [5], sivu 187).

6. Yleistetty Dirichlet'n probleema Riemannin pinnalla

6.1. Klassisessa Dirichlet'n probleemassa tarkastellaan Riemannin pinnan X avointa joukkoa Y ja sen reunalla ∂Y annettua jatkuvaa funktiota $f: \partial Y \to \mathbb{R}$. Vaatimuksena on löytää kuvaus $u: \bar{Y} \to \mathbb{R}$, joka on joukossa Y harmoninen ja jolle on voimassa

$$\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u(y) = f(x)$$

kaikille $x \in \partial Y$.

Yleistetyn Dirichlet'n probleeman ongelmana on liittää pariin (Y,f) avoimessa joukossa Y harmoninen funktio H_f^Y, joka yhtyy klassisen Dirichlet'n probleeman ratkaisuun, jos tällainen ratkaisufunktio on olemassa. Funktio H_f^Y määritetään approksimoimalla sitä subharmonisilla ja superharmonisilla funktioilla. Yleistetty Dirichlet'n probleema eroaa klassisesta Dirichlet'n probleemasta siis siinä, että enää ei etukäteen anneta ehtona sitä, että ratkaisufunktion on saatava annetut arvot reunalla ∂Y. Nyt tutkitaan ehtoja, joiden vallitessa funktio H_f^Y saa nämä annetut arvot reunalla ∂Y so. tutkitaan funktion H_f^Y reunakäyttäytymistä.

6.2. Määritelmä. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko. Jatkuva funktio $u: Y \to \mathbb{R}$ on superharmoninen, jos

$$P_D u \leq u$$

kaikille $D \in R_{eg}(Y)$.

6.3. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko. Jos $u: Y \to \mathbb{R}$ ja $v: Y \to \mathbb{R}$ ovat superharmonisia funktioita ja jos λ on reaaliluku ≥ 0, niin myös funktiot $u+v$, λu ja $\inf(u,v)$ avoimessa joukossa Y ovat superharmonisia.

Todistus. Lause seuraa suoraan määritelmästä 6.2 (sivu 46).

6.4. Lause. (Perronin lemma.) Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko ja $\mathcal{M} \subset \mathcal{C}(Y)$ epätyhjä perhe joukossa Y superharmonisia funktioita siten, että kyseisellä perheellä on seuraavat ominaisuudet:

i) Jos $u \in \mathcal{M}$ ja $v \in \mathcal{M}$, niin $\inf(u,v) \in \mathcal{M}$,

ii) Jos $u \in \mathcal{M}$ ja $D \in \mathrm{Reg}(Y)$, niin $P_D u \in \mathcal{M}$,

iii) On olemassa vakio $K \in \mathbb{R}$ siten, että

$$u \geq K$$

kaikille $u \in \mathcal{M}$.

Tällöin funktio $u^*: Y \to \mathbb{R}$, jolle

$$u^*(x) := \inf\{u(x) \mid u \in \mathcal{M}\}$$

on harmoninen joukossa.

Todistus. Todistus on epäyhtälöiden merkkien suuntaa vaille sama kuin lauseen 4.19 (sivu 25) todistus.

6.5. Määritelmä. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko ja f jatkuva funktio $\partial Y \to \mathbb{R}$. Funktion f määräämä yläluokka $\mathcal{O}_f$ on perhe alhaalta rajoitettuja superharmonisia funktioita u, joille on voimassa

$$\underline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}}} \; u(y) \geqq f(x)$$

kaikille $x \in \partial Y$.

Funktion f määräämä <u>alaluokka</u> $\mathcal{U}_f$ on perhe ylhäältä rajoitettuja subharmonisia funktioita u, joille on voimassa

$$\overline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}}} \; u(y) \leqq f(x)$$

kaikille $x \in \partial Y$.

<u>6.6. Määritelmä.</u> Funktio

$$\overline{H}_f^Y = \inf \{u \mid u \in \mathcal{O}_f\}$$

on reunafunktion f määräämän yleistetyn Dirichlet'n probleeman <u>yläratkaisu</u> avoimelle joukolle Y. Vastaava <u>alaratkaisu</u> on

$$\underline{H}_f^Y = \sup \{u \mid u \in \mathcal{U}_f\} .$$

<u>6.7. Lause.</u> Ylä- ja alaratkaisu ovat harmonisia funktioita.

<u>Todistus.</u> Jos onnistutaan todistamaan, että superharmoniset funktiot $\mathcal{O}_f$ toteuttavat lauseen 6.4 (sivu 47) ominaisuudet i), ii) ja iii), niin kyseisestä lauseesta seuraa, että funktio $\overline{H}_f^Y$ on harmoninen.

i) Olkoon $u \in \mathcal{O}_f$ ja $v \in \mathcal{O}_f$. On näytettävä, että $\inf(u,v)$ kuuluu myös joukkoon $\mathcal{O}_f$. Olkoon $x \in \partial Y$. Ehdoista

$$\underline{\lim_{\substack{y \to x \\ y \in Y}}} \; u(y) \geqq f(x)$$

ja

$$\varliminf_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} v(y) \geq f(x)$$

seuraa, että

$$\varliminf_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} \inf(u,v) \geq f(x) .$$

Koska u ja v ovat alhaalta rajoitettuja, on myös funktio $\inf(u,v)$ alhaalta rajoitettu. Lisäksi lauseen 6.3 (sivu 47) perusteella on funktio $\inf(u,v)$ superharmoninen ja siis on $\inf(u,v) \in \mathcal{O}_f$.

ii) Olkoon $u \in \mathcal{O}_f$ ja $D \in \mathrm{Reg}(Y)$. On näytettävä, että $P_D u \in \mathcal{O}_f$. Koska on $\bar{D} \subset Y$, on voimassa

$$\varliminf_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} P_D u(y) = \varliminf_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} u(y) \geq f(x) .$$

Koska $\bar{D}$ on kompakti ja $P_D u$ on harmonisena funktiona jatkuva joukossa $\bar{D}$, on funktiolla $P_D u$ minimi joukossa $\bar{D}$. Lisäksi koska u on alhaalta rajoitettu, on $P_D u$ alhaalta rajoitettu. Siis on $P_D u \in \mathcal{O}_f$.

iii) Tämä ominaisuus seuraa suoraan siitä, että yläluokan $\mathcal{O}_f$ funktiot oletetaan alhaalta rajoitetuiksi.

Lauseen 6.4. (sivu 47) nojalla kohdista i), ii) ja iii) seuraa, että

$$\bar{H}_f^Y = \inf\{u \mid u \in \mathcal{O}_f\}$$

on harmoninen.

Vastaavalla tavalla (käyttämällä lausetta 4.19. (sivu 25)) todistetaan, että alaratkisu

$$\underline{H}_f^Y = \sup\{u \mid u \in \mathcal{U}_f\}$$

on harmoninen.

6.8. Lause. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko, $f\colon \partial Y \to \mathbb{R}$ ja $g\colon \partial Y \to \mathbb{R}$ olkoot annettuja jatkuvia reunafunktioita ja olkoon $\alpha \geq 0$. Tällöin on

i) $-\overline{H}_f^Y = \underline{H}_{-f}^Y$,

ii) $\underline{H}_f^Y \leq \overline{H}_f^Y$,

iii) Jos on $f \leq g$, niin on $\overline{H}_f^Y \leq \overline{H}_g^Y$,

iv) $\overline{H}_{\alpha f}^Y = \alpha \overline{H}_f^Y$,

v) $\overline{H}_{f+g}^Y \leq \overline{H}_f^Y + \overline{H}_g^Y$ ja

$\underline{H}_f^Y + \underline{H}_g^Y \leq \underline{H}_{f+g}^Y$.

Todistus.

i)
$$\begin{aligned}
-\overline{H}_f^Y &= -\inf\{u \mid u \in \mathcal{O}_f\} \\
&= \sup\{-u \mid u \in \mathcal{O}_f\} \\
&= \sup\{-u \mid -u \in \mathcal{U}_{-f}\} \\
&= \underline{H}_{-f}^Y .
\end{aligned}$$

ii) Olkoon $u \in \mathcal{U}_f$ ja $v \in \mathcal{O}_f$ sekä $D \in \mathrm{Reg}(Y)$. Tällöin on

$$\begin{aligned}
P_D(u-v) &= P_D u - P_D v \\
&\geq u - v ,
\end{aligned}$$

joten funktio $u-v$ on subharmoninen joukossa Y. Olkoon $x \in \partial Y$. Tällöin on

$$\limsup_{\substack{y \to x \\ y \in Y}} (u(y) - v(y)) \leq$$

$$\overline{\lim_{\substack{y\to x\\ y\in Y}}}\, u(y) - \underline{\lim_{\substack{y\to x\\ y\in Y}}}\, v(y) \leq$$

$$f(x) - f(x) = 0 \,.$$

Subharmonisten funktioiden maksimiperiaatteen nojalla (lause 4.17. (sivu 23)) on nyt

$$u - v \leq 0$$

eli

$$u \leq v \,.$$

iii) Jos $u \in \mathcal{O}_g$, niin $u \in \mathcal{O}_f$, joten

$$\mathcal{O}_g \subset \mathcal{O}_f \,.$$

iv)
$$\begin{aligned} \alpha \overline{H}_f^Y &= \inf\{u \mid u \in \mathcal{O}_f\} \\ &= \inf\{\alpha u \mid \alpha u \in \mathcal{O}_f\} \\ &= \overline{H}_{\alpha f}^Y \,. \end{aligned}$$

v) Olkoon $u \in \mathcal{O}_f$ ja $v \in \mathcal{O}_g$. Tällöin on $u + v \in \mathcal{O}_{f+g}$ ja siis on

$$u+v \geq \overline{H}_{f+g}^Y \,,$$

josta väite seuraa.

Olkoon $u \in \mathcal{U}_f$ ja $v \in \mathcal{U}_g$. Tällöin on $u + v \in \mathcal{U}_{f+g}$ ja siis on

$$u + v \leq \underline{H}_{f+g}^Y \,,$$

mistä väite seuraa.

6.9. Määritelmä. Jos on voimassa

$$\overline{H}_f^Y = \underline{H}_f^Y ,$$

sanotaan, että funktio $f: \partial Y \to \mathbb{R}$ on resolutiivinen avoimen joukon Y suhteen. Tällöin yleistetyn Dirichlet'n probleeman (avoimen joukon Y suhteen) ratkaisufunktio on $\overline{H}_f^Y$ $(= \underline{H}_f^Y)$ reunafunktiona f. Ratkaisufunktiota merkitään H_f^Y.

6.10. Määritelmä. Olkoon X topologinen avaruus ja $f \in \mathcal{C}(X)$. Funktion f kantaja on sulkeuma

$$\overline{\{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}} .$$

Sitä merkitään supp f.

6.11. Merkintä. Merkitään symbolilla $\mathcal{K}(X)$ kaikkia jatkuvia reaaliarvoisia funktioita, joiden kantaja on kompakti.

6.12. Harmonisen mitan konstruoinnissa käytetään seuraavaa funktionaalianalyysin lausetta:

Lause. (Rieszin esityslause.) Olkoon X lokaalikompakti topologinen avaruus. Positiivinen, lineaarinen funktionaali $L: \mathcal{K}(X) \to \mathbb{R}$ määrittelee mitan μ, jolla on se ominaisuus, että

$$L(f) = \int_X f \, d\mu$$

jokaiselle $f \in \mathcal{K}(X)$.

Todistus. Katso [8], sivu 177.

6.13. Määritelmä. Olkoon Y Riemannin pinnan X avoin joukko. Joukkoa Y sanotaan resolutiiviseksi, jos jokainen

$f \in \mathcal{K}(\partial Y)$ on resolutiivinen.

<u>6.14. Lause.</u> Olkoon Y Riemannin pinnan X resolutiivinen joukko. Jokaiselle $x \in Y$ on kuvaus $L_x\colon \mathcal{K}(\partial Y) \to \mathbb{R}$, jonka määrittelee $L_x(f) := H_f^Y(x)$, positiivinen, lineaarinen funktionaali.

<u>Todistus.</u> Todistetaan ensin lineaarisuus. On siis näytettävä, että $f+g$ ja αf ovat resolutiivisia, jos $\alpha \in \mathbb{R}$ ja f ja g ovat resolutiivisia. Käytetään lauseessa 6.8. (sivu 50) todistettuja laskusääntöjä.

$$
\begin{aligned}
H_f^Y + H_g^Y &= \underline{H}_f^Y + \underline{H}_g^Y \\
&\leq \underline{H}_{f+g}^Y \\
&\leq \overline{H}_{f+g}^Y \\
&\leq \overline{H}_f^Y + \overline{H}_g^Y \\
&= H_f^Y + H_g^Y ,
\end{aligned}
$$

joten $\underline{H}_{f+g}^Y = \overline{H}_{f+g}^Y$.

Olkoon $\alpha \in \mathbb{R}$. Tarkastellaan tapaukset $\alpha \geq 0$ ja $\alpha < 0$ erikseen, ensin tapaus $\alpha \geq 0$.

$$
\begin{aligned}
\alpha H_f^Y = \alpha \underline{H}_f^Y &= -\alpha \overline{H}_{-f}^Y \\
&= -\overline{H}_{\alpha(-f)}^Y = \underline{H}_{\alpha f}^Y \\
&\leq \overline{H}_{\alpha f}^Y = \alpha \overline{H}_f^Y \\
&= \alpha H_f^Y ,
\end{aligned}
$$

joten $\underline{H}_{\alpha f}^Y = \overline{H}_{\alpha f}^Y$, kun $\alpha \geq 0$. Tutkitaan sitten tapaus $\alpha < 0$.

$$\begin{aligned}\alpha H_f^Y = \alpha \underline{H}_f^Y &= -\alpha \overline{H}_{-f}^Y \\ &= \overline{H}_{(-\alpha)(-f)}^Y = -\underline{H}_{-\alpha f}^Y \\ &\leq -\overline{H}_{-\alpha f}^Y = \alpha \overline{H}_f^Y \\ &= \alpha H_f^Y ,\end{aligned}$$

joten $\underline{H}_{\alpha f}^Y = \overline{H}_{\alpha f}^Y$, myös kun $\alpha < 0$.

Todistetaan lopuksi positiivisuus. Tämä seuraa suoraan lauseen 6.8. (sivu 50) kohdasta iii): Jos $f \geq 0$, niin

$$H_f^Y \geq H_0^Y = 0 .$$

6.15. Määritelmä. Kuvaus L_x voidaan lauseen 6.12. (sivu 52) nojalla tulkita mitaksi μ_x joukossa ∂Y. Mittaa μ_x kutsutaan avoimen joukon Y harmoniseksi mitaksi pisteessä x.

Kirjallisuusluettelo:

[1] Ahlfors, L.V., Sario, L.: Riemann Surfaces, Princeton University Press, Princeton, 1960

[2] Brinck, I., Persson, A.: Elementärteori för analytiska funktioner, Studentlitteratur, Lund, 1970

[3] Choquet, G.: Lectures on Analysis, Volume I, W.A. Benjamin, Inc., Reading, Massachusetts, 1969

[4] Constantinescu, C., Cornea, A.: Ideale Ränder Riemannscher Flächen, Springer-Verlag, Berlin, 1963

[5] Dugundji, J.: Topology, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1975

[6] Forster, O.: Riemannsche Flächen, Springer-Verlag, Berlin, 1977

[7] Helms, L.L.: Einführung in die Potentialtheorie, Walter de Gruyter, Berlin, 1973

[8] Hewitt, E., Stromberg, K.: Real and Abstract Analysis, Springer-Verlag, New York, 1969

[9] Lehto, O.: Funktioteoria I-II, Limes ry, Helsinki, 1980

[10] Lehto, O.: Riemann Surfaces, Notes of lectures given at University of Minnesota, Minneapolis, 1970

[11] Myrberg, L.: Funktioteoria I-II, Limes ry, Helsinki, 1971

[12] Newman, M.H.A.: Elements of the Topology of Plane Sets of Points, University Press, Cambridge, 1964

[13] Strebel, K.: Vorlesungen über Riemannsche Flächen, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1980