ETÄISYYDEN ESITTÄMINEN KAKSOISSUHTEEN AVULLA

PERUSALUEEN HYPERBOLINEN PINTA-ALA

FUCHSIN RYHMÄN PERUSALUE

Laudaturtutkielma

Joensuun yliopisto

1985

Pirkko Partinen

SISÄLLYS

I JOHDANTO

Olkoot $\omega_1 = 0$ ja $\omega_2 = he^{i\theta}$, $0<h<1$, pisteitä hyperbolisessa tasossa G, $|\omega| < 1$. Näiden pisteiden hyperbolinen etäisyys d $(0, he^{i\theta})$ ~~esitettynä~~ kaksoissuhteen avulla on

$$d\,(0, he^{i\theta}) = \frac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h}\,.$$

Tämä H-etäisyys on invariantti G:n yhtenevyyskuvausten suhteen. Olkoot ω_1 ja ω_2 mielivaltaisia pesteitä H-tasossa G. Näiden pisteiden H-etäsyys d (ω_1, ω_2) ilmaistuna pelkästään ω_1:n ja ω_2:n avulla on

$$d\,(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}\log\frac{1+\left|(\omega_2-\omega_1)\,/\,(1-\bar{\omega}_1\,\omega_2)\right|}{1-\left|(\omega_2-\omega_1)\,/\,(1-\bar{\omega}_1\,\omega_2)\right|}$$

Työn alussa tutkitaan lähemmin näitä etäisyyksiä.

Työn toisessa osassa tutkitaan perusalueen hyperbolista pinta-alaa. Aluksi todistetaan Gauss-Bonnet'n lause: Hyperbolisen kolmion, jonka kulmat ovat α, β, γ, hyperbolinen pinta-ala on $\pi - (\alpha + \beta + \gamma)$. Olkoon Γ ryhmä lineaarimuunnoksia. Tällöin Γ:n perusalueilla R_1 ja R_2 on sama hyperbolinen pinta-ala eli $|R_1| = |R_2|$, kun niiden reunat ($\bar{H}$:ssa) ovat Lebesque-nollamittaisia joukkoja. Koska normaali monikulmio on myös perusalue on Γ:n kahdella normaalilla monikulmiolla yhtä suuri hyperbolinen pinta-ala. Sillä monikulmion reuna koostuu numeroituvasta määrästä suoria viivoja ja ympyränkaaria ja on siten nollamittainen. Tämä pinta-ala on äärellinen, jos ja vain jos sillä on äärellinen määrä sisäsivuja eikä lainkaan vapaita sivuja.

Osoitetaan vielä, että Γ:n perusalueen R hyperbolinen pinta-ala toteuttaa epäyhtälön

$$|R| \geq \frac{\pi}{21} .$$

Reaalimuunnosten Ω_R epäjatkuvia aliryhmiä kutsutaan reaalisiksi epäjatkuviksi ryhmiksi. Ω_R:n tai Ω_Q:n epäjatkuvat aliryhmät tunnetaan Fuchsin ryhminä.

Työn loppuosassa käsitellään Fuchsin ryhmiä, Fuchsin ryhmän perusaluetta ja perusalueen konstruointia isometristen ympyröiden avulla sekä konstruoidaan joitakin perusalueita tällä menetelmällä.

II ETÄISYYDEN ESITTÄMINEN KAKSOISSUHTEEN AVULLA

Mille tahansa neljälle pisteelle $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ kompleksitasossa kaksoissuhde

$$\frac{(\omega_2 - \omega_4)(\omega_3 - \omega_1)}{(\omega_2 - \omega_1)(\omega_3 - \omega_4)}$$

on invariantti missä tahansa lineaarisessa muunnoksessa. Olkoon neljä pistettä millä tahansa ympyränkaarella annetussa järjestyksessä. Tällöin on olemassa lineaarinen kuvaus, joka kuvaa ympyrän sisäpuolen ylemmälle puolitasolle ja neljä pistettä neljälle peräkkäiselle pisteelle reaaliakselilla. Silloin on selvää, että näille pisteille kaksoissuhde on positiivinen reaaliluku, joka on suurempi kuin yksi.

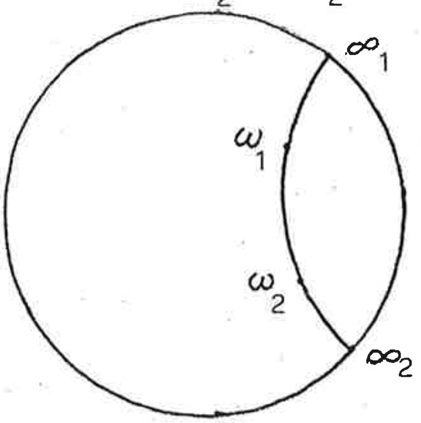
Olkoon nyt ω_1 ja ω_2 mitä tahansa pisteitä H-tasossa G, $|\omega|<1$. H-suora, joka kulkee ω_1:n ja ω_2:n kautta leikkaa kehän $|\omega| = 1$ kahdessa pisteessä. Merkitsemme sitä, joka on lähempänä ω_1 ∞_1:llä ja sitä, joka on lähempänä ω_2 ∞_2:lla. Kaksoissuhde

$$\frac{(\omega_1 - \infty_2)(\omega_2 - \infty_1)}{(\omega_1 - \infty_1)(\omega_2 - \infty_2)}$$

on reaalinenja suurempi kuin yksi. Siten puolet sen logaritmista on positiivinen luku, jota kutsumme ω_1:n ja ω_2:n H-etäisyydeksi (kuva 1).

Siis

$$d(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2}\log\frac{\omega_2 - \infty_1}{\omega_2 - \infty_2} - \frac{1}{2}\log\frac{\omega_1 - \infty_1}{\omega_1 - \infty_2} .$$



Kuva 1.

Tämä H-etäisyys, joka on kaksoissuhteen logaritmi, on invariantti G:n yhtenevyyskuvausten suhteen. Jos ω_1, ω_2 ja ω_3 ovat samalla H-suoralla annetussa järjestyksessä, pisteet ∞_1 ja ∞_2 ovat samat mille tahansa parille, ja saamme

$$d(\omega_1, \omega_3) = d(\omega_1, \omega_2) + d(\omega_2, \omega_3) .$$

Jos $\omega_1 = 0$ ja $\omega_2 = he^{i\theta}$, $0 < h < 1$, saamme

(1) $\quad d(0, he^{i\theta}) = \frac{1}{2}\log\frac{1+h}{1-h}$,

joka on euklidisen etäisyyden kasvava funktio 0:sta $he^{i\theta}$:aan, joka tulee äärettömäksi, kun h lähestyy 1:tä tai piste lähestyy G:n ideaalista reunaa. Uraa $d(\omega_o, \omega) = k>0$ kutsutaan H-ympyräksi,jonka keskipiste on ω_o:ssa ja säde on k.
Suorittamalla yhtenevyyskuvaus siten, että $\omega_o \to 0$ kuvautuu H-ympyrä tavalliseksi ympyräksi, jonka keskipiste on origossa. Täten H-ympyrä on euklidisen ympyrän kuva lineaarisessa kuvauksessa ja on itse euklidinen ympyrä $|\omega| < 1$:ssä.
Ilmaistaksemme toisin $d(\omega_1, \omega_2)$:n yksin ω_1:n ja ω_2:n avulla, huomaamme että $(\omega - \omega_1) / 1 - \overline{\omega}_1\omega)$ on yhtenevyyskuvaus, jossa $\omega_1 \longrightarrow 0$ ja $\omega_2 \longrightarrow (\omega_2 - \omega_1) / (1 - \overline{\omega}_1\omega_2)$ niin,että (1) saadaan muotoon

$$(2)\quad d(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + |(\omega_2 - \omega_1) / (1 - \bar{\omega}_1 \omega_2)|}{1 - |(\omega_2 - \omega_1) / (1 - \bar{\omega}_1 \omega_2)|} .$$

Huomattakoon, että

$$d(\omega_1, \omega_2) = d(\omega_2, \omega_1) .$$

H-etäisyydelle on voimassa kolmioepäyhtälö

(3)

$d(\omega_1, \omega_3) \leq d(\omega_1, \omega_2) + d(\omega_2, \omega_3)$ edellyttäen, että pisteet ω_1, ω_2, ω_3 ovat samassa järjestyksessä. Todistaaksemme tämän käytämme yhtenevyyskuvausta, jossa $\omega_2 \longrightarrow 0$, $\omega_1 \longrightarrow a > 0$ ja $\omega_3 \longrightarrow be^{i\beta}$, $b > 0$. Silloin (3):sta saadaan

$$(4)\quad \frac{1+|t|}{1-|t|} \leq \frac{1+b}{1-b} \cdot \frac{1+a}{1-a} , \quad t = \frac{be^{i\beta} - a}{1 - abe^{i\beta}} .$$

Kaavan (4) vasen puoli on $|t|$:n monotoninen kasvava funktio. Niinpä todistamme (3):n pitämällä a ja b kiinteinä ja etsimällä $|t|$:n maksimin β:lle $0 \leq \beta \leq 2\pi$. Kuvaus $t = (\omega - a)/(1 - a\omega)$ kuvaa $|\omega| = b$:n euklidiselle ympyrälle, jonka keskipiste on reaaliakselilla ja $-b$:n $-(b+a)/(1+ab)$:lle, joka on piste $|\omega| = b$:n kuvassa kauimpana origosta. Tälle pisteelle $|t| = (b+a)/(1+ab)$ ja $\frac{1+|t|}{1-|t|} = \frac{1+ab+a+b}{1+ab-a-b} = \frac{(1+b)(1+a)}{(1-b)(1-a)}$

ja kolme pistettä ovat H-suoralla. Tämä osoittaa, että kolmioepäyhtälö on voimassa.

III PERUSALUEEN HYPERBOLINEN PINTA-ALA

Hyperbolinen pinta-ala-alkio määritellään kaavalla

$$(1) \quad d\sigma = \frac{dx\,dy}{y^2}.$$

Osoittaaksemme sen invarianssin palautamme mieleen, että

$$dx'\,dy' = \frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)}\,dx\,dy,$$

missä $x'+iy' = \tau' = T\tau$. Koska τ' on τ:n analyyttinen funktio, saamme Cauchy-Riemann' yhtälöstä

$$\frac{\partial(x',y')}{\partial(x,y)} = |T'(\tau)|^2 = \frac{1}{|c\tau+d|^4} = \frac{y'^2}{y^2},$$

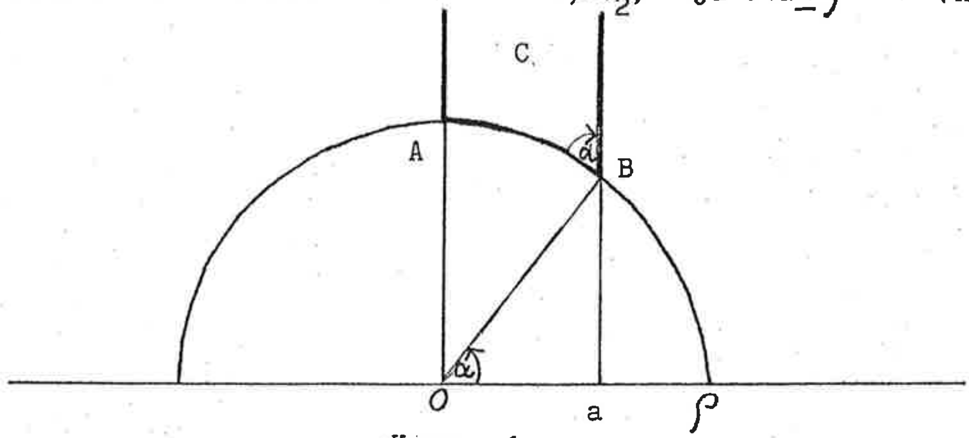
mistä tulos seuraa.

GAUSS-BONNET' LAUSE Hyperbolisen kolmion, jonka kulmat ovat α, β, γ, hyperbolinen pinta-ala on äärellinen ja yhtä kuin

$$(2) \quad \pi - (\alpha+\beta+\gamma).$$

Todistamme lauseen neljässä vaiheessa.

1° Olkoon kolmiossa ABC kulmat $0, \pi/2, \alpha$ ja $0<a\le\rho$ (Kuva 1).



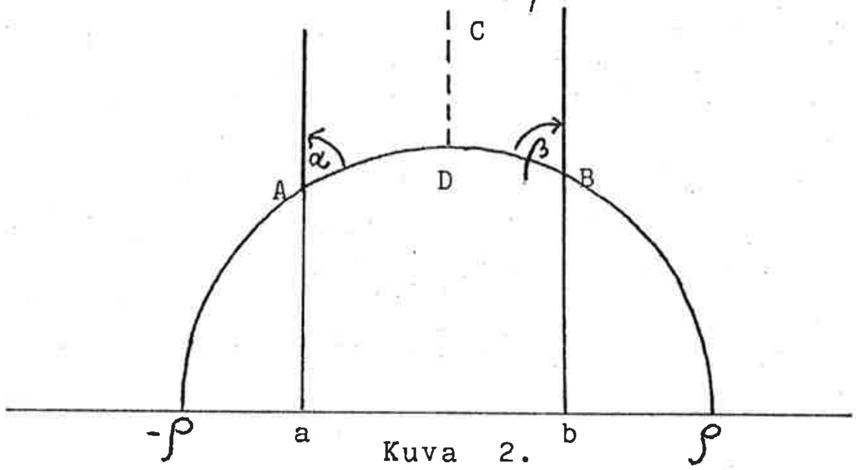
Kuva 1.

Merkitsemällä $\triangle$:n H-pinta-alan $|\triangle|$:lla saamme (1) mukaan

$$|\triangle ABC| = \int_0^a dx \int_{\sqrt{\rho^2 - x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\rho^2 - x^2}}$$

$$= \text{arc sin}\,\frac{a}{\rho} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - (0 + \frac{\pi}{2} + \alpha)\ .$$

2° Olkoon $\triangle$ ABC kulmat 0, α, β (kuva 2).



Kuva 2.

Saamme

$$|\triangle ABC| = \pi - (-\alpha + \frac{\pi}{2})$$

$$|\triangle DBC| = \pi - (\frac{\pi}{2} + \beta)$$

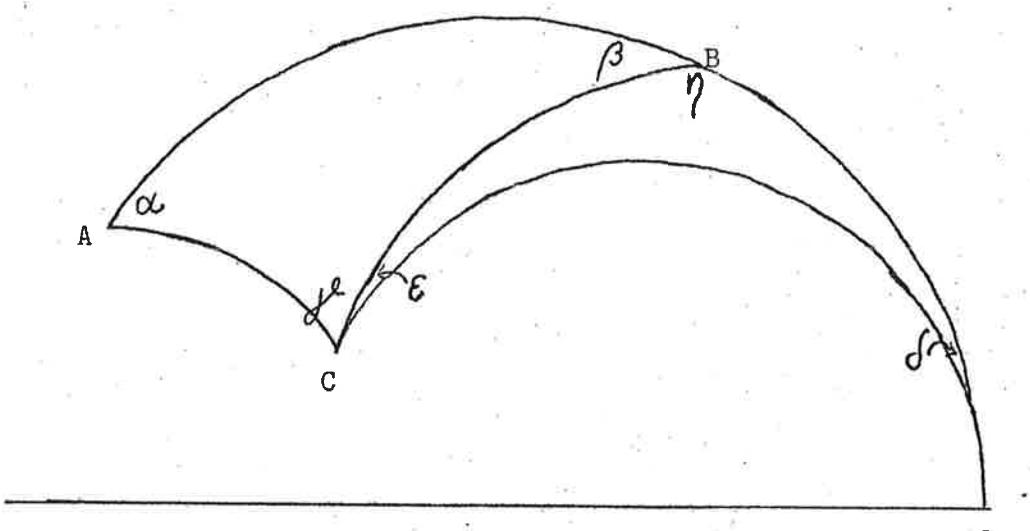
Siten

$$|\triangle ABC| = 2\pi - (\pi + \alpha + \beta) = \pi - (\alpha + \beta)$$

Tapaus, jossa A ja B ovat D:n samalla puolella käsitellään vastaavasti.

3° Jos $\triangle$ABC:llä on ääretön kärki, se on muotoa 2°, jossa $-\rho \leq a \leq b \leq \rho$. Jos sillä ei ole ääretöntä kärkeä, mutta vähintään yksi reaalinen kärki, reaalinen lineaarinen muunnos kuvaa sen hyperbolisen pinta-alan muuttumatta kolmioksi, jossa on ääretön kärki.

4° Jäljellä on ainoastaan tapaus, jossa kolmio ei kosketa reaaliakselia (kuva 3).



Kuva 3.

AB:n jatke leikatkoon E:n D:ssä. YHdistetään C ja D H-suoralla. Silloin

$$
\begin{aligned}
|\triangle ABC| &= |\triangle ADC| - |\triangle BCD| \\
&= \{\pi - (\alpha + \gamma + \varepsilon + \delta)\} - \{\pi - (\varepsilon + \delta + \eta)\} \\
&= -(\alpha + \gamma) + (\pi - \beta) \\
&= \pi - (\alpha + \beta + \gamma) \qquad \therefore
\end{aligned}
$$

Määritelkäämme joukon H-pinta-ala kuten aikaisemmin paitsi, että integraali on nyt Lebesque-integraali.

Olkoon Γ ryhmä lineaarimuunnoksia.

MÄÄRITELMÄ 1 Sanomme, että z_1 ja z_2 ovat ekvivalentteja (tai Γ- ekvivalentteja), jos ja vain jos on olemassa $V \in \Gamma$ siten, että $Vz_1 = z_2$. Tämä on ekvivalenssirelaatio, joka jakaa Z:n erillisiin ekvivalenssiluokkiin.

z:n ekvivalenssiluokka on joukko,joka koostuu z:sta ja kaikista pisteistä,jotka ovat ekvivalentteja z:n kanssa Γ:n alkioiden suhteen, merkitsemme sitä Γz :lla. Siten

$$\Gamma z = \{ Vz \mid V \in \Gamma \}.$$

Luokat koostuvat pelkästään reaalisista pisteistä tai vain ei-reaalisista pisteistä.

<u>MÄÄRITELMÄ 2</u> H:n avoin osajoukko R on Γ:n perusalue, jos

1° mitkään R:n kaksi erillistä pistettä eivät ole Γ-ekvivalentteja

2° jokainen H.n piste on Γ-ekvivalentti $\overline{R}$:n pisteen kanssa.

<u>LAUSE 1</u> Olkoot R_1 ja R_2 perusalueita, joiden reunat ($\overline{H}$:ssa) ovat Lebesque-nollamittaisia joukkoja. Silloin

$$|R_1| = |R_2| .$$

Koska R_1 on avoin, se on Lebesque-mitallinen ja koska BdR_1 on nollamittainen, saamme $|\overline{R}_1| = |R_1|$. Todistaaksemme lauseen, huomaamme, että

$$\overline{R}_1 \supset \bigcup_{V \in \Gamma} (VR_2 \cap \overline{R}_1)$$

$$\bigcup_{V \in \Gamma} (R_2 \cap V^{-1}\overline{R}_1) \supset R_2 ,$$

joista ensimmäinen on triviaali ja toinen seuraa H:n peittämisestä $\overline{R}_1$:n kuvilla.

Tällöin

$$|R_1| = |\overline{R}_1| \geq \sum_{V \in \Gamma} |VR_2 \cap \overline{R}_1| ,$$

missä on käytetty Lebesque-pinta-alan täydellistä additiivisuutta.

Hyperbolisen pinta-alan invarianssin avulla ja soveltamalla vielä kerran täydellistä additiivisuutta, saamme

$$\sum_{V\in\Gamma} |VR_2 \cap \bar{R}_1| = \sum_{V\in\Gamma} |R_2 \cap V^{-1}\bar{R}_1| = |\bigcup_V \{R_2 \cap V^{-1}R_1\}| \geq |R_2| .$$

Siis

$$|R_1| \geq |R_2| .$$

Vastaavasti voidaan osoittaa, että

$$|R_2| \geq |R_1| ,$$

Siis

$$|R_1| = |R_2| .$$

<u>MÄÄRITELMÄ 3</u> <u>Normaali monikulmio</u> N_o, jonka keskus on ω_o, on

$$N = \bigcap_{i=1}^{\infty} L_i \text{ , missä } L_i = \{z \in H/d(z, \omega_o) < d(z, \omega_i)\}$$

Määritelmän mukaan N on H:n osajoukko; se ei sisällä yhtään E:n pistettä.

Voimme kirjoittaa

$$N = \{\omega \in H/d(\omega, \omega_o) < d(\omega, \omega_i) \quad \forall\, i>0\}$$

Siis N koostuu H:n pisteistä, jotka ovat lähinnä ω_o:aa.

<u>MÄÄRITELMÄ 4</u> N:n sivuja on kahta tyyppiä.

(i) Sellaisia, jotka ovat kokonaan reaaliakselilla E. Näitä sivuja kutsumme <u>vapaiksi sivuiksi</u>.

(ii) Sellaisia, joiden toinen tai molemmat päätepisteet ovat reaaliakselilla E tai ovat kokonaan ylemmällä puolitasolla. Näitä kutsumme <u>sisäsivuiksi</u>. ([2] ,Lemma s.32-33)

LAUSE 2 Normaalimonikulmio N on perusalue, sillä

1° N on avoin ([2] Lemma 3, s. 28)

2° Kaksi N:n erillistä pistettä eivät ole Γ-ekvivalenttisia ([2], Lemma 5, s. 29)

3° $\bigcup_i \overline{N}_i$ peittää H:n, joten $\forall z \in H \ \exists z' \in \overline{N}$ siten, että z on Γ-ekvivalenttinen z':n kanssa. ([2], Lemma 7 ja Thorem, s. 30-31)

SEURAUS Γ:n kahdella normaalilla monikulmiolla (yleensä eri keskus) on yhtä suuri hyperbolinen pinta-ala. Normaalin monikulmion reuna koostuu näet numeroituvasta määrästä suoria viivoja ja ympyränkaaria ja on siten nollamittainen.

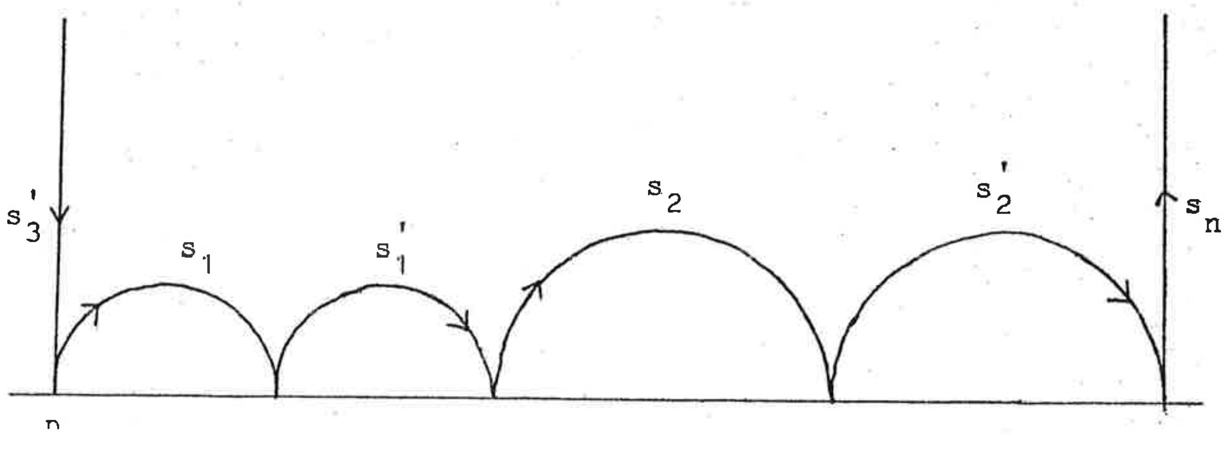
Γ-ekvivalenssirelaatio jakaa $\overline{N}_o$:n tavalliset kärjet ekvivalenssiluokkiin, joita kutsutaan tavallisiksi sykleiksi. N_o:n tavallinen sykli on siten joukko, joka koostuu N_o:n tavallisista kärjistä ja kaikista muista N_o:n kärjistä, jotka ovat sen kanssa ekvivalentteja. Tavallinen sykli on kokonaan H:ssa ja sisältää vain äärellisen määrän kärkiä. Olkoon $C = \{z_1, z_2, \ldots\}$ tavallinen sykli. Jos yksi kärki C:ssä on Γ:n jonkin alkion kiintopiste, niin jokainen muu kärki on myös kiintopiste, sillä Tz on TET^{-1}:n kiintopiste, jos z on E:n kiintopiste.Muunnos, jonka kiintopiste on tavallinen piste,on välttämättä elliptinen. Sen tähden luokittelemme tavalliset syklit elliptisiksi tai mielivaltaisiksi sen mukaan ovatko kaikki tai ei yksikään sen kärjistä kiintopisteitä. Vastaavia kärkiä kutsutaan elliptisiksi kärjiksi tai mielivaltaisiksi kärjiksi.

Elliptisen kärjen v virittäjä Γ_v on äärellinen syklinen ryhmä, jonka asteluku on kärjen asteluku, koska $\Gamma_{Tv} = T\,\Gamma_v T^{-1}$, on elliptisen syklin kaikkien kärkien asteluku sama. Tätä kokonaislukua kutsutaan myös syklin asteluvuksi.

Tutkimme nyt sellaisia syklejä, jotka ovat reaaliakselilla E. Jos yksi syklin piste on E:llä, on koko sykli E:llä.

Olkoon $p_1 \in E$ kärki, jossa kaksi sivua kohtaa ja olkoon $\{p_1, p_2, \ldots\}$ niiden $\overline{N}_o$:n pisteiden joukko, jotka ovat ekvivalentteja p_1:n kanssa. N_o:n kaksi sivua kohtaavat p_i:ssä. Jos ajattelemme kuljetuksi N_o:n reunan positiivisessa suunnassa, jokaisella sivulla on alkupiste ja loppupiste. Kun V kuvaa sivun s sen konjugaattisivulle s' s:n alkupiste kuvautuu s':n loppupisteelle. Koska V kuvaa N_o:n sen rajojen ulkopuolelle ja s':n loppupiste on ekvivalentti kuten myös s:n loppupiste ja s':n alkupiste.

Oletetaan, että s_1 on sivu, jonka alkupiste on p_1.ssä. s_1:n konjugaattisivu on s_1', joka päättyy p_1:n ekvivalenttipisteeseen ja kuuluu siten sykliin. Merkitään tätä pistettä p_2:lla. Jos on olemassa sivu s_2, joka alkaa p_2:sta ja sen konjugaattisivu s_2', joka päättyy p_3:een, voi käydä niin, että t:n askeleen jälkeen sivu s_t' päättyy p_1:een. (Kuvassa esimerkki tilanteesta, jossa t=3). Silloin sanomme, että $\{p_1, p_2, \ldots, p_t\}$ on N_o:n <u>parabolinen sykli</u> ja kutakin p_i kutsutaan paraboliseksi kärjeksi.



LAUSE 3 Normaalilla monikulmiolla on äärellinen hyperbolinen pinta-ala, jos ja vain jos sillä on äärellinen määrä sisäsivuja eikä lainkaan vapaita sivuja.

Edellä olevan seurauslauseen mukaan voimme tarkastella mielivaltaista normaalia monikulmiota N. Jos N:llä on äärellinen määrä sisäsivuja eikä lainkaan vapaita sivuja, sen pinta-ala voidaan laskea Gauss-Bonnet'n kaavan avulla. Valitaan N:n sisäpiste P ja piirretään H-suorat P:stä N:n kärkiin. N:n konveksisuudesta seuraa, että nämä suorat ovat kokonaan $\overline{N}$:ssa ja jakavat N:n kolmioihin. Oletetaan, että N:llä on 2n sivua. Liitetään kuhunkin sykliin luku l, joka on yksi mielivaltaiselle syklille ja elliptiselle syklille se on syklin virittäjän kertaluku ja ∞ (se on $\frac{1}{l}=0$) paraboliselle syklille. Tästä määritelmästä seuraa, että syklin kärkikulmien summa on kaikissa tapauksissa $2\pi l^{-1}$. ([2], Thorem 3, s.40)
Pitäen mielessä, että kulmien summa P:ssä on 2π, saamme

$$
\begin{aligned}
(3) \qquad |N| &= 2n\pi - \sum \alpha_i - \sum \omega_i \\
&= 2n\pi - 2\pi - 2\pi \sum \frac{1}{l} \\
&= 2\pi \left(n - 1 - \sum \frac{1}{l}\right),
\end{aligned}
$$

summa yli kaikkien syklien. Tästä seuraa, että $|N|$ on äärellinen.

Kääntäen oletamme, että $|N|$ on äärellinen. Silloin N:llä ei ole vapaita sivuja , koska vapaan sivun sisäpisteen ympäristöllä on ääretön pinta-ala. Valitsemme mielivaltaisesti 2n siten, että $s_1, s_2, \ldots, s_{2n}$ ovat peräkkäisiä sivuja N:ssä.

N:n sisäpisteestä piirretään H-suorat näiden sivujen päätepisteisiin, jolloin muodostuu 2n hyperbolista kolmiota, joiden pinta-alan voimme laskea Gauss-Bonnet'n kaavan avulla. Olkoon $\omega_j = \gamma_j + \beta_{j+1}$ kulma, jonka kärki on v_j (joka voi olla H-ssa tai E:ssä).

Silloin

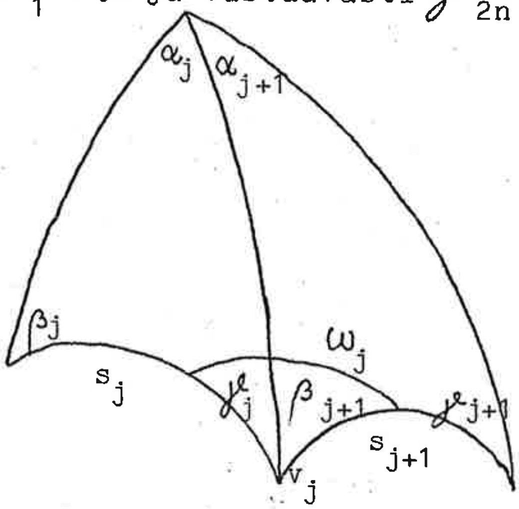
$$|N| \geq 2\pi n - \sum_{j=1}^{2n-1} \omega_j - \beta_1 - \gamma_{2n} - \sum_{j=1}^{2n} \alpha_j .$$

$\sum \alpha_j \leq 2\pi$ ja $0 \leq \omega_j \leq \pi$. Kuitenkin voimme jättää lukuunottamatta sen, että $\omega_j = \pi$. Tämä tapaus esiintyy vain toisen kertaluvun sykleille, jotka käsittävät yhden kärjen ja voimme yksinkertaisesti jättää pois tämän kärjen ja yhdistää sen kummallakin puolella olevat kaksi kolmiota yhdeksi.

Siten

$$3\pi + |N| > \beta_1 + \gamma_{2n} - \pi + 2\pi + |N| \geq \sum_{j=1}^{2n-1} (\pi - \omega_j),$$

koska $\beta_1 < \omega_1 < \pi$ ja vastaavasti $\gamma_{2n} < \pi$.



Kuva 4.

Jos N:n sivujen lukumäärä on ääretön, voimme jatkaa jonoa $\{s_i\}$ rajattomasti. Olettakaamme, että merkintä on valittu siten, että $i \longrightarrow \infty$. Silloin oikealla puolella olevat sarjat suppenevat, kun yläraja on ääretön, koska sen termit ovat positiivisia ja sen osasummat ovat rajoitettuja, joten $\omega_j \to \pi$.

Siitä seuraa, että $\omega_j = 0$ vain äärelliselle määrälle j, joka vastaa tietysti parabolisia kärkiä N:ssä. Jos rajoitumme tästä lähtien kulmiin H:ssa, voimme väittää, että

(4) $\frac{2}{3}\pi < \omega_j < \pi$, kun $j > J_o$

N:n kärjet on järjestetty tavallisissa sykleissä, joista kukin käsittää äärellisen määrän kärkiä.

Oletetaan, että on olemassa kertaluku l_j oleva sykli ($l_j = 1$ mielivaltaiselle syklille), joka koostuu kärjistä r_j.
Olkoot kärkikulmat $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(r)}$, kun $j > j_o$.
Saamme (4):n mukaan

$$\frac{2}{3}\pi < \omega^{(k)} < \pi \, , \quad k = 1, 2, \ldots, r_j \, .$$

koska

$$\omega^{(1)} + \ldots + \omega^{(r_j)} = \frac{2\pi}{l_j} \, .$$

Tästä saadaan

$$\frac{2}{3}\pi r_j < \frac{2\pi}{l_j} < \pi r_j \, , \quad \text{eli}$$

$$2 < r_j \, l_j < 3 \, , \quad \text{RR}.$$

Siten N:llä on äärellinen määrä sivuja.

<u>MÄÄRITELMÄ 5</u> N_o:n sivut s_1 ja s_2 ovat konjugaattisivuja, jos on olemassa Γ:n alkio (ei identtinen kuvaus), joka kuvaa s_1:n s_2:lle.

<u>SEURAUS</u> Jos $|N| < \infty$, silloin Γ:lla on virittäjien järjestelmä, jossa on korkeintaan $3|N|/\pi + 6$ jäsentä.

Oletetaan, että N:llä on 2t sivua. Normaalin monikulmion pinta-alan kaava on

$$|N| = 2\pi(t-1) - 2\pi \sum \frac{1}{l_j},$$

summa yli kaikkien tavallisten syklien.

Jos kertalukua l_j olevalla syklillä on r_j kärkeä, silloin $r_j l_j \geq 3$, ellei $l_j=2$, $r_j=1$. Tämä on triviaali, jos $l_j \geq 3$ tai jos $l_j=2$, $r_j>1$.

Jos $l_j=1$ (tämä mielivaltaiselle syklille), silloin $r_j \geq 3$.

Tämä sentähden, että mielivaltaisen syklin kärkikulmien summa on 2π, eikä mikään kulma voi olla yhtä suuri kuin π; sillä π:n suuruinen kulma liitetään vain toisen kertaluvun kärkiin. Oletetaan, että on olemassa e sykliä, joille $l_j=2$, $r_j=1$. Silloin saamme jäljellejääville sykleille

$$\sum \frac{1}{l_j} = \sum \frac{r_j}{r_j l_j} \leq \frac{1}{3}\sum r_j \leq \frac{2t-e}{3}.$$

Niinpä

$$\frac{|N|}{2\pi} \geq t-1 - \frac{2t-e}{3} - \frac{e}{2} = \frac{t}{3} - \frac{e}{6} - 1.$$

Kukin kertalukua kaksi olevasta e kärjestä erottaa kaksi konjugaattisivua, jotka kohtaavat kärjessä.

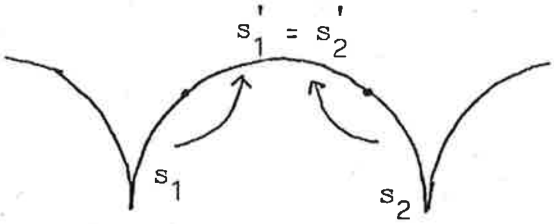
Kaksi sallaista kärkeä eivät voi olla peräkkäin N:n reunalla, muutoin niiden välisellä sivulla olisi kaksi eri konjugaattisivua (kuva 5).

Kun $e \leq t$, tästä saadaan

$$\frac{|N|}{2\pi} \geq \frac{t}{6} - 1, \quad t \leq \frac{3|N|}{\pi} + 6,$$

koska syklisissä ryhmissä muunnokset, jotka konjugoivat perusalueen sivut virittävät ryhmän.

<u>LAUSE 4</u> Jos jollakin Γ:n normaalilla monikulmiolla on äärellinen määrä sivuja, niin on jokaisella normaalilla monikulmiolla



Kuva 5.

<u>LAUSE 5</u> Γ:n perusalueen R hyperbolinen pinta-ala toteuttaa epäyhtälön

$$|R| \geq \frac{\pi}{21}$$

sillä edellytyksellä, että R:n reuna on nollamittainen.

Aikaisempien lauseiden mukaan voimme rajoittaa todistuksemme normaaliin monikulmioon N ja voimme ilmeisesti olettaa, että $|N| < \infty$. Silloin N:llä on äärellinen määrä sivuja eikä lainkaan vapaita sivuja. Kaavan (3) mukaan

$$N_1 = \frac{|N|}{2\pi} = n-1-\sum_{i=1}^{e}\frac{1}{l_i},$$

missä N:llä on 2n sivua ja c sykliä. Tämä yhtälö määrittelee N_1:n.

Koska N:llä on äärellinen määrä sivuja, se on monikulmio, ja voimme tarkastella sitä tunnettuna monikulmiona.

Täten N on monikulmio, jossa on c kärkeä, n sivua ja yksi yhtenäinen sisäpisteiden joukko. Eulerin kaavan mukaan

(5) $\quad c-n+1 = 2-2\,g,$

missä N:n genus g on ei-negatiivinen kokonaisluku ja

$$g = \begin{cases} \frac{k}{2} - 1, & \text{kun k on parillinen} \\ \frac{k+1}{2} - 1, & \text{kun k on pariton,} \end{cases}$$

missä k on Riemann' pinnan haarapisteiden lukumäärä.
([1] , s.1-12 ja 117-124)

Genus on tietenkin N:n topologinen invariantti, mutta ei ole selvää, ettei se muutu, jos korvaamme N:n normaalilla monikulmiolla, jolla on toinen keskus. Olettakaamme kuitenkin, että tulos on voimassa ja korvataan (5) yllä-olevassa kaavassa N_1:llä.

Saamme

$$N_1 = 2g-2+c-\sum_{i=1}^{c} \frac{1}{l_i} = 2g-2+ \sum_{i=1}^{c} (1-\frac{1}{l_i}).$$

Tässä summassa voimme kuitenkin jättää pois mielivaltaiset syklit ($l_i = 1$). Merkitsemällä s:llä ei-mielivaltaisten syklien lukumäärää (ja muuttamalla merkintää tarpeen tullen) saamme

$$(6) \qquad N_1 = 2g-2+ \sum_{i=1}^{s} (1-\frac{1}{l_i}) .$$

Lisäksi $N_1 > 0$.

Toisaalta kaava, jonka haluamme muodostaa on

$$N_1 \geq \frac{1}{42} ,$$

jonka todistamme lauseen (6) ja N_1:n positiivisuuden avulla. Parametrit (6):ssa ovat g ja $\{l_1,\ldots,l_s\}$, missä $g \geq 0$ ja $2 \leq l_i \leq \infty$.

Siten $\frac{1}{2} \leq 1 - \frac{1}{l_i} \leq 1$.

Jos $g \geq 2$, saamme $N_1 \geq 2$. Kun $g=1$, saamme varmasti $s>0$.
Muussa tapauksessa $N_1 = 0$.

Siten

$$N_1 \geq 1 - \frac{1}{l_1} \geq \frac{1}{2} .$$

Oletetaan, että $g=0$. Olkoon $s \geq 5$; $N_1 \geq -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$.
Jos $s=4$, ainakin yksi termi $1-\frac{1}{l_i}$ on suurempi kuin $\frac{1}{2}$, muussa tapauksessa N_1 ei ole suurempi kuin nolla.

Jos s=1 tai 2, ei voi olla $N_1 > 0$. Sen tähden meillä on jäljellä s=3, g=0 ja saamme

$$N_1 = 1 - \left(\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} \right).$$

Olkoon $l_1 \leq l_2 \leq l_3$. Jos $l_1 \geq 4$, $N_1 \geq 1 - 3.\frac{1}{4}$.

Jos $l_1 \geq 3$, silloin, koska $l_2 \geq 3$, täytyy olla $l_3 \geq 4$, jotta $N_1 > 0$.

Siten $N_1 \geq 1 - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{12}$.

Olettakaamme lopuksi, että $l_1 = 2$. Silloin joko $l_2 = 3$ tai $l_2 \geq 4$. Edellisessä tapauksessa $l_3 \geq 7$,

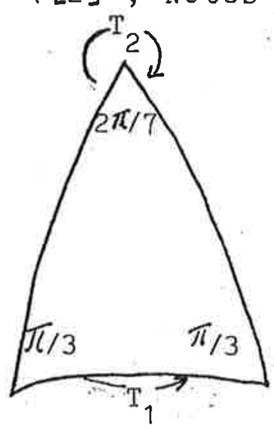
$N_1 \geq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} \right) = \frac{1}{42}$. Jälkimmäisessä tapauksessa meidän pitää olettaa, että $l_3 \geq 5$.

Siten

$$N_1 \geq 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \frac{1}{20}.$$ Siis aina $N_1 \geq \frac{1}{42}$,

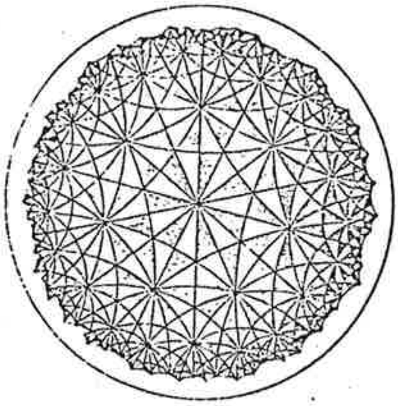
jolloin $|N| = 2\pi N_1 \geq \frac{2\pi}{42} = \frac{\pi}{21}$.

Näemme, että alaraja saavutetaan kun $g = 0$, $l_1 = 2$, $l_2 = 3$, $l_3 = 7$. Tällaiset parametrit sisältävä ryhmä on olemassa. Se virittää kuvassa 6 nähtävän monikulmion; virittäjiä ovat sellaiset muunnokset, jotka yhdistävät nuolien liittämät sivut. Ryhmän diskreettisyys todistetaan viittaamalla Poincare'n lauseeseen, joka antaa riittävät ehdot sille, että hyperbolinen monikulmio H:ssa muodostaa diskreetin ryhmän. ([2], Notes 6, s. 64)



Kuva 6.

Kun puheena oleva ryhmä on muunnettu siten, että se on määritelty yksikkökiekossa U, se muodostaa U:n jaon, joka nähdään kuvassa 7.



Kuva 7.

Jos N ei ole kompakti, ainakin yksi $l_i = \infty$. Silloin voimme osoittaa, että $|N_1| \geq \frac{1}{6}$. Tämä on N_1:n arvo moduliryhmälle. Todistuksen yksityiskohdat ovat lähes samat kuin kompaktissa tapauksessa.

IV FUCHSIN RYHMÄN PERUSALUE

1. FUCHSIN RYHMÄ

Analyyttistä funktiota f kutsutaan automorfiseksi tason muunnosten ryhmän Γ suhteen, jos f saa saman arvon sellaisissa pisteissä, jotka ovat ekvivalentteja Γ suhteen. Toisin sanoen

$$f \circ V(z) = f(z)$$

kullekin $V \in \Gamma$ ja kullekin $z \in D$, missä D on f:n määrittelyalue. Jos halutaan, että funktio f ei ole vakiofunktio, meidän täytyy olettaa, että missä tahansa D:n kompaktissa osassa on vain äärellisen monta z:n ekvivalenttipistettä. Tämä Γ:n ominaisuus tunnetaan epäjatkuvuutena.

Tutkimme Ω_R:n aliryhmiä, jotka ovat epäjatkuvia. Sellaisia aliryhmiä kutsutaan reaalisiksi epäjatkuviksi ryhmiksi. Melkein kaikki reaalisten epäjatkuvien ryhmien ominaisuudet ovat invariantteja H:n homeomorfismin suhteenU:ssa ja ovat siten voimassa Ω_Q:n epäjatkuville aliryhmille. Ω_R:n tai Ω_Q:n epäjatkuvat aliryhmät tunnetaan FUCHSIN ryhminä. Ryhmän sanotaanolevan epäjatkuva esimerkiksi seuraavissa tapauksissa

- Γ on epäjatkuva ryhmä, jos ja vain jos Γ:n tavallisten pisteiden joukko $\mathcal{O}$ ei ole tyhjä ([2] Deffinition, s.11).
- Γ on epäjatkuva joukossa S, jos $S \subset \mathcal{O}$ ([2] Deffinition, s.11)
- Epäjatkuvan ryhmän aliryhmä on epäjatkuva ([2],Theorem, s.11)

- Mikä tahansa ryhmä, joka sisältää epäjatkuvan ryhmän äärellisindeksisenä aliryhmänä on itse epäjatkuva ([2], Theorem, s.11).
- Ryhmä on epäjatkuva, jos ja vain jos se on diskreetti Ryhmää kutsutaan diskreetiksi, jos se ei sisällä erillisten matriisien suppenevaa osajonoa. Suppenevuudella tarkoitamme alkioittain suppenemista. Hyvä esimerkki diskreetistä ryhmästä on moduliryhmä. ([2], Theorem, s.13).
- Epäjatkuva ryhmä on numeroituva ([2], Theorem, s. 13).

Esimerkkejä Ω_R:n epäjatkuvista ryhmistä

1° Γ = äärellinen ryhmä. Tällöin Γ on epäjatkuva kaikkialla, sillä Γ ei sisällä erillisten alkioiden ääretöntä jonoa.

2° Γ = syklinen ryhmä = $\{T\}$. (Yleensä $\{A,B,C,...\}$ tarkoittaa A,B,C...:n virittämää ryhmää).
Olkoon T elliptinen; voimme esittää sen muodossa $z' = ze(\theta)$ (Merkitään $e^{2\pi i\theta} = e(\theta)$).
Jos θ on rationaalinen, $\theta = \frac{p}{q}$, silloin $T^q = 1$ ja ryhmä on äärellinen ja siten epäjatkuva kaikkialla.
Oletetaan, että θ on irrationaalinen. Silloin luvut $e(m\theta)$ kokonaisluvulle m ovat kaikki eri lukuja, sillä jos $e(m\theta) = e(n\theta)$ ja $m \neq n$ seuraa, että $(m-n)\theta$ on kokonaisluku. Siten kaikki T:n arvot ovat erillisiä.
Äärettömällä joukolla $\{e(m\theta), m \text{ kokonaisluku}\}$ on kasaantumispiste yksikkökiekossa ja $e(m_j\theta) \longrightarrow e(\rho)$ tietylle jonolle $m_j \longrightarrow \infty$.

Siten $T^{m_j}(ze(-\rho)) \longrightarrow z$ kullekin kompleksiluvulle z ja silloin Γ ei ole jatkuva.

Olkoon T ei-elliptinen. Kaikki T:n arvot ovat erillisiä ja T:n kiintopiste on kaikkien sen arvojen kiintopiste. Siten kukin T:n kiintopiste on Γ:n rajapiste. Näin ollen rajapisteiden joukko L koostuu T:n kiinteistä pisteistä.

Ei-elliptisten syklisten ryhmien joukosta mainittakoon yksijaksoinen ryhmä, jonka virittää siirto $z \longrightarrow z+\lambda$.

3° $\Gamma = \left\{ V = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},\ ad - bc = 1,\ a,b,c,d \text{ kokonaislukuja} \right\}$.

Tämä on tunnettu moduliryhmä. Koska V:llä on reaaliset kertoimet, se kuvaa H:n itselleen. Γ on epäjatkuva sekä ylemmällä että alemmalla puolitasolla. Toisaalta jokainen reaaliluku x kuuluu rajapisteiden joukkoon L. Olkoot b_n, d_n jaottomia kokonaislukuja siten, että $b_n/d_n \longrightarrow x$, $\{b_n/d_n\}$ ovat erillisiä. Ratkaisemme yhtälön $a_n d_n - b_n c_n = 1$ kokonaislukujen a_n, c_n suhteen. Siten $V_n = (a_n b_n / c_n d_n)$ ovat Γ:n erillisiä alkioita ja $V_n(0) \longrightarrow x$.

Moduliryhmälle on silloin rajapisteiden joukko L=E.

4° Γ = moduliryhmän aliryhmä. Monista erilaisista aliryhmistä mainitsemme tässä vain ryhmän $\Gamma(n)$, joka on kaikkien modulimuunnosten $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \pmod{n}$ joukko.

Ryhmä $\Gamma(n)$ on selvästi äärellisindeksinen normaali aliryhmä. Tämän takia moduliryhmää voidaan merkitä $\Gamma(1)$:llä.

Fuchsin ryhmässä kukin ryhmän muunnos kuvaa tietyn ympyrän itselleen ja kuvaa kunkin osan, joihin ympyrä jakaa tason itselleen. Yhteistä kiintoympyrää kutsutaan perusympyräksi. Perusympyrän sisäpuolella oleva piste kuvautuu sisäpisteeksi ja ulkopuolella oleva piste ulkopisteeksi. Jos perusympyrä on suora, piste suoraan yhdellä puolella kuvautuu suoran samalla puolella olevaksi pisteeksi.

Tutkitaan nyt sellaisia muunnoksia, jotka kuuluvat Fuchsin ryhmään. Ainoa loxodrominen muunnos, jolla on kiintoympyröitä, kuvaa kunkin kiintöympyrän sisäpuolen ympyrän ulkopuolelle. Täten loxodrominen muunnos ei voi kuulua Fuchsin ryhmään. Huomaamme, että ryhmän muunnoksien, jotka ovat muita kuin identtinen muunnos, täytyy olla jokin seuraavista.

1° Hyperbolinen muunnos, jonka kiintopisteet ovat perusympyrällä.

2° Elliptinen muunnos, jonka kiintoympyrät ovat toistensa peilikuvia perusympyrän suhteen.

3° Parabolinen muunnos, jonka kiintopisteet ovat perusympyrällä ja kiintosuorat ovat perusympyrän tangentteja.

Kääntäen, mikä tahansa näista kolmesta muunnoslajista kuvaa ympyrän itselleen.

Lineaariset muunnokset luokitellaan niiden kiintopisteiden, toisin sanoen yhtälön $Tz=z$ ratkaisujen, mukaan. Kun $c \neq 0$ muunnoksessa $T = (ab|cd)$, kiintopisteet saadaan yhtälöstä

(1) $cz^2 + (d-a)z - b = 0$

Tällä yhtälöllä on kaksi äärellistä ratkaisua

$z = \xi_1, \xi_2$ siten, että

(2) $\xi_1 = \dfrac{a-d+(\chi^2-4)^{1/2}}{2c}$; $\xi_2 = \dfrac{a-d-(\chi^2-4)^{1/2}}{2c}$,

missä $\chi = a+d$ on kuvauksen T ura (Huom. $ad-bc=1$).
Kaksi kiintopistettä yhtyvät, jos ja vain jos $\chi = \pm 2$.
Silloin muunnos on parabolinen.

LEMMA 1 Kuvauksen T ura on invariantti muunnoksen $T \longrightarrow ATA^{-1}$ suhteen, missä A ei ole yksikkömatriisi.

Tämä seuraa välittömästi siitä, että

$$\chi(AB) = \chi(BA).$$

Kun c=0, saamme $T_\infty = \infty$, toisin sanoen ääretön on aina kiintopiste. T on silloin muotoa

$$Tz = \frac{az+b}{d}, \quad ad = 1$$

ja b/(d-a) on toinen kiintopiste, jos $d \neq a$.
Kun d=a , T tulee muotoon

$$Tz = z \pm b,$$

joka on siirto. Tällöin ääretön on ainoa kiintopiste, joten T on parabolinen ja huomaamme, että $\chi = 2$, kuten sen pitääkin olla. Parabolinen muunnos, jonka kiintopiste on ääretön on siirto ja päinvastoin. Jos lopuksi b=0, on T identtinen muunnos.

Kiintopisteitä on korkeintaan kaksi, ellei T ole identtinen muunnos. Tästä seuraa:

Jos kolmella erillisellä pisteellä z_1, z_2, z_3 on samat kuvapisteet kuvauksissa S ja T, niin S=T, sillä jokainen z_i on kuvauksen $S^{-1}T$ kiintopiste ja $S^{-1}T$ on identtinen muunnos.

Olettakaamme nyt, että ξ_1, ξ_2 ovat äärellisiä ja erillisiä ($c \neq 0$, $\chi^2 \neq 4$). Tarkastellaan muunnosta W = W (z),

$$\frac{W-\xi_1}{W-\xi_2} = K\,\frac{z-\xi_1}{z-\xi_2}, \quad K \neq 0,1.$$

W:llä on kiintopisteet ξ_1 ja ξ_2 ja jos $W(\infty) = \omega(\infty)$, missä $\omega = Tz$, silloin W on sama muunnos kuin ω.
Koska $\omega(\infty) = a/c$, tästä seuraa, että $K = (a-c\xi_1)/(a-c\xi_2)$ ja edelleen laskemalla, että K on aina äärellinen, sillä $\xi_2 = a/c$ yhdistettynä yhtälön (1) kanssa seuraisi $ad-bc = 0$.
Sanomme, että

$$(3) \qquad \frac{\omega - \xi_1}{\omega - \xi_2} = K\,\frac{z - \xi_1}{z - \xi_2}, \qquad K = \frac{a - c\xi_1}{a - c\xi_2}$$

on yhtälön $\omega = Tz$ normaali muoto; lukua K kutsutaan T:n kertoimeksi. Mutta 1/K:ta voidaan myös pitää T:n kertoimena, sillä voimme kirjoittaa muunnoksen muotoon

$$\frac{\omega - \xi_2}{\omega - \xi_1} = \frac{1}{K}\,, \quad \frac{z - \xi_2}{\bar{z} - \xi_1}$$

Toisin sanoen, se pidämmekö K:ta vai 1/K:ta kertoimena riippuu siitä, mitä kiinteää pistettä merkitään ξ_1:llä ja mitä ξ_2:lla. Ilman epäselvyyttä merkitään kerrointa parina (K, 1/K). Koska $K+K^{-1}$ on ξ_1:n ja ξ_2:n symmetrinen funktio, sen täytyy olla (1):n kertoimien rationaalinen funktio. Käyttämällä laskussa tietoja

$$\xi_1 + \xi_2 = (a-d)/c, \qquad \xi_1\xi_2 = -\frac{b}{c}$$

seuraa

$$(4) \qquad K + K^{-1} = \chi^2 - 2\,.$$

<u>LEMMA 2</u> Kerroin on invariantti muunnoksen $T \longrightarrow ATA^{-1}$:n suhteen. A on tässä lineaarinen kuvaus.

(4):stä ja lemmasta 1 seuraa, että

$$K + K^{-1} = K' + K'^{-1}, \text{ missä } K' = K(ATA^{-1}).$$

Siten K = K' tai KK' =1. Näin ollen T':n kerroin on pari (K', 1/K'), joka on sama kuin pari (K, 1/K). Kun c=0, mutta $\chi^2 \neq 4$, on vain yksi äärellinen ja yksi ääretön kiintopiste ja T:n normaali muoto on

$$\omega - \xi_2 = K\,(z - \xi_2)\ ,\quad K = \frac{a}{d}\ ,\quad \xi_2 = \frac{b}{d-a}\ .$$

Huomaamme, että (4) on voimassa (ad =1). Siten lemma 2 pitää paikkansa.

Seuraavaksi oletamme, että $\xi_1 = \xi_2 \neq \infty$ (se on $c \neq 0, \chi = \pm 2$). Muunnoksella

$$(5)\qquad \frac{1}{\omega - \xi_1} = \frac{1}{z - \xi_1} \pm c\ ,\quad \xi_1 = \frac{a-d}{2c}\ ,$$

missä c:n etumerkki on χ:n etumerkki, on yksikäsitteinen kiintopiste ξ_1 ; lisäksi $\omega(\infty) = T(\infty)$. Sen tähden (5) on normaalimuoto paraboliselle muunnokselle, jolla on äärellinen kiintopiste. Kun $\xi_1 = \xi_2 = \infty$ normaali muoto, on

$$(5a)\qquad \omega = z + b\ .$$

Merkitsemme mielivaltaisesti K = 1 todistaaksemme oikeaksi kaavan (4) ja lemman 2. Lemma 2 on nyt todistettu oikeaksi kaikille lineaarisille muunnoksille.

Siinä tapauksessa, että T ei ole parabolinen, K voi saada minkä tahansa muun arvon kuin 0 tai 1.

Merkitään $K = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$, $0 \leq \theta < 2\pi$

saamme seuraavan luokituksen

$\rho = 1$, $\theta \neq 0$, muunnosta T kutsutaan elliptiseksi

$\rho \neq 1$, $\theta = 0$, muunnosta T kutsutaan hyperboliseksi

$\rho \neq 1$, $\theta \neq 0$, muunnosta T kutsutaan loxodromiseksi

Kun T on parabolinen, K = 1 ja $\chi = \pm 2$. Ei-parabolisessa tapauksessa käytämme (4):ää ja johdamme seuraavaa

LAUSE 1 Välttämätön ja riittävä ehto sille, että T on elliptinen, hyperbolinen tai parabolinen on, että γ on reaalinen ja $|\gamma| < 2$, $|\gamma| > 2$ tai $|\gamma| = 2$ vastaavasti. Välttämätön ja riittävä ehto sille, että T on loxodrominen on, että γ on ei-reaalinen.

Muunnokset T ja ATA^{-1}, A lineaarinen kuvaus, ovat samanaikaisesti elliptisiä, hyperbolisia jne.

Muunnosten ominaisuuksia

merkitään $Z = G(z) = \dfrac{z - \xi_1}{z - \xi_2}$

$$W = G(z') = \frac{z' - \xi_1}{z' - \xi_2} .$$

Muunnokset kuvaavat ξ_1:n 0:lle ja ξ_2:n ∞:lle. Silloin (3) tulee muotoon

$$(6) \qquad W = KZ, \text{ missä } K = \rho e^{i\theta} .$$

Elliptisessä muunnoksessa $\rho = 1$, $0 \leq \theta < 2\pi$ tästä seuraa, että $K = e^{i\theta}$ ja muunnos (6) tulee muotoon

$$W = e^{i\theta} Z .$$

Muunnos on kierto origon ympäri. Suorat ja ympyrät pysyvät muuttumattomina. Ympyrä, jonka keskipiste on origossa, kuvautuu itselleen ja ympyrän sisäpuoli kuvautuu itselleen. Pistee 0 ja ∞ ovat peilipisteitä kunkin kiintoympyrän suhteen. Suora, joka kulkee origon kautta, kuvautuu origon kautta kulkevaksi suoraksi muodostaen kulman θ ensimmäisen suoran kanssa. Soveltamalla muunnosta G^{-1}, joka kuvaa 0:n ja ∞:n ξ_1:lle ja ξ_2:lle vastaavasti, saamme seuraavat ominaisuudet

(i) Ympyrän kaari, joka liittää toisiinsa kiintopisteet kuvautuu ympyrän kaareksi, joka liittää kiintopisteet ja muodostaa kulman θ ensimmäisen kaaren kanssa.

(ii) Kukin ympyrä, joka on kohtisuorassa ympyröiden kanssa, jotka kulkevat kiintopisteiden kautta, kuvautuvat itselleen.

(iii) Kunkin (i):ssä mainitun ympyrän sisäpuoli kuvautuu itselleen.

(iv) Kiintopisteet ovat peilipisteitä (ii):ssä mainittujen ympyröiden suhteen. Elliptiselle muunnokselle

$$(a + d)^2 = 2 + e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 + 2\cos\theta .$$

Oikea puoli on positiivinen tai nolla ja pienempi kuin 4. Siten a+d on reaalinen ja

$$|a+d| < 2 \Rightarrow a+d = \pm (e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}) = \pm 2 \cos\frac{\theta}{2} .$$

Jos π on jaollinen θ:lla, on olemassa kokonaisluku n siten, että $n\theta = 2m\pi$ ja $K^n = e^{2m\pi i} = 1$.

Kun sovelletaan muunnosta n kertaa, palaa kukin piste takaisin alkuperäiseen asemaansa. Muunnoksen sanotaan silloin olevan n-jaksoinen. Huomaamme, että ainoa muunnos, jolla on tämä ominaisuus on varmasti elliptinen muunnos.

<u>Hyperboliselle</u> muunnokselle pätee $K = \rho$. Oletamme, että $\rho \neq 1$. Muunnos $W = \rho Z$ on venytys origosta lähtien. Huomaamme heti, että seuraavat tosiasiat koskevat sitä.

(i) Suora, joka kulkee origon kautta (se on ympyrä, joka kulkee kiintopisteiden 0 ja ∞ kautta) kuvautuu itselleen. Kukin puolisuora, jonka alkupiste on origossa, kuvautuu itselleen.

(ii) Puolitaso, joka on origon kautta kulkevan suoran tietyllä puolella, kuvautuu itselleen.

(iii) Ympyrä, jonka keskipiste on origossa (ja kohtisuorassa kiintosuorien perhettä kohtaan) kuvautuu jollekin toiselle ympyrälle, jonka keskipiste on origossa.

(iv) Pisteet 0 ja ∞ ovat peilipisteitä minkä tahansa sellaisen ympyrän suhteen, jonka keskipiste on origossa.

Suoritamme nyt muunnoksen G^{-1}, joka kuvaa 0:n ja ∞:n ξ_1:lle ja ξ_2:lle. Tällöin

(i) Mikä tahansa ympyrä, joka kulkee kiintopisteiden kautta, kuvautuu itselleen. Kumpikin kahdesta kaaresta, joihin kiintopisteet jakavat ympyrän, kuvautuvat itselleen.

(ii) Kiintopisteiden kautta kulkevien ympyröiden sisäpuoli kuvautuu itselleen.

(iii) Mikä tahansa ympyrä, joka on kiintopisteiden kautta kulkevia ympyröitä vastaan kohtisuorassa, kuvautuu toiselle samanlaiselle ympyrälle.

(iv) Kiintopisteet ovat (iii):n mukaisten ympyröiden suhteen peilipisteitä.

<u>Paraboliselle</u> muunnokselle K = 1.

Suoritetaan muuttujien vaihto $Z = G(z) = \frac{1}{z-\xi}$,

$W = G(z') = \frac{1}{\omega - \xi}$,

joka kuvaa ξ:n ∞:lle.

Saamme

(7) $W = z \pm c$.

Jos c = 0, niin ∞ on ainoa kiintopiste.

Kun a= d = $\pm$ 1 ja ω = z $\pm$ b, muunnos on siirto. Taso siirretään yhdensuuntaisena sen suoran kanssa, joka liittää toisiinsa origon ja pisteen $\pm$ c. Mikä tahansa suora, joka on yhdensuuntainen tämän suoran kanssa, kuvautuu itselleen. Puolitaso kiinteän suoran yhdellä puolelle kuvautuu itselleen. Mikä tahansa muu suora kuvautuu yhdensuuntaiselle suoralle. Sovelletaan kuvausta G^{-1}, joka kuvaa ∞:n ξ :lle. Yhdensuuntaiset suorat, jotka leikkaavat vain ∞ :ssä kuvautuvat ympyröiksi, jotka leikkaavat vain ξ :ssä ja sivuavat siten ξ :ssä. Täten parabolisessa muunnoksessa

(i) mikä tahansa ympyrä, joka kulkee kiintopisteen kautta, kuvautuu kiintopisteen kautta kulkevalle ja siinä sivuavalle ympyrälle

(ii) on olemassa yksi sivuavien ympyröiden perhe, joista kukin kuvautuu itselleen.

(iii) kunkin kiintoympyrän sisäpuoli kuvautuu itselleen.

Niistä syistä, joiden perusteella lineaarinen muunnos luokitellaan elliptiseksi, hyperboliseksi tai paraboliseksi johtuu, että tason kunkin pisteen (muu kuin kiintopiste) kautta kulkee yksikäsitteinen kiintoympyrä. Erityisesti kussakin tapauksessa on olemassa yksi kiintoympyrä, joka kulkee ∞ :n kautta eli on olemassa yksi kiintosuora. Tämä suora kulkee pisteen $-\frac{d}{c}$ (kuvautuu ∞:lle) ja pisteen $\frac{a}{c}$ (jolle ∞:n kuvautuu) kautta.

2. PERUSALUE

Olkoon Γ reaalinen diskreetti ryhmä. Γ -ekvivalenssirelaatio jakaa H:n pistevieraisiin alueisiin Γ_z . H:n osajoukkoa F, joka sisältää täsmälleen yhden pisteen kustakin alueesta, kutsutaan H:hon kuuluvaksi Γ :n perusjoukoksi. Täten F on perusjoukko, jos ja vain jos

(i) mitkään F:n kaksi erillistä pistettä eivät ole Γ-ekvivalentteja

(ii) jokainen $z \in H$ on Γ-ekvivalentti F:n pisteen kanssa.

Valinta-aksiooman mukaan jokaisella H:n muunnosjoukolla on olemassa perusjoukko, mutta se ei ole yksikäsitteinen. Esimerkiksi, jos $A \subset F$ ja $V \in \Gamma$, silloin $(F - A) \cup VA$ on myös perusjoukko. On selvää, että perusjoikolla ei tarvitse olla mitään tiettyä topologista ominaisuutta. Mutta kaikilla tutuilla joukoilla on hyvin yksinkertaiset perusjoukot. Yksijaksoisella ryhmällä on perusjoukko, joka koostuu kaistaleesta ja yhdestä sen rajasta. Kaksijaksoisella ryhmällä suunnikas, johon kuuluu kaksi vierekkäistä avointa sivua ja niiden yhteinen kärki. Samanlaisia konstruktioita voidaan tehdä syklisille ryhmille, moduliryhmille jne. Kussakin tapauksessa perusjoukko on avoin joukko, johon kuuluvat jotkut reunapistee. Kokonainen reuna koostuu janoista ja ympyrän kaarista. Voidaan osoittaa, että jokaiseen diskreettiin ryhmään sisältyy jokin tämän tyyppinen perusjoukko.

Perusjoukko ei voi olla avoin, sillä sen pitää sisältää pisteitä, jotka ovat ekvivalentteja sen omien reunapisteiden kanssa. Koska on tarkoituksenmukaista käyttää lähtökohtana joko avoimia tai suljettuja joukkoja, voimme muotoilla määritelmän seuraavasti

MÄÄRITELMÄ 1 H:n avoin osajoukko R on perusalue, jos

(i) mitkään R:n kaksi erillistä pistettä eivät ole Γ-ekvivalentteja.

(ii) jokainen H:n piste on Γ-ekvivalentti $\bar{R}$:n pisteen kanssa.

3. ISOMETRISET YMPYRÄT

Aikaisemmin olemme konstruoineet normaalin monikulmion joillekin ryhmille. Keskinormaali-menetelmä, jota olemme käyttäneet aikaisemmin, ei sovellu erityisen hyvin normaalien monikulmioiden varsinaiseen konstruointiin. Tässä esitämme L.R. Fordin menetelmän, joka perustuu isometrisiin ympyröihin. Oletamme edelleen, että Γ sisältää siirtoja.

Olkoon $T = (ab\,|\,cd) \in \Omega_R$, missä $c \neq 0$.

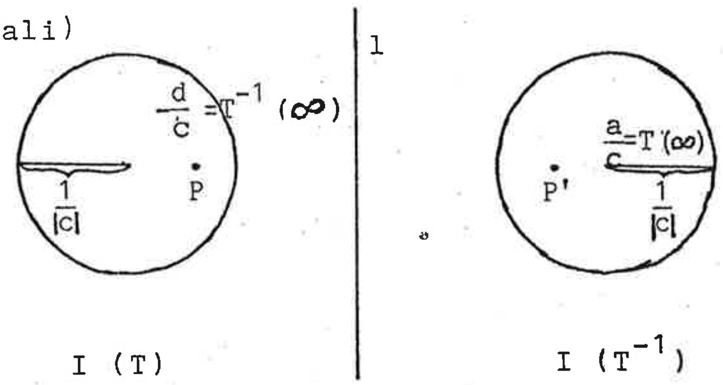
Silloin $|T'(z)| = |cz + d|^{-2}$.

Ympyrää $I(T) : |cz + d|^2 = 1$ kutsutaan T:n isometriseksi ympyräksi. Koska $|T'(z)| = 1$, jos ja vain jos $z \in I(T)$, isometrinen ympyrä on niiden pisteiden ura, jotka T kuvaa differentiaalisen euklidisen pituuden muuttumatta.
Nimi selittyy tästä. Emme määrittele isometristä ympyrää T:lle, jolle $c = 0$. Koska T^{-1}:lle on $c \neq 0$ silloin kun T:lle $c \neq 0$, on $I(T^{-1})$ määritelty, jos $I(T)$ on määritelty.

$I\,(T^{-1})$ on ympyrä $|c\omega - a| = 1$. Isometristen ympyröiden missä tahansa äärettömässä jonossa $I\,(T_n)$:n säteet lähestyvät nollaa. $I\,(T_n)$:n säde on $1/|c_n|$ ja koska Γ sisältää siirtoja, voimme käyttää seuraavaa lausetta. Jos Γ sisältää siirtoja, ei ole olemassa jonoa $V_n \in \Gamma$ siten, että $c_n \dashrightarrow \gamma$ (äärellinen) erillisille $\{c_n\}$. Erityisesti, on olemassa vakio $\tilde{c} > 0$ siten, että kaikille $V = (\,ab|cd\,)$ Γ:ssa saamme $c = 0$ tai $|c| \geq \tilde{c}$.

Tarkastelemme seuraavaksi muunnosten kiintopisteitä

1° $I\,(T)$ ja $I\,(T^{-1})$ eivät kohtaa (l on janan $-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}$ keskinormaali)



On olemassa yksikäsitteisesti määrätyt pisteet P ja P' siten, että $I\,(T)$ ja $I\,(T^{-1})$ ovat rajapisteisiin P ja P' liittyviä Apolloniuksen ympyröitä.

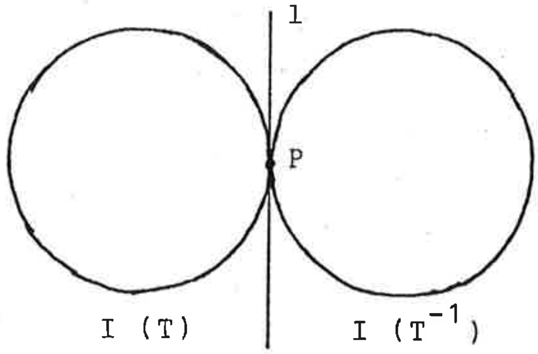
Suoritetaan

peilaus l:ssä $P \longleftrightarrow P'$

peilaus $I\,(T^{-1})$:ssä $P' \longleftrightarrow P$.

Siis $T\,(P) = P$ ja $T\,(P') = P'$ ovat ainoat kiintopisteet.

2° $I(T)$ ja $I(T^{-1})$ sivuavat pisteessä P

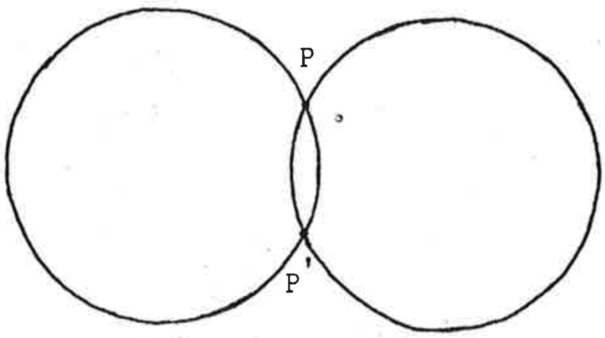


peilaus l:ssä, $P \longrightarrow P$

peilaus $I(T^{-1})$:ssä $P \longrightarrow P$

P on siis ainoa kiintopiste.

3° $I(T)$ ja $I(T^{-1})$ leikkaavat toisensa pisteissä P ja P'. Silloin vastaavasti P ja P' ovat ainoat kiintopisteet.



Ensimmäisessä tapauksessa kuvauksen kiintoympyröitä ovat rajapisteisiin P ja P' liittyvät Steinerin 2.lajin ympyrät. Toisessa tapauksessa P:n kautta kulkevat ortogonaaliset ympyrät ja kolmannessa tapauksessa rajapisteisiin P ja P' liittyvät Apolloniuksen ympyrät. Kuvaus T on vastaavasti hyperbolinen, parabolinen tai elliptinen.

<u>LEMMA 3</u> T kuvaa $I(T)$:n $I(T^{-1})$:lle ja Ext $I(T)$:n Int $I(T^{-1})$:lle.

Olkoon $z \in I(T)$ tai z on $I(T)$:n ulkopuolella

se on $|cz + d| \geq 1$.

Silloin $|c\,Tz - a| = |cz + d|^{-1} \leq 1$ eli $Tz \in I\,(T^{-1})$ tai Tz on sen sisäpuolella ja yhtäsuuruus on voimassa molemmissa tapauksissa tai ei kummassakaan. Näin lemma on todistettu.

Olkoon Γ reaalinen diskreetti ryhmä. Koska Γ sisältää siirtoja , ∞:n stabilisaattorin Γ_∞ virittämä siirto

$$U^\lambda = \begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \lambda > 0.$$

Γ_∞:n perusalueena on mikä tahansa kaistale

$$R_\infty : \ \xi < x < \xi + \lambda .$$

Jokaisella $V \in \Gamma - \Gamma_\infty$ on isometrinen ympyrä.

Määritellään

$$(8) \qquad R = R_\infty \cap \{ \bigcup_{V \in \Gamma - \Gamma_\infty} \mathrm{Ext}\ I(V) \}$$

se on; R koostuu R_∞:n siitä osasta, joka on jokaisen isometrisen ympyrän ulkopuolella.

Todistamme, että R on Γ:n perusalue.

Oletamme, että $z \in R$ ja $T \in \Gamma$. Jos $T \in \Gamma_\infty$, se siirtää z:n pois R_∞:stä, siten myös R:stä. Toisaalta, jos z on $I\,(T)$:n ulkopuolella on Tz sentähden $I\,(T^{-1})$:n sisäpuolella. ja siten R:n ulkopuolella. R:n erilliset pisteet eivät näinollen ole ekvivalelentteja Γ:n suhteen.

Meidän täytyy nyt osoittaa, että jokainen $z \in H$ on ekvivalentti jonkin $\bar{R}$:n pisteen kanssa. Isometristen ympyröiden säteet ovat ylhäältä rajoitettuja kuten olemme havainneet. Sen tähden on olemassa $B > 0$ siten, että $z = x + iy \in \bar{R}$ jos $z \in \bar{R}_\infty$ ja $y \geq B$.

Olkoon $\alpha \in H$ R:n reunapiste. Silloin α voi olla yhdellä R_∞:tä rajoittavalla pysysuoralla sivulla.

Jos näin ei ole, α on jollakin isometrisellä ympyrällä, sillä varmasti α ei ole isometrisen ympyrän sisäpuolella. Nyt α ei ole äärettömän monella isometrisella ympyrällä, sillä näiden ympyröiden säteet lähestyvät nollaa ja näin α olisi E:n piste. R:n rajan piste on silloin äärellisen monella isometrisella ympyrällä, mutta ei yhdenkään sisäpuolella. Siitä seuraa, että H:n pisteen, joka ei kuulu $\overline{R}$:aan, täytyy sijaita jonkin isometrisen ympyrän sisäpuolella.

Olkoon nyt $z_o \in H$. Siirretään z_o erääseen $\overline{R}_\infty$:n pisteeseen z_1. Merkitään

$$z_o = x_o + iy_o \ , \ z_1 = x_1 + iy_1 \ , \ \text{missä } y_1 = y_o \ .$$

Jos z_1 ei ole $\overline{R}$:ssa, se on jonkin isometrisen ympyrän $I\ (V_1)$ sisäpuolella, $V_1 = (\ a_1 b_1 /\ c_1 d_1\ )$, ja saamme

$$z_2 = V_1\ z_1 = x_2 + iy_2\ , \quad y_2 = \frac{y_1}{|c_1 z_1 + d_1|} > y_1 \ .$$

Seuraavaksi siirretään z_2 pisteeseen z_3 $\overline{R}_\infty$:ssa. jne. Saamme jonon $z_o, z_1, \ldots, z_n = x_n + iy_n, \ldots$, jossa $y_o = y_1 < y_2 = y_3 < y_4 = \ldots$.

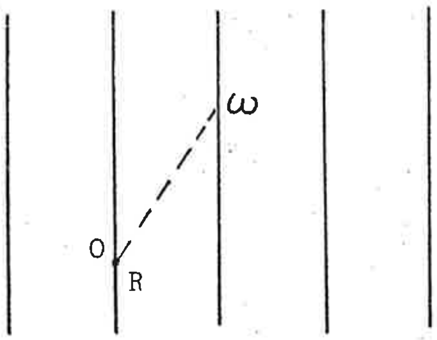
Jos jollakin n, $y_{2n+1} \geq B$, silloin z_{2n+1} on $\overline{R}$:ssa ja väite on todistettu. Muussa tapauksessa on olemassa ääretön jono $z_1, z_3, z_5, \ldots$, kaikki z_o:n kuvia Γ:n suhteen ja kaikki ovat $\overline{R}_\infty$:ssa. Tällä jonolla on kasaantumispiste z^* $\overline{R}_\infty$:ssa ja selvästi $I_m y^* > 0$, koska y_{2n+1} on aidosti kasvava.

Siten z^* on H:ssa, mutta sen jokainen ympäristö sisältää äärettömän monta z_o:n kuvaa. Seuraa ristiriita Γ:n epäjatkuvuuden kanssa.

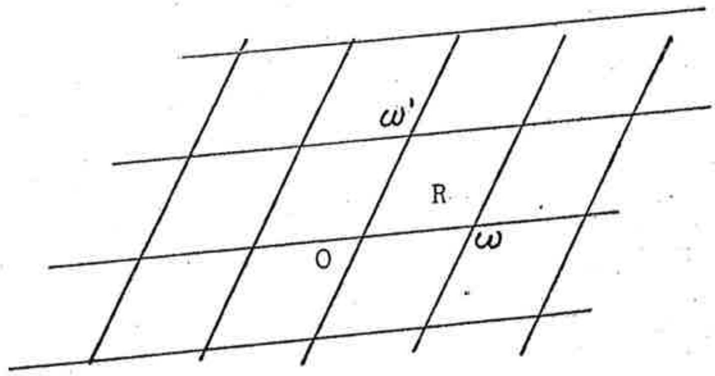
<u>LAUSE 2</u> Joukko R, joka on määretelty (8):n tavoin, on Γ :n perusalue.

4. ESIMERKKEJÄ PERUSALUEISTA

Kuvassa 1, R, jonka konstruointi selviää kuviosta, on perusalue eli jaksovyö yksijaksoisten funktioiden ryhmälle, $z' = z + m\omega$.



Kuva 1



Kuva 2

Kuvassa 2 R on perusalue eli jaksosuunnikas kaksijaksoisten funktioiden $z' = z + m\omega + m'\omega'$ ryhmälle

Huomaamme, että R:n reunat kummassakin tapauksessa koostuvat ekvivalenteista kaarista. Ryhmän muunnokset kuvaavat kunkin kahdesta reunasta toiselle. Kuvassa 2 siirto $z' = z + \omega'$ kuvaa alemman reunan ylemmälle reunalle ja vasemman reunan oikealle kuvauksella $z' = z + \omega$. Edelleen, muunnoksiin, jotka yhdistävät ekvivalentit reunat perustuvat ryhmän muunnokset. Kaksi muunnosta, jotka juuri mainittiin muodostavat kaksijaksoisten funktioiden ryhmän. Huomaamme, että voimme lisätä avoimeen alueeseen R yhden, mutta ei molempia kahdesta ekvivalentista reunasta kahden ekvivalentin pisteen joutumatta alueeseen. Alue R ja alueet, jotka ovat sen kanssa ekvivalentteja muodostavat vierekkäisten, ei päällekkäisten alueiden joukon peittäen koko tason.

On selvää, että perusalue ei ole yksikäsitteinen. Mikä tahansa alue, joka on ekvivalentti R:n kanssa, voi toimia alueena. Lisäksi voimme korvata minkä tahansa R:n osan ekvivalentilla osalla ja edelleenkin meillä on perusalue. Siten voimme vähentää osan yhdellä reunalla ja lisätä ekvivalentin osan toisella. Tällä tavoin reunakaarien luonne voi muuttua vapaasti.

Muunnokset

$$T_o = z,\ T_1 = \frac{2z-1}{3z-2},\quad T_2 = \frac{z}{5z-1},\quad T_3 = \frac{3z-1}{7z-2}$$

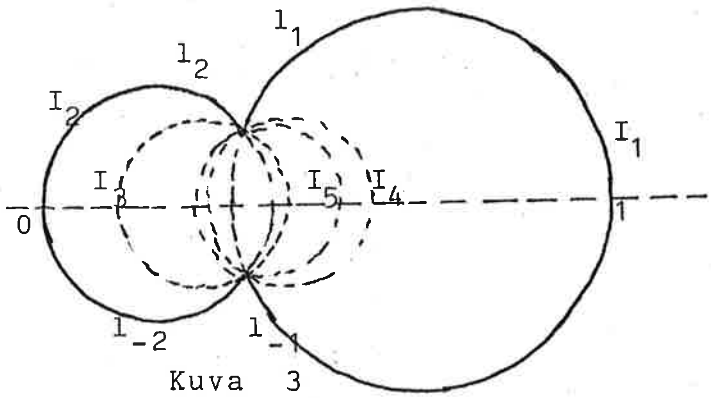
$$T_4 = \frac{2z-1}{7z-3},\quad T_5 = \frac{3z-1}{8z-3}$$

muodostavat äärellisen ryhmän.

Isometriset ympyrät ovat

$$I_1 : \left| z - \frac{2}{3} \right| = \frac{1}{3},\quad I_2 : \left| z - \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{5},\quad I_3 : \left| z - \frac{2}{7} \right| = \frac{1}{7}$$

$$I_4 : \left| z - \frac{3}{7} \right| = \frac{1}{7},\quad I_5 : \left| z - \frac{3}{8} \right| = \frac{1}{8}$$ (kuva 3).



Kuva 3

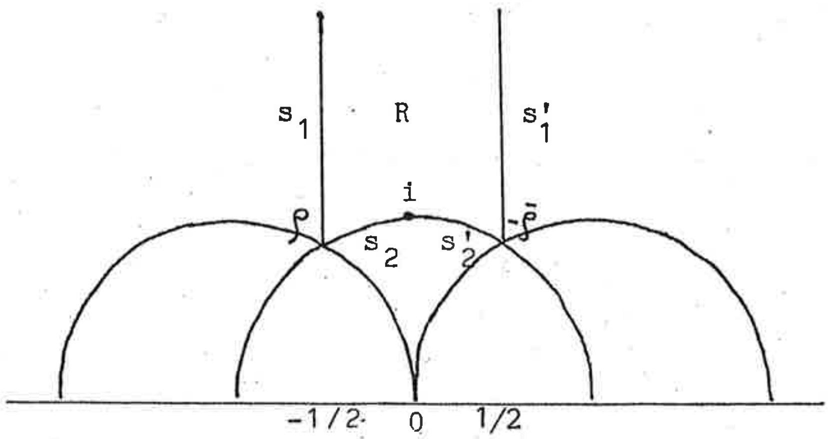
Kaaret I_1 ja I_2 rajoittavat perusalueen R. T on kaksijaksoinen elliptinen muunnos (a+d=0). Yksi kiintopisteistä on yksi. T_1 kuvaa isometrisen ympyrän I_1 ylemmän puoliskon l_1 alemmalle puoliskolle l_{-1}. Vastaavasti T_2 on kaksijaksoinen, ylempi ja alempi sivu l_2 ja l_{-2} ovat ekvivalentteja.

On täten olemassa kaksi paria ekvivalentteja sivuja.
Kaksi ekvivalenttia kärkeä ovat $\frac{5}{14} \pm i\sqrt{\frac{3}{14}}$, joiden kautta kulkee kukin isometrinen ympyrä.
Pisteet 0 ja 1 ovat myös kärkiä. R ja viisi R:n kanssa ekvivalenttia aluetta täyttävät koko tason menemättä päällekkäin. Ekvivalentteja alueita ei ole piirretty, mutta ei ole vaikeaa osoittaa, että kuusi aluetta koostuu kuudesta osasta, joihin isometriset ympyrät I_1, I_2, I_5 jakavat tason.

Moduliryhmä $\Gamma(1)$ on ryhmä, joka koostuu kaikista 2x2 matriiseista, joiden determinantti on yksi ja kertoimet kokonaislukuja. Äärettömän stabilisaattori on syklinen ryhmä, jonka virittämä siirto

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Otamme R_∞:ksi kaistaleen $|x| < \frac{1}{2}$. Suurimman isometrisen ympyrän säde on 1 ja keskipiste kohdissa (x , 0), missä x on kokonaisluku. Vain kolme keskipistettä 0, 1, -1 sijaitsevat R_∞:ssä ja ympyrät leikkaavat toisensa
ρ = e(1/3) = $-1/2 + i\sqrt{3}/2$, $-\bar{\rho}$ = e(1/6) (kuva 4).



Kuva 4

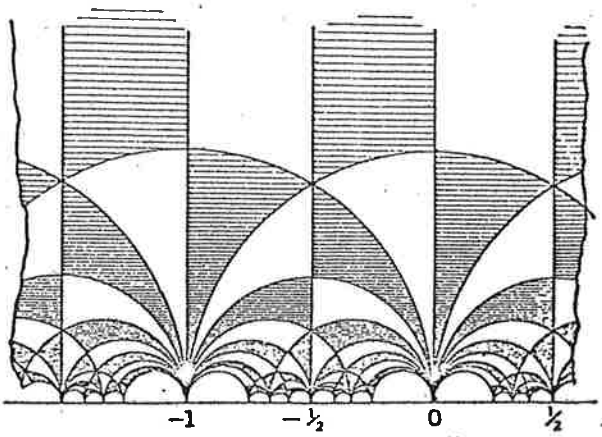
Muiden isometristen ympyröiden säde on $\leq \frac{1}{2}$, eikä näin ollen vaikuta perusalueeseen R. Siten

$$R;\ x^2 + y^2 > 1, \quad |x| < \tfrac{1}{2}, \quad y > 0$$

on moduliryhmän perusalue. Lisäksi R on normaali monikulmio. Valitaan keskukseksi 2i. Tämä on mahdollista, koska 2i ei ole kiintopiste. Elliptisen elementin kiintopisteellä on imaginaariosa

$$y = \frac{(4 - \chi^2)^{1/2}}{2\,|c|},$$

koska $|\chi| < 2$ ja kokonaisluku, saamme $y \leq 2/2\,|c| \leq 1$.
Nyt 2i + 1, 2i - 1 ovat 2i:n kuvia, siten suorat $x = \pm \frac{1}{2}$ ovat H-keskinormaaleja.
Siis $T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ kuuluu ryhmään ja T (2i) = i/2.
H-suoran H-keskinormaali, joka liittää toisiinsa 2i:n ja i/2:n, imaginaariakselin segmentti, on yksikköympyrä.
Palauttamalla mieleen normaalin monikulmion konstruoinnin, huomaamme, että N on normaali monikulmio, jonka keskus on 2i sisältyy R:ään. Jos R - N ei ole tyhjä, nähdään, että $R - \bar{N}$ ei ole tyhjä. Olkoon $z \in R - \bar{N}$ ja olkoon $z' \in \bar{N}$ z:n ekvivalenttipiste. Silloin $z \neq z'$. Nyt $z' \in R$.
Mutta koska $z \in R$, z':n täytyy kuulua R:ään, koska Γ:n alkio ei koskaan kuvaa R:n sisäpistettä reunan pisteelle.
Pisteet z ja z' ovat erillisiä ja ekvivalentteja ja molemmat ovat jollakin perusalueella. Tämä on ristiriita ja seuraa, että N = R. Osa R:n määräämästä H:n jaosta (" modulaarinen kuvio ") nähdään kuvassa 5.



Kuva 5

R:n sivut ovat s_1, s_1', jotka yhdistää U ja s_2, s_2', jotka yhdistää

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

U ja T määräävät moduliryhmän. T on astetta kaksi oleva elliptinen muunnos ja sen kiintopiste i lasketaan kärjeksi. Syklit ovat $\{\rho, -\bar{\rho}\}$, $\{i\}$ ja $\{\infty\}$. Kulmien summa ensimmäisen syklin kärjessä on $2\pi/3$, siten ρ on kolmannen asteen elliptisen elementin kiintopiste, joka on

$$W = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

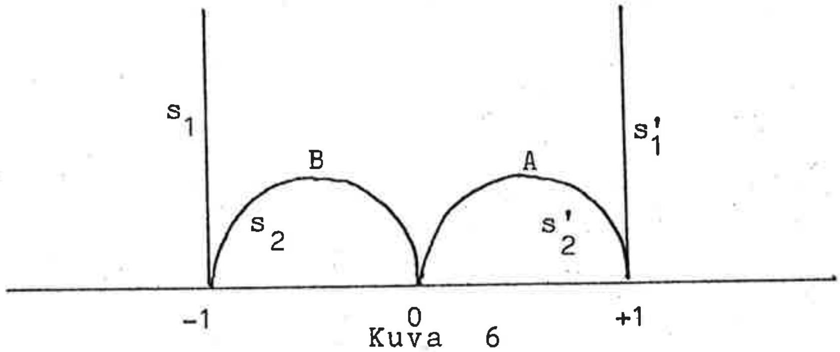
Samoin $-\bar{\rho}$ on kiinteä $(0\ -1 \mid 1\ -1)$ mukaan. Nämä muunnokset löydetään, kun huomataan, että TU kiinnittää ρ:n, kun taas TU^{-1} kiinnittää $-\bar{\rho}$:n. Kulmien summa syklissä $\{i\}$ on $\pi = 2\pi/2$, kuten pitääkin. $\Gamma(1)$:ssä on olemassa kaksi ilmeistä relaatiota, nimittäin

$$T^2 = -I, \quad (TU)^3 = -I.$$

Voidaan osoittaa, että nämä määräävät ryhmän relaatiot.

Tutkimme moduliryhmän aliryhmää $\Gamma(2)$, modulimuunnosten $(a\,b \mid c\,d)$ joukkoa, jossa a ja b ovat parittomia ja b ja c parillisia.

Äärettömän stabilisaattorin määrää $U^2 = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right)$.
R_∞ on kaistale $|x| < 1$. Isometriset ympyrät ovat A: $|2z - 1| = 1$ ja B: $|2z + 1| = 1$. Nämä poistettuna R_∞:stä muodostaa alue R (kuva 6).



Kuva 6

Yleinen isometrinen ympyrä on $|cz + d| = 1$, missä c on parillinen, d pariton ja voidaan olettaa, että $c > 0$. Jos $c = 2$, isometrinen ympyrä ei kohtaa R:ää ellei $d = \pm 1$ se on, ellei ympyrä ole joko A tai B. Jos $c \geq 3$, meidän täytyy tutkia vain $|d| < c$. Ympyrät, joille $d = -1$, $d = -(c-1)$ sivuavat sisäpuolisesti A:ta; ne, joille $d=1$, $d=c-1$ sivuavat sisäpuolisesti B:tä; ja ne, joille d:n arvo on jotain muuta ovat kokonaan R:n komplementissa, Siten R on $\Gamma(2)$:n perusalue.

Sivut s_1, s_1' yhdistää U^2, sivut s_2, s_2' yhdistää $Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Siten $\Gamma(2) = \{U^2, Y\}$. Syklit ovat $\{\infty\}$, $\{-1,1\}$, $\{0\}$ -kaikki parabolisia.

Tutkiminen ei tuo ilmi mitään selvää relaatiota $\Gamma(2)$:ssa, ja itse asiassa voidaan osoittaa, ettei mitään relaatiota ole olemassa.

LÄHTEET

[1] G. Springer, Introduction to Riemann surfaces, Addison- Wesley publishing Company, Massachusetts, U.S.A. 1957.

[2] J. Lehner, A short Course of Automorphic Functions, Holt, Rinehart and Winston, New York 1966.

[3] L.R. Ford, Automorphic Functions, Chelsea publishing Company, New York 1951.

[4] R. Nevanlinna, V. Paatero, Funktioteoria, Kustannusosakeyhtiö Otava, Keuruu 1963.