

Riemannin geometriaa

EI LAINAIA

Matematiikan
Pro gradu -tutkielma
Kati Mononen
Joensuun yliopisto
2003

JOENSUUN YLIOPISTO
Matematiikan laitos

Sisältö

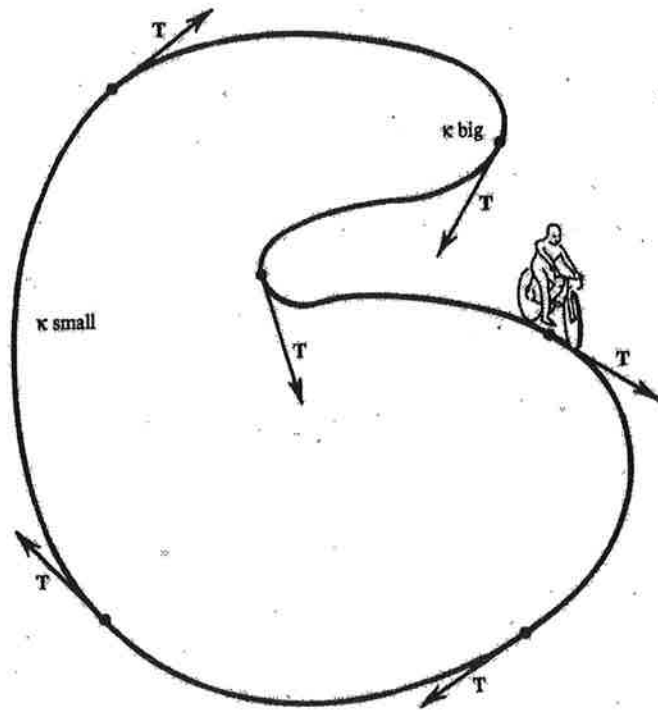
1	Käyrät avaruudessa \mathbb{R}^n	3
2	Pinnat avaruudessa \mathbb{R}^3	5
2.1	Minimipinnat	8
2.2	Koordinaatit, pituus, metriikka	8
3	Pinnat avaruudessa \mathbb{R}^n	13
4	m-ulotteinen pinta avaruudessa \mathbb{R}^n	17
4.1	Sektionaalinen ja Riemannin kaarevuus	19
4.2	Kovariantti derivaatta	25
5	Sisäinen Riemannin geometria	27
5.1	Geodeesit	31
5.2	Hyperbolinen geometria	32
5.3	Geodeesit ja sektionaalinen kaarevuus	35
6	Yleinen suhteellisuusteoria	35
6.1	Suppeampi suhteellisuusteoria	36
6.2	Ekvivalenssiperiaate	37
6.3	Schwarzschildin metriikka	37
6.4	Suhteellinen taivaan mekaniikka	39
7	Gauss-Bonnet'n lause	42
7.1	Gauss-Bonnet'n kaava	42
7.2	Gauss-Bonnet'n lause	44
7.3	Gaussin kuvaus pinnalla avaruudessa \mathbb{R}^3	45
7.4	Hyperpinnan Gaussin kuvaus	46
7.5	Gauss-Bonnet-Chern lause	47
7.6	Yhdensuuntaissiirto	47
8	Geodeesit ja globaali geometria	49
8.1	Eksponentiaalinen kuvaus	49

8.2	Liittopisteet ja Jacobin kentät	51
8.3	Leikkauspisteet ja injektiivisyysäde	53
8.4	Bonnet'n lause	54

Johdanto

Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866) piti vuonna 1854 virkaanastujaisluentonsa Göttingenin yliopistossa. Luento käsitteli Geometrian perushypoteeseja. Se esitteli geometrian globaalina kaikenlaisten avaruuksien moniulotteisten monistojen tutkimuksena. Riemannin mielestä geometrian ei välttämättä ole edes tutkittava tavallisella tavalla tulkittuja pisteitä, suoria tai avaruuksia, vaan $n:n$ luvun järjestettyjä joukkoja, joita yhdistellään tiettyjen sääntöjen mukaan. [1]

Riemannin geometrian pääkäsite on *kaarevuus*. Se kuvaa suuntavektorin \mathbf{T} muutoksen suuruutta (Kuva 1). Kaarevuus on suuri terävissä kaarissa ja nolla suorilla.



Kuva 1: Kaarevuus κ on määritelty suuntavektorin \mathbf{T} muutoksen suuruutena.

Kaksiulotteisilla pinnoilla kaarevuuksia voi olla eri suuruisia ja eri suuntiin. Suurinta ja pienintä kaarevuutta kutsutaan *pääkaarevuuksiksi* κ_1 ja κ_2 . Näiden avulla voidaan määrittää *keskikaarevuus* $H = \kappa_1 + \kappa_2$ ja *Gaussin kaarevuus* $G = \kappa_1 \kappa_2$.

Koska kaarevuudet κ_1 ja κ_2 mittaavat kuinka paljon pinta kaareutuu avaruudessa, niin niitä ei voida mitata pinnalta käsin. Näin ollen ne ovat *ulkoisia* ominaisuuksia. Gaussin kaarevuus voidaan mitata pinnalta käsin välittämättä ympäröivästä avaruudesta \mathbf{R}^n . Tätä tulosta kutsutaan *Gaussin Lause Theorema Egregiumiksi*, jo-

ka sanoo, että Gaussin kaarevuus on *sisäinen*.

m -ulotteisilla hyperpinnoilla avaruudessa \mathbf{R}^{m+1} on m kappaletta pääkaarevuuk-
sia $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ jokaisessa pisteessä. m -ulotteiselle pinnalle avaruudessa \mathbf{R}^n tilanne on
vielä monimutkaisempi, sillä se kuvataan toisella perustensorilla.

Aloitetaan määrittämällä ulkoiset määritelmät *toiselle perustensorille* ja *Rie-
mannin kaarevuustensorille*. Myöhemmin selviää myös, että Riemannin kaarevuus-
tensori on sisäinen.

Tämä tutkielma perustuu suurimmaksi osaksi Frank Morganin kirjaan *Rieman-
nian Geometry, A Beginners Guide* [9].

1 Käyrät avaruudessa \mathbf{R}^n

Määritelmä 1.1. Olkoon $I = [a, b] \subset \mathbf{R}$ ja $A \subset \mathbf{R}^n$. *Parametrisoitu käyrä* eli *polku* on jatkuva kuvaus $\mathbf{x} : I \rightarrow A$. [10]

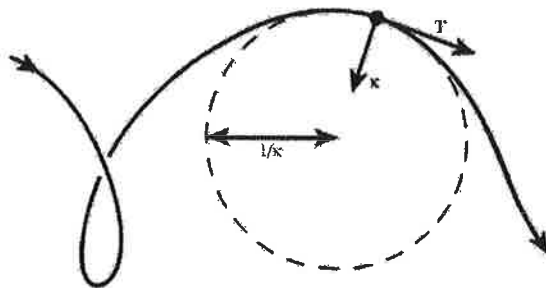
Parametrisoidulle käyrälle $\mathbf{x}(t) \in \mathbf{R}^n$, varustettuna nopeudella $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}}$ ja yksikkötangenttivektorilla $\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$, *kaarevuusvektori* $\boldsymbol{\kappa}$ on määritelty yksikkötangenttivektorin \mathbf{T} muutoksen suhteena kaaren pituuteen

$$\boldsymbol{\kappa} = d\mathbf{T}/ds = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{1}{|\mathbf{v}|} \dot{\mathbf{T}}. \quad (1.1)$$

Kaarevuusvektori $\boldsymbol{\kappa}$ osoittaa suuntaa, johon \mathbf{T} kääntyy ($\boldsymbol{\kappa}$ ja \mathbf{T} ovat ortogonaaliset eli kohtisuorassa toisiaan vastaan). Kaarevuusvektorin $\boldsymbol{\kappa}$ pituus, *skalaarikaarevuus*, $\kappa = |\boldsymbol{\kappa}|$ antaa kääntymisen suuruuden (Kuva 2.). Tason käyrälle, varustettuna yksikkönormaalivektorilla \mathbf{n} , pätee

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{n}}{ds} \right|. \quad (1.2)$$

Jos käyrä on a -säteinen ympyrä, niin kaikilla ympyrän pisteillä $\boldsymbol{\kappa}$ osoittaa kohti ympyrän keskipistettä ja $\kappa = 1/a$. Ympyrän sädettä $1/\kappa$ kutsutaan *kaarevuussäteeksi*.



Kuva 2: Kaarevuusvektori $\boldsymbol{\kappa}$ kertoo, mihin suuntaan tangenttivektori \mathbf{T} kääntyy ja kuinka nopeasti. Sen pituus $|\boldsymbol{\kappa}|$ on kääntäen verrannollinen sen ympyrän säteeseen, jolla on sama yksikkötangenttivektori pisteessä p .

Jos käyrä on parametrisoitu kaaren pituuden avulla, niin silloin kaarevuusvektori $\boldsymbol{\kappa}$ on yhtä suuri kuin $d^2\mathbf{x}/ds^2$. Jos käyrä on funktion $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{n-1}$ graafi, missä $y = f(x)$, ja joka on tangentiaalinen x -akselin kanssa origossa, niin silloin

$$\boldsymbol{\kappa}(0) = f''(0) \in \mathbf{R}^{n-1} \subset \mathbf{R} \times \mathbf{R}^{n-1}. \quad (1.3)$$

Ilman tangentin oletusta skalaarikaarevuus on

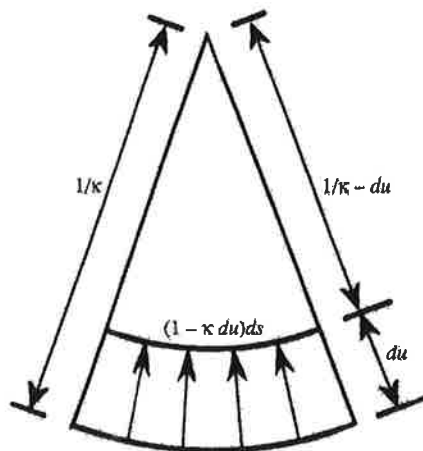
$$\kappa(0) = |f''(0)| / (1 + |f'(0)|^2)^{3/2}. \quad (1.4)$$

Kaarevuus kertoo kuinka käyrän pituus muuttuu, kun käyrän muoto muuttuu. Jos infinitesimaalinen pala tason käyrää ds siirretään etäisyydelle du suuntaan κ , niin pituus muuttuu tekijällä $1 - \kappa du$. Alkuperäinen kaari sijaitsee ympyrällä, jonka säde on $1/\kappa$, ja uusi kaari ympyrällä, jonka säde on

$$1/\kappa - du = (1/\kappa)(1 - \kappa du)$$

(Kuva 3.). Yleisemmin jos siirtovektori on du , (mutta ei välttämättä suuntaan κ , vain siirtovektorin du komponentti suuntaan κ on tärkeä) niin pituus muuttuu tekijällä $1 - \kappa \cdot du$. Siitä johtuu, että käyrän $C \subset \mathbf{R}^n$ pituuselementin muutos siirrossa, varustettuna alkunopeudella $\mathbf{V} = du/dt$, on

$$- \int \kappa \cdot \mathbf{V} ds.$$



Kuva 3: Kun kaaren pituuden osa ds työnnetään suuntaan κ , muuttuu pituus tekijällä $1 - \kappa du$.

Esimerkki 1.2. Määritetään heliksin (eli spiraalin)

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (a \cos t, a \sin t, ht/2\pi)$$

kaarevuus.

Nopeusvektori on

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{x}} = (-a \sin t, a \cos t, h/2\pi),$$

ja skalaarinopeus on

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}| = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = c.$$

Näin ollen tangenttivektoriksi saadaan

$$\mathbf{T} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| = \mathbf{v}/c.$$

Nyt kaavalla (1.1) saadaan kaarevuusvektoriksi

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{ds/dt} = \frac{\dot{\mathbf{v}}/c}{c} = \frac{1}{c^2}(-a \cos t, -a \sin t, 0).$$

Heliksin skalaarikaarevuus on

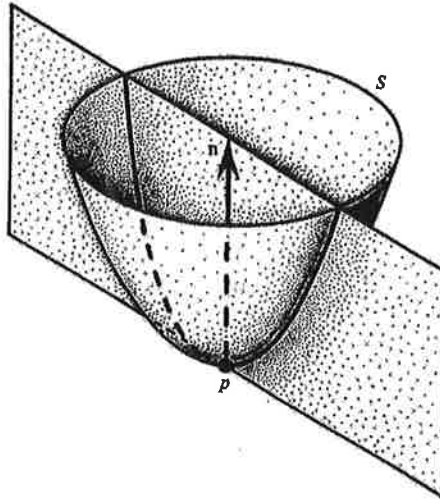
$$\kappa = \frac{a}{c^2}.$$

2 Pinnat avaruudessa \mathbf{R}^3

Määritelmä 2.1. Olkoon X ja Y topologisia avaruuksia ja $f : X \rightarrow Y$. Jos f on bijektio sekä f ja funktion f käänteiskuvaus f^{-1} jatkuvia, niin f on homeomorfismi [2].

Avaruuden \mathbf{R}^3 yhtenäinen pistejoukko S on *pinta*, jos jokaista pistettä $p \in S$ vastaa pisteen p sisältävä osajoukko Y , joka on homeomorfinen jonkun tasoalueen X kanssa [5]. Kaksi kertaa jatkuvasti differentioituvia pintoja sanotaan C^2 -pinnoiksi. Tämä kappale käsittelee kaarevuutta C^2 -pinnoilla $S \subset \mathbf{R}^3$ pisteessä $p \in S$. Olkoon *tangenttiavaruus* (tai *tangenttitaso*) $T_p S$ ne vektorit, jotka ovat tangentteja pinnalle S pisteessä p . Olkoon \mathbf{n} yksikkönormaalivektori pinnalle S pisteessä p . Leikataan S tasoilla, jotka sisältävät yksikkönormaalivektorin \mathbf{n} , jolloin voidaan määrätä kaarevuusvektori $\boldsymbol{\kappa}$ tason ja pinnan S leikkauskäyristä (Kuva 4.). Tietenkin jokainen tällainen $\boldsymbol{\kappa}$ pitää olla yksikkönormaalin \mathbf{n} monikerta eli $\boldsymbol{\kappa} = \kappa \mathbf{n}$.

Valitaan ortonormaalit koordinaatit avaruudessa \mathbf{R}^3 siten, että origo on pisteessä p ja pinta S on xy -tason suuntainen pisteessä p . Valitaan vielä yksikkönormaalivektori \mathbf{n} siten, että \mathbf{n} osoittaa positiivisen z -akselin suunnan. Paikallisesti S on funktion $z = f(x, y)$ kuvaaja. Mikä tahansa yksikkövektori \mathbf{v} , joka on tangentti pinnalle S pisteessä p , virittää yhdessä yksikkönormaalin \mathbf{n} kanssa tason, jonka



Kuva 4: Pinnan S kaarevuus pisteessä p mitataan pinnan ja tason leikkauksien kaarevuuksilla.

leikatessa pinnan S muodostuu leikkauskuvioista käyrä. Tämän käyrän kaarevuus κ , jota kutsutaan kaarevuudeksi suunnassa \mathbf{v} , on toinen derivaatta

$$\kappa = (D^2 f)_p(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \equiv \mathbf{v}^t \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(p) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(p) \end{bmatrix} \mathbf{v}. \quad (2.1)$$

Esimerkiksi, jos

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$

niin

$$\kappa = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}.$$

Bilineaarimuotoa $(D^2 f)_p$ tangentialiavuudessa $T_p S$ kutsutaan pinnan S *toiseksi perusmuodoksi* Π pisteessä p , joka annettuna symmetrisenä 2×2 matriisina on muotoa

$$\Pi = D^2 f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

Tämä kaava pätee vain siinä tapauksessa, missä pinta on xy -tason suuntainen. Toiselle perusmuodolle käytetään aina ortonormaaleja koordinaatteja.

Koska Π on symmetrinen, voidaan valita koordinaatit x ja y siten, että Π on diagonaalinen, toisin sanoen

$$\Pi = \begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}. \quad (2.3)$$

Silloin kaarevuus κ suuntaan $\mathbf{v} = (\cos \theta, \sin \theta)$ on Eulerin kaavalla (1760) annettuna

$$\kappa = \Pi(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \mathbf{v}^T \Pi \mathbf{v} = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta. \quad (2.4)$$

Tämä on painotettu keskiarvo kaarevuuksista κ_1 ja κ_2 . Suurimmat ja pienimmät kaarevuudet ovat κ_1 ja κ_2 , jotka ovat ortogonaalisiin suuntiin. Nämä on valittu x - ja y -akseleiksi.

Määritelmä 2.2. Pisteessä p pinnalla $S \subset \mathbf{R}^3$ toisen perusmuodon Π ominaisarvoja κ_1, κ_2 kutsutaan *pääkaarevuuksiksi*, ja vastaavia ominaisvektoreita (yksikäsitteisesti määriteltä, paitsi tapauksessa $\kappa_1 = \kappa_2$) *pääsuunniksi* tai kaarevuussuunniksi. Toisen perusmuodon Π jälkeä, $\kappa_1 + \kappa_2$, kutsutaan *keskikaarevuudeksi* H . Toisen perusmuodon Π determinanttia, $\kappa_1 \kappa_2$, kutsutaan *Gaussin kaarevuudeksi* G .

Huomautus. Toisen perusmuodon Π ja keskikaarevuuden H merkit, mutta ei Gaussin kaarevuuden G , riippuvat yksikkönormaanin \mathbf{n} valinnasta. Keskikaarevuus voidaan määrittellä joskus myös kaavalla

$$\frac{1}{2} \text{jälki } \Pi = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2}.$$

Kun kaarevuus κ antoi käyrän pituuden muutoksen, niin keskikaarevuus H antaa pinnan pinta-alan muutoksen.

Määritelmä 2.3. Useamman muuttujan sisältävän funktion muutosta kutsutaan *suunnatuksi derivaataksi*, joka riippuu muutoksen suunnasta. Pinnan pinta-alan S muutoksen suuruutta kutsutaan *ensimmäiseksi variaatioksi* $\delta^1(S)$, joka riippuu alkunopeudesta \mathbf{V} . $\delta^1(S)$ on määriteltä asettamalla

$$\frac{d}{dt} \text{pinta-ala}(S + tV)|_{t=0}$$

tai

$$\frac{d}{dt} \text{pinta-ala}(f_t(S))|_{t=0},$$

missä f_t on mikä tahansa avaruuden C^3 -deformaatio, jolla on alkunopeus \mathbf{V} pinnalla S . ($\delta^1(S)$ riippuu vain alkunopeudesta \mathbf{V} ja on lineaarinen vektorikentässä \mathbf{V} .)

Lause 2.4. Olkoon S C^2 -pinta avaruudessa \mathbf{R}^3 . Pinnan S pinta-alan ensimmäinen variaatio pinnan S kompaktisti tuetun C^2 -vektorikentän \mathbf{V} suhteen on annettu integraalina vektorikentän \mathbf{V} ja keskikaarevuuden pistetulosta

$$\delta^1(S) = - \int_S \mathbf{V} \cdot H\mathbf{n}.$$

Todistus. Koska kaava on lineaarinen vektorivaruudessa \mathbf{V} , voimme käsitellä tangentiaaliset variaatiot ja normaalivariaatiot erikseen. Tangentiaalisille variaatioille, jotka vastaavat pinnan liu'untaa itseään vastaan, on $\delta^1(S) = 0$. Olkoon $V\mathbf{n}$ normaalivariaatio, ja oletetaan infitesimaalinen neliö pinta-alaltaan $dxdy$ pisteeseen p , mistä voidaan olettaa pääsuuntien osoittavan pitkin akseleita. Ensimmäiselle kertaluvulle, uusi infitesimaalinen pinta-ala on

$$(1 - V\kappa_1)dx(1 - V\kappa_2)dy \approx (1 - VH)dxdy = (1 - \mathbf{V} \cdot H\mathbf{n})dxdy.$$

Kaava seuraa. □

Huomautus. Fysikaalinen pinta, kuten saippuakalvo, lähtisi liikkumaan positiivisen pääkaarevuuden normaalin suuntaan kasvattaakseen pinta-alaansa, ellei ulkopuolinen voima vaikuta siihen. Saippuakuplan pääkaarevuus tasapainotilassa on suhteessa paine-eroihin sen halki.

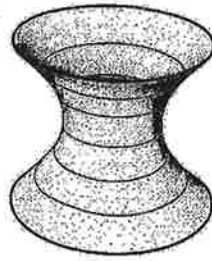
2.1 Minimipinnat

Lauseesta 2.4 seuraa, että pinta-alaa minivoivalla pinnalla, jolle pinta-ala on pienempi kuin pinnoilla, joilla on sama reuna, täytyy olla häviävän pieni keskikaarevuus. Mitä tahansa pintaa, jonka keskikaarevuus on 0, kutsutaan *minimipinnaksi*.

Esimerkki 2.5. *Katenoidi* on pinta, joka syntyy, kun ns. ketjukäyrä $x = a \cosh(z/a)$ pyörähtää z -akselin ympäri (Kuva 5.). Paitsi pyörähdyspinta, on katenoidi samalla myös minimipinta, sillä sen keskikaarevuus on nolla. Lisäksi katenoidi on ainoa pinta, jolla on nämä molemmat ominaisuudet. Tarkemmin: jos yhtenäinen pinta on sekä minimipinta että pyörähdyspinta, on se joko tason tai katenoidin osajoukko. [6]

2.2 Koordinaatit, pituus, metriikka

Paikalliset koordinaatit tai parametrit u_1 ja u_2 C^2 -pinnoilla $S \subset \mathbf{R}^3$ ovat varustettu C^2 -diffeomorfismilla (tai parametrisoinnilla) u_1u_2 -tason ja pinnan S osan välillä.



Kuva 5: Katenoidi on minimipinta.

Esimerkiksi standardien pallokoordinaattien φ ja θ avulla voidaan ilmoittaa paikalliset koordinaatit pallopinnalla säteellä a origosta, paitsi navoilla (missä pituusaste θ on määrittelemätön ja φ ei ole differentioituva). Paikkavektori määriteltynä näillä koordinaateilla on

$$\mathbf{x} = (x, y, z) = (a \sin \varphi \cos \theta, a \sin \varphi \sin \theta, a \cos \varphi).$$

Yleisesti paikka on koordinaattien u_i jokin funktio. Pitkin käyrää nämä koordinaatit ovat vuorotellen yhden parametrin t funktioita.

Merkitään alaindeksillä paikkavektorissa \mathbf{x} osittaisderivaatta parametrin u_i suhteen eli

$$\mathbf{x}_i = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} = \left(\frac{\partial x}{\partial u_i}, \frac{\partial y}{\partial u_i}, \frac{\partial z}{\partial u_i} \right)$$

Pisteellä merkitään derivointia parametrin t suhteen eli

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \sum \mathbf{x}_i \dot{u}_i \quad (\text{Ketjusääntö}).$$

Käyrän kaaren pituus pinnalla varustettuna koordinaateilla $u(t)$ on muotoa

$$\begin{aligned} L &= \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{x}}| dt = \int_{t_0}^{t_1} |\mathbf{x}_1 \dot{u}_1 + \mathbf{x}_2 \dot{u}_2| dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1) \dot{u}_1^2 + 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \dot{u}_1 \dot{u}_2 + (\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2) \dot{u}_2^2} dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\sum g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j} dt, \end{aligned} \quad (2.5)$$

missä

$$g_{ij} \equiv \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j}. \quad (2.6)$$

Toisin sanoen $L = \int ds$, missä

$$ds^2 = \sum g_{ij} du_i du_j. \quad (2.7)$$

Esimerkiksi pallopinnalla, jonka säde on a , on $L = \int ds$, missä

$$ds^2 = a^2 d\varphi^2 + a^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 = (a^2 \dot{\varphi} + a^2 \sin^2 \varphi \dot{\theta}) dt^2,$$

joten $g_{11} = a^2$, $g_{22} = a^2 \sin^2 \varphi$, ja $g_{12} = g_{21} = 0$.

Matriisia $g = [g_{ij}]$ kutsutaan *ensimmäiseksi perusmuodoksi* tai *metriikaksi*. Se on sisäinen suure, koska se on yhteydessä mittauksiin pinnan sisäpuolella. Pituuden kaavassa summamerkintä on

$$\begin{aligned} \sum g_{ij} \dot{u}_i \dot{u}_j &= g_{11} \dot{u}_1 \dot{u}_1 + g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{21} \dot{u}_2 \dot{u}_1 + g_{22} \dot{u}_2 \dot{u}_2 \\ &= g_{11} \dot{u}_1^2 + 2g_{12} \dot{u}_1 \dot{u}_2 + g_{22} \dot{u}_2^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Monelle pinnalle avaruudessa \mathbf{R}^3 on sopivaa käyttää paikallisina koordinaatteina parametreja x ja y sekä ilmoittaa z näiden avulla eli $z(x, y)$. Silloin

$$\mathbf{x}_1 = (1, 0, z_x) \quad \text{ja} \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, z_y).$$

Lause 2.6. Millä tahansa paikallisilla koordinaateilla u_1 ja u_2 pisteessä p C^2 -pinnalla avaruudessa \mathbf{R}^3 , toinen perusmuoto II pisteessä p on

$$g^{-1}(D^2\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \equiv g^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{n} \\ \mathbf{x}_{21} \cdot \mathbf{n} & \mathbf{x}_{22} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix},$$

missä

$$\mathbf{x}_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_i \partial u_j} \quad \text{ja} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|}.$$

Siitä seuraa, että

$$\begin{aligned} H &= \text{jälki } g^{-1}(D^2\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} \\ &= \frac{\mathbf{x}_2^2 \mathbf{x}_{11} - 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \mathbf{x}_{12} + \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_{22}}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2} \cdot \mathbf{n}, \end{aligned} \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} G &= \det(g^{-1}(D^2\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}) \\ &= \frac{(\mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}_{22} \cdot \mathbf{n}) - (\mathbf{x}_{12} \cdot \mathbf{n})^2}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Ennen Lauseen 2.6 todistusta huomioidaan, että

(A) Jos H ja G on annettu, voidaan ratkaista pääkaarevuudet:

$$\kappa = \frac{H \pm \sqrt{H^2 - 4G}}{2}. \quad (2.11)$$

(B) Jos pinta on graafi $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))$, niin

$$H = \frac{(1 + f_y^2)f_{xx} - 2f_x f_y f_{xy} + (1 + f_x^2)f_{yy}}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}, \quad (2.12)$$

$$G = \frac{f_{xx}f_{yy} - f_{xy}^2}{(1 + f_x^2 + f_y^2)^2}. \quad (2.13)$$

Todistus. Voidaan olettaa, että pinta S on tangentiaalinen xy -tasoa vastaan pisteessä $p = 0$. Näin ollen S on paikallisesti graafi $z = f(x, y)$ alkuoletuksilla $f_x(0) = f_y(0) = 0$ ja $\mathbf{n}(0) = (0, 0, 1)$. Erityisesti paikallisille koordinaateille x, y pätee

$$\mathbf{x} = (x, y, f(x, y)), \quad g(0) = I.$$

Lause 2.6 sanoo, että II on muotoa

$$\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix}_0.$$

Nyt olkoon u_1 ja u_2 mitkä tahansa paikalliset koordinaatit, ja olkoon J Jacobin matriisi nollassa eli

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{bmatrix}_0$$

Koska

$$\frac{\partial z}{\partial u_1} \Big|_0 = \frac{\partial z}{\partial u_2} \Big|_0 = 0,$$

niin

$$g = J^T J.$$

Silloin ketjusäännön perusteella, koska $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial x} \cdot \mathbf{n} = 0$ ja $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial y} \cdot \mathbf{n} = 0$, niin

$$g^{-1}(D^2 \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n} = (J^T J)^{-1} J^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x^2} \cdot \mathbf{n} & \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x \partial y} \cdot \mathbf{n} \\ \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial x \partial y} \cdot \mathbf{n} & \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial y^2} \cdot \mathbf{n} \end{bmatrix} J = J^{-1} II J,$$

joka on sama kuin II . □

Esimerkki 2.7. Määritetään graafin

$$z = f(x, y) = x + 2x^2 + 3y^2$$

pääkaarevuudet κ_1, κ_2 , Gaussin kaarevuus G ja keskikaarevuus H origossa.

Koska xy -taso ei ole tangenttitaso pinnalle pisteessä $\mathbf{0}$, niin käytetään kaavoja (2.12) ja (2.13). Kaava (2.12) antaa keskikaarevuuden graafille $\mathbf{x} = (x, y, f(x, y))$ eli

$$\begin{aligned} H &= \frac{(1 + (6y)^2) \cdot 4 - 2 \cdot (4x + 1) \cdot 6y \cdot 0 + (1 + (4x + 1)^2) \cdot 6}{(1 + (4x + 1)^2 + (6y)^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(1 + (6y)^2) \cdot 4 + (1 + (4x + 1)^2) \cdot 6}{(1 + (4x + 1)^2 + (6y)^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Pisteessä $\mathbf{0}$ keskikaarevuudeksi saadaan siis $H = 4\sqrt{2}$.

Vastaavasti Gaussin kaarevuus voidaan laskea kaavalla (2.13) eli

$$G = \frac{4 \cdot 6 - 0^2}{(1 + (4x + 1)^2 + (6y)^2)^2} = \frac{24}{(1 + (4x + 1)^2 + (6y)^2)^2}.$$

Pisteessä $\mathbf{0}$ Gaussin kaarevuus on $G = 6$.

Pääkaarevuudet κ_1 ja κ_2 saadaan kaavalla (2.11) eli

$$\kappa = \frac{4\sqrt{2} \pm \sqrt{(4\sqrt{2})^2 - 4 \cdot 6}}{2},$$

josta

$$\kappa_1 = \sqrt{2} \quad \text{ja} \quad \kappa_2 = 3\sqrt{2}.$$

Esimerkki 2.8. Määritetään katenoidin $\sqrt{x^2 + y^2} = \cosh z$ kaarevuus. Muuttujina käytetään parametria z ja napakoordinaattia θ . Katenoidin yhtälön mukaan $r = \cosh z$. Siis

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x, y, z) = (\cosh z \cos \theta, \cosh z \sin \theta, z) \\ \mathbf{x}_1 &= (\sinh z \cos \theta, \sinh z \sin \theta, 1) \\ \mathbf{x}_2 &= (-\cosh z \sin \theta, \cosh z \cos \theta, 0) \\ \mathbf{x}_{11} &= (\cosh z \cos \theta, \cosh z \sin \theta, 0) \\ \mathbf{x}_{12} &= (-\sinh z \sin \theta, \sinh z \cos \theta, 0) \\ \mathbf{x}_{22} &= (-\cosh z \cos \theta, -\cosh z \sin \theta, 0) \\ \mathbf{n} &= \frac{(\cos \theta, \sin \theta, \sinh z)}{\cosh z}. \end{aligned}$$

Lauseen 2.6 perusteella

$$H = \frac{\cosh^2 z \mathbf{x}_{11} - 0 + \cosh^2 z \mathbf{x}_{22}}{\text{jotakin}} \cdot \mathbf{n} = 0,$$

joten katenoidi on minimaalinen pinta ja $\kappa_1 = -\kappa_2$. Lisäksi

$$G = \frac{(1)(-1) - 0}{\cosh^2 z \cosh^2 z - 0} = -\cosh^{-4} z.$$

Siitä johtuen $\kappa_1 = -\kappa_2 = \cosh^{-2} z$.

Lause 2.9. (Gaussin Lause Theorema Egregium.) Gaussin kaarevuus G on sisäinen. Erityisesti, on olemassa paikalliset koordinaatit u_1 ja u_2 missä tahansa pisteessä p C^3 -pinnalla S avaruudessa \mathbf{R}^3 , joille ensimmäinen perusmuoto g pisteessä p on I ensimmäiseen järjestykseen. Missä tahansa tällaisessa koordinaattisysteemissä, Gaussin kaarevuus on

$$G = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2}.$$

Huomautus. $G = I$ ensimmäiseen järjestykseen tarkoittaa, että $g_{11}(p) = g_{22}(p) = 1$, $g_{12}(p) = 0$, ja jokainen

$$g_{ij,k}(p) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial u_k}(p) = 0.$$

Todistus. Paikallisesti S on funktion f graafi yli sen tangenttitason. Ortonormaalit koordinaatit tangenttitasolla tekee metriikan g yhtäsuureksi kuin I ensimmäiseen järjestykseen. Voimme olettaa, että S on tangentiaalinen xy -tasoa vastaan pisteessä $p = 0$. Käyttämällä x - ja y -koordinaatteja on

$$g = \begin{bmatrix} 1 + f_x^2 & f_x f_y \\ f_x f_y & 1 + f_y^2 \end{bmatrix}$$

ja nollassa voidaan laskea

$$\frac{\partial g_{12}}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial y^2} = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 = \det D^2 f = \det II = G.$$

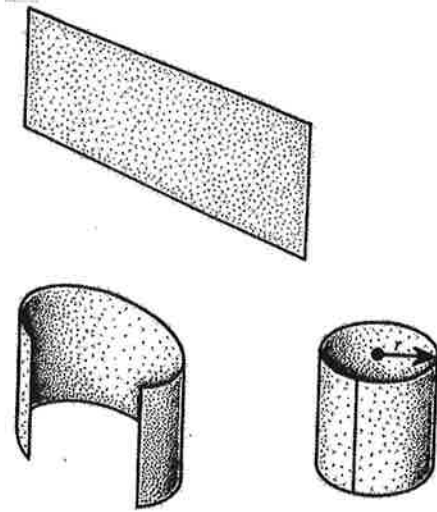
Mitkä tahansa koordinaatit, joille metriikka pisteessä p on I ensimmäiseen järjestykseen, ovat samat kuin ortonormaalit koordinaatit tangenttitasolla ensimmäiseen järjestykseen ja siitä johtuen tuottavat saman lopputuloksen. \square

Gaussin "Theorema Egregium" sanoo, että Gaussin kaarevuus G ei muutu, jos pinnan kaarevuutta muutetaan. Jos esimerkiksi taso taivutetaan lieriöksi tai kartioksi, niin Gaussin kaarevuus ei muutu [8] (Kuva 6.).

3 Pinnat avaruudessa \mathbf{R}^n

Tämä kappale osoittaa, kuinka kaarevuuden teoria pisteessä p kaksiulotteisella pinnalla S laajenee avaruudesta \mathbf{R}^3 avaruuteen \mathbf{R}^n . Kuten aiemminkin, valitaan ortonormaalit koordinaatit avaruudessa \mathbf{R}^n siten, että origo on pisteessä p ja S on $x_1 x_2$ -tason suuntainen pisteessä p . Paikallisesti S on funktion f

$$f : T_p S \rightarrow T_p S^\perp$$



Kuva 6: Rullaamalla tason pala lieriöksi, jolla on säde r , muuttuu pääkaarevuudet arvoista 0 ja 0 arvoihin $1/r$ ja 0. Samalla muuttuu keskikaarevuus, $H = \kappa_1 + \kappa_2$, arvosta 0 arvoon $1/r$. Gaussin kaarevuus säilyy vakiona eli $G = \kappa_1\kappa_2 = 0$, kuten Gaussin Theorema Egregium takaa.

kuvaaja. Mikä tahansa yksikkövektori v , joka on tangentiaalinen pintaa S vastaan pisteessä p , yhdessä pinnan S pisteestä p lähtevien normaalivektoreiden kanssa, virittää hypertason, joka leikkaa pinnan S . Leikkauskuvioista muodostuu käyrä. Tämän käyrän kaarevuusvektori κ , jota kutsutaan kaarevuudeksi suunnassa v , on toinen derivaatta

$$\kappa = (D^2 f)_p(v, v).$$

(Vaihdetaan merkintä \mathbf{v} merkintään v lähteen [9] merkintöjä seuraten.)

Bilineaarista muotoa $(D^2 f)_p$ tangentialiavaruudessa $T_p S$ yhdessä normaaliavaruuden $T_p S^\perp$ arvojen kanssa kutsutaan *toiseksi perustensoriksi* Π pisteessä p pinnalla S . Tämä muoto annetaan koordinaatteina symmetrisenä 2×2 -matriisina yhdessä normaaliavaruuden $T_p S^\perp$ sisätulojen kanssa eli

$$\Pi = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}.$$

Tämä kaava pätee vain pisteelle, jossa pinta on tangentiaalinen $x_1 x_2$ -tasoa vastaan. Jos $n = 3$, niin toinen perustensori on vain toinen perusmuoto kertaa yksikkönormaali \mathbf{n} .

Yleensä tätä matriisia ei voida operoida diagonaaliseen muotoon, jotta saataisiin pääkaarevuudet. Toisen perustensorin II jälkeen, $a_{11} + a_{22} \in T_p S^\perp$, kutsutaan keskikaarevuusvektoriksi \mathbf{H} . (Jos $n = 3$, niin $\mathbf{H} = H\mathbf{n}$.) Skalaarisuuretta $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{12}$ kutsutaan Gaussin kaarevuudeksi G . Kumpikaan suureista \mathbf{H} ja G ei riipu ortonormaalien koordinaattien valinnasta.

Olkoon G_i Gaussin kaarevuus projektiosta $S_i \subset S$ avaruuteen

$$\mathbf{R}_1 \times \mathbf{R}_2 \times \{0\} \cdots \times \mathbf{R}_i \times \cdots \times \{0\} \equiv \mathbf{R}_i^3.$$

Silloin Gaussin kaarevuus G pinnalla S pisteessä p on

$$G = \sum_{i=3}^n G_i,$$

koska kahden vektorin pistetulo on vain summa niiden komponenttien tuloista.

Lause 3.1. *Olkoon S C^2 -pinta avaruudessa \mathbf{R}^n . Ensimmäinen variaatio pinnan S pinta-alasta pinnalla S kompaktisti tuetun C^2 -vektorikentän \mathbf{V} suhteen on annettu integraalina vektorikentän \mathbf{V} ja keskikaarevuusvektorin pistetulosta*

$$\delta^1(S) = - \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}$$

Todistus. Koska kaava on lineaarinen avaruudessa \mathbf{V} , voidaan käsitellä variaatiot suuntiin x_1, x_2, \dots erikseen. x_1 ja x_2 suuntiin, joka vastaa liu'untaa itseään vastaan, on $\delta^1(S) = 0$. Olkoon \mathbf{V} pieni variaatio suuntaan x_3 , ja ajatellaan infinitesimaalinen neliö $dx_1 dx_2$ pisteeseen p , missä voidaan olettaa, että toisen perusmuodon II komponentti x_3 on diagonaalinen

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & 0 \\ 0 & \kappa_2 \end{bmatrix}.$$

Infinitesimaalinen pinta-ala on

$$(1 \mp |\mathbf{V}| \kappa_1) dx_1 (1 \mp |\mathbf{V}| \kappa_2) dx_2 \approx (1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}) dx_1 dx_2.$$

Kaava seuraa. □

Paikallisten koordinaattien käsite ja ensimmäinen perusmuoto ulottuu ilman muutosta avaruudesta \mathbf{R}^2 avaruuteen \mathbf{R}^n . Samoin Lause 2.6 yleistyy seuraavasti:

Lause 3.2. Mille tahansa paikallisille koordinaateille u_1, u_2 pisteessä p C^2 -pinnalla S avaruudessa \mathbf{R}^n , toinen perustensori II pisteessä p on muotoa

$$g^{-1}P(D^2\mathbf{x}) \equiv g^{-1} \begin{bmatrix} P(\mathbf{x}_{11}) & P(\mathbf{x}_{12}) \\ P(\mathbf{x}_{21}) & P(\mathbf{x}_{22}) \end{bmatrix}, \quad (3.1)$$

missä P tarkoittaa projektiota normaaliavaruuteen $T_p S^\perp$ ja

$$\mathbf{x}_{ij} \equiv \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u_1 \partial u_j}.$$

Tästä seuraa, että

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \text{jälki } g^{-1}P(D^2\mathbf{x}) \\ &= P \frac{\mathbf{x}_2^2 \mathbf{x}_{11} - 2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) \mathbf{x}_{12} + \mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_{22}}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2} \end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned} G &= \det(g^{-1}P(D^2\mathbf{x})) \\ &= \frac{(P\mathbf{x}_{11}) \cdot (P\mathbf{x}_{22}) - (P\mathbf{x}_{12})^2}{\mathbf{x}_1^2 \mathbf{x}_2^2 - (\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2)^2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Huomautus. $T_p S^\perp$ ja siis P muuttuu pisteestä pisteeseen. Jos $T_p S^\perp$ on vain x_3, \dots, x_n -taso, niin silloin

$$P(a_1, a_2, a_3, a_4, \dots) = (0, 0, a_3, a_4, \dots).$$

Jos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ antavat ortogonaalisen kannan tangenttiavaruudelle $T_p S$, niin

$$P(\mathbf{w}) = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{w} \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2. \quad (3.4)$$

Jos $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ eivät ole ortogonaalisia, niin P ratkaistaan sijoittamalla termin \mathbf{x}_2 paikalle

$$\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1.$$

Esimerkki 3.3. Olkoon pinta

$$\{(w, z) \in \mathbf{C}^2 : w = e^z\}.$$

Koordinaatteina käytetään $x = \operatorname{Re} z$ ja $y = \operatorname{Im} z$. Silloin

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x, y, e^x \cos y, e^x \sin y) \\ \mathbf{x}_1 &= (1, 0, e^x \cos y, e^x \sin y) \\ \mathbf{x}_2 &= (0, 1, -e^x \sin y, e^x \cos y) \\ \mathbf{x}_{11} &= (0, 0, e^x \cos y, e^x \sin y) \\ \mathbf{x}_{12} &= (0, 0, -e^x \sin y, e^x \cos y) \\ \mathbf{x}_{22} &= (0, 0, -e^x \cos y, -e^x \sin y). \end{aligned}$$

Huomaa, että $\mathbf{x}_1^2 = \mathbf{x}_2^2 = 1 + e^{2x}$, $\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 0$. Näin ollen kaavalla (3.2) saadaan

$$\mathbf{H} = P \frac{(0, 0, 0, 0)}{(1 + e^{2x})^2} = \mathbf{0}.$$

Tämä on minimipinta.

Jotta G voidaan laskea, täytyy ensin ratkaista $P(\mathbf{x}_{ij})$. Koska $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ ovat ortogonaaliset, niin

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_{11}) &= \mathbf{x}_{11} - \frac{\mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{x}_1}{\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_1} \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_{11} \cdot \mathbf{x}_2}{\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{x}_2} \mathbf{x}_2 \\ &= \frac{(-e^{2x}, 0, e^x \cos y, e^x \sin y)}{1 + e^{2x}}. \end{aligned}$$

Samalla tavoin on

$$\begin{aligned} P(\mathbf{x}_{12}) &= \frac{(0, -e^{2x}, -e^x \sin y, e^x \cos y)}{1 + e^{2x}}, \\ P(\mathbf{x}_{22}) &= \frac{(e^{2x}, 0, -e^x \cos y, -e^x \sin y)}{1 + e^{2x}}. \end{aligned}$$

Siitä seuraa, että kaavalla (3.3) saadaan

$$G = \frac{(-e^{4x} - e^{2x}) - (e^{4x} + e^{2x})}{(1 + e^{2x})^2 [(1 + e^{2x})^2 - 0]} = -\frac{2e^{2x}}{(1 + e^{2x})^3}.$$

Gaussin Theorema Egregium saadaan samalla todistuksella kuin Lauseessa 2.9:

Lause 3.4. (Gaussin Lause Theorema Egregium.) G on sisäinen, annettuna paikallisilla koordinaateilla u_1 ja u_2 , missä $G = I$ ensimmäiseen järjestykseen kaavalla

$$G = \frac{\partial^2 g_{12}}{\partial u_1 \partial u_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{22}}{\partial u_1^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g_{11}}{\partial u_2^2}.$$

4 m -ulotteinen pinta avaruudessa \mathbf{R}^n

Tämä kappalee laajentaa teoriaa m -ulotteisille C^2 -pinnoille S avaruudessa \mathbf{R}^n . Kuten aiemminkin, valitaan ortonormaalit koordinaatit avaruudessa \mathbf{R}^n siten, että origo on pisteessä p ja pinta S on tangentiaalinen x_1, x_2, \dots, x_m -tasoa vastaan pisteessä p . Paikallisesti S on funktion f

$$f : T_p S \rightarrow T_p S^\perp$$

kuvaaja. Yksikkövektori v , joka on tangentiaalinen pinnan S kanssa pisteessä p , yhdessä pinnan S pisteessä p olevien normaalivektoreiden kanssa, virittää tason,

jonka leikkaus pinnan S kanssa on käyrä. Käyrän kaarevuusvektori κ , jota kutsutaan kaarevuudeksi suunnassa v , on toinen derivaatta

$$\kappa = (D^2 f)_p(v, v).$$

Bilineaarista muotoa $(D^2 f)_p$ tangentialavaruudessa $T_p S$, yhdessä normaaliavaruuden $T_p S^\perp$ arvojen kanssa, kutsutaan pinnan S pisteessä p *toiseksi perustensoriksi* \mathbf{II} . Annettuna koordinaateina $m \times m$ matriisina pinnan $T_p S^\perp$ sisääntuloilla varustettuna toinen perusmuoto on

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} \\ & \ddots & \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_m} & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_m^2} \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

Toisen perustensorin \mathbf{II} jälkeä kutsutaan *keskikaarevuusvektoriksi* \mathbf{H} . (Joskus määritellään myös $\mathbf{H} = (\text{jälki } \mathbf{II})/n$.)

Hyperpinnoille ($n = m + 1$), \mathbf{II} on vain yksikkönormaali \mathbf{n} kertaa skalaarimatriisi, ja sitä kutsutaan toiseksi perusmuodoksi sekä sille käytetään merkintää \mathbf{II} . $\mathbf{H} = H\mathbf{n}$, missä H on (*skalaari*) *keskikaarevuus*. Jos valitaan koordinaatit siten, että toinen perusmuoto on diagonaalinen,

$$\mathbf{II} = \begin{bmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_m \end{bmatrix},$$

niin silloin $H = \kappa_1 + \dots + \kappa_m$. Jos yksikkövektori $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_n)$ on laajennettu yksikkövektorikentän mukaan, niin silloin $\partial n_n / \partial x_n$, kun $1 \leq i \leq n - 1$, $\partial n_i / \partial x_i = -\kappa_i$ (vertaa kaavaan (1.2)). Siitä johtuu, että

$$H = - \sum_{i=1}^n \partial n_i / \partial x_i \equiv -\text{div } \mathbf{n}.$$

Jos hyperpinta on annettu tasolla $\{f(x_1, \dots, x_n) = c\}$, niin silloin $\mathbf{n} = \nabla f / |\nabla f|$, missä $\nabla f \equiv (\partial n_1 / \partial x_1, \dots, \partial n_n / \partial x_n)$, ja

$$H = -\text{div} \frac{\nabla f}{|\nabla f|}. \quad (4.2)$$

Lause 4.1. *Olkoon S m -ulotteinen C^2 -pinta avaruudessa \mathbf{R}^n . Ensimmäinen variaatio pinnan S pinta-alasta, ottaen huomioon kompaktisti tuettu C^2 -vektorikenttä \mathbf{V}*

pinnalla S , annetaan integraalina vektorikentän \mathbf{V} ja keskikaarevuuden pistetulon yli

$$\delta^1(S) = - \int_S \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}.$$

Todistus. Koska kaava on lineaarinen vektorikentässä \mathbf{V} , voidaan ajatella variaatioita suunnissa x_1, x_2, \dots, x_n erikseen. Suunnille x_1, \dots, x_m , jotka vastaavat liu'untaa pintaa itseään vasten, on $\delta^1(S) = 0$, kuten kaava sanoo. Olkoon \mathbf{V} pieni variaatio suunnassa x_j ($m < j \leq n$), ja ajatellaan infinitesimaalinen pinta-ala $dx_1 \cdots dx_m$ pisteessä p , missä voidaan olettaa, että toisen perusmuodon II komponentti x_j on diagonaalinen eli

$$\begin{bmatrix} \kappa_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \kappa_m \end{bmatrix}$$

Infinitesimaalinen pinta-ala on

$$(1 \mp |\mathbf{V}| \kappa_1) dx_1 \cdots (1 \mp |\mathbf{V}| \kappa_m) dx_m \approx (1 - \mathbf{V} \cdot \mathbf{H}) dx_1 \cdots dx_m.$$

Kaava seuraa. □

4.1 Sektionaalinen ja Riemannin kaarevuus

Määritelmä 4.2. Sektionaalinen kaarevuus K pinnalla S pisteessä p määrää jokaiselle 2-tasolle $P \subset T_p S$ 2-ulotteisen pinnan

$$S \cap (P \oplus T_p S^\perp)$$

Gaussin kaarevuuden.

Jos v ja w annetaan ortonormaalina kantana tasolle P , niin sen määritelmän nojalla sektionaalinen kaarevuus on

$$K(P) = \text{II}(v, v) \cdot \text{II}(w, w) - \text{II}(v, w) \cdot \text{II}(v, w). \quad (4.3)$$

Esimerkiksi, jos $\text{II} = [a_{ij}]$ ja $P = e_1 \wedge e_2$ on $x_1 x_2$ -taso, niin silloin sektionaalinen kaarevuus on

$$\begin{aligned} K(P) &= \text{II}(e_1, e_1) \cdot \text{II}(e_2, e_2) - \text{II}(e_1, e_2) \cdot \text{II}(e_1, e_2) \\ &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{12}. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Huomautus. Hyperpinnoille ($n = m + 1$), millä tahansa 2-tasolla $P = \sum p_{ij} e_i \wedge e_j$, jos valitaan koordinaatit, joille toinen perusmuoto on diagonaalinen eli

$$II = \begin{bmatrix} \kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \kappa_m \end{bmatrix},$$

niin silloin

$$K(P) = \sum_{i < j \leq m} p_{ij}^2 \kappa_i \kappa_j.$$

Siten mikä tahansa sektionaalinen kaarevuus $K(P)$ on 2-tasojen akselien $e_i \wedge e_j$ sektionaalisten kaarevuuksien $\kappa_i \kappa_j$ painotettu keskiarvo.

Kun $2 < m < n$, $\mathbf{R}^n \cong T_p S \times \mathbf{R}_1 \times \cdots \times \mathbf{R}_{n-m}$, olkoon S_i projektio pinnalta S pinnalle $T_p S \times \mathbf{R}_i$ varustettuna sektionaalisella kaarevuudella K_i . Silloin kaavan 4.3 mukaan pinnan S sektionaalinen kaarevuus K on $K = \sum K_i$.

m -dimensionaalisen pinnan S avaruudessa \mathbf{R}^n sektionaalinen kaarevuus voidaan laskea erikseen diagonisoimalla toisen perustensorin II $n - m$ komponentit, ottamalla painotettu keskiarvo jokaisen komponentin pääkaarevuuksien tuloista, ja summaamalla kaikki komponentit.

Jos $m = n - 1$, niin silloin II on symmetrinen bilineaarinen muoto, jota kutsutaan toiseksi perusmuodoksi. Sen ominaisarvoja $\kappa_1, \dots, \kappa_m$ kutsutaan pääkaarevuuksiksi. Koska $(D^2 f)_p$ on symmetrinen, joillakin ortonormaaleilla koordinaateilla se on diagonaalinen ja f saa muodon

$$f = \frac{\kappa_1 x_1^2}{2} + \frac{\kappa_2 x_2^2}{2} + \cdots + \frac{\kappa_m x_m^2}{2} + o(\mathbf{x}^2).$$

Yleisesti, jos $II = (a_{ij})$, niin silloin kaava 4.3 antaa

$$K(P) = \left(\sum a_{ik} v_i v_k \right) \cdot \left(\sum a_{jl} w_j w_l \right) - \left(\sum a_{jk} v_k w_j \right) \cdot \left(\sum a_{il} v_i w_l \right) \quad (4.5)$$

$$= \sum R_{ijkl} v_i w_j v_k w_l, \quad (4.6)$$

missä

$$R_{ijkl} = a_{ik} \cdot a_{jl} - a_{jk} \cdot a_{il} \quad (4.7)$$

ovat 2×2 toisen perusmuodon II alideterminantit, vastaten rivejä i, j ja sarakkeita k, l . Esimerkiksi, $R_{1234} = a_{13} \cdot a_{24} - a_{14} \cdot a_{23}$ tulee riveistä 1, 2 ja sarakkeista 3, 4 matriisista

$$II = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

$R_{1212} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$ on x_1, x_2 -tason sektionaalinen kaarevuus.

Termiä R kutsutaan *Riemannin kaarevuustensoriksi*. Kuten voidaan huomata Riemannin kaarevuustensori sisältää vain 2×2 alideterminantit toisesta perustensorista.

Vaihtamalla kaksi riviä tai saraketta Riemannin kaarevuustensorista alideterminantin merkki vaihtuu. Esimerkiksi

$$R_{jikl} = R_{ijlk} = -R_{ijkl} \quad (4.8)$$

ja

$$R_{klij} = R_{ijkl}, \quad (4.9)$$

koska Π on symmetrinen. Voidaan helposti tarkistaa kolmelle viimeiselle tapaukselle, että Bianchin ensimmäinen yhtälö pätee. Bianchin ensimmäinen yhtälö sanoo, että jos yhteys on symmetrinen, niin

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0 \quad (4.10)$$

[11].

Jotta saadaan määritelmä termille R ilman ortonormaaleiden koordinaattien valintaa pinnalla $T_p S$, on huomattava, että R on bilineaarinen muoto $\Pi \wedge \Pi$ pinnalla $\wedge^2 T_p S$. Jos $\{e_i\}$ antaa kannan pinnalle $T_p S$ siten, että $\{e_k \wedge e_l : k < l\}$ antaa kannan pinnalle $\wedge^2 T_p S$, niin silloin

$$\Pi \wedge \Pi(e_k \wedge e_l) \equiv \Pi(e_k) \wedge \Pi(e_l) = \left(\sum a_{rk} e_r \right) \wedge \left(\sum a_{sl} e_s \right),$$

ja

$$(e_i \wedge e_j) \cdot \Pi \wedge \Pi(e_k \wedge e_l) = a_{ik} \cdot a_{jl} - a_{jk} \cdot a_{il} = R_{ijkl}.$$

Kuten bilineaarinen muoto pinnalla $\wedge^2 T_p S$, R on ilmoitettu arvoilla $\zeta \cdot R(\zeta)$ yksikkö 2-vektoreille $\zeta \in \wedge^2 T_p S$. Itseasiassa R on määritetty sektionaalisilla kaarevuuksilla $P \cdot R(P)$ 2-ulotteisille tasoille.

Riccin kaarevuus Ric on bilineaarinen muoto pinnalla $T_p S$, ja se on määritelty eräänlaisena jälkenä Riemannin kaarevuudesta. Kuten matriisin $[c_{ij}]$ jälki on summa $\sum c_{ii}$, koordinaatit R_{jk} Riccin kaarevuudessa annetaan muodossa

$$R_{jl} = \sum_i R_{ijil}. \quad (4.11)$$

Jos R_{ijkl} on matriisi matriiseista

$$\begin{bmatrix} [R_{i1k1}] & [R_{i1k2}] & \cdots & [R_{i1km}] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ [R_{imk1}] & [R_{imk2}] & \cdots & [R_{imkm}] \end{bmatrix},$$

niin silloin R_{ji} on jälkiä vastaava matriisi. Näin ollen Riccin määritelmä bilineaarissa muodossa ei riipu ortonormaaleiden koordinaattien $T_p S$ valinnasta. Sen soveltaminen komponenttiin e_1 antaa summan akselitasojen, jotka sisältävät e_1 , sektionaalisista kaarevuuksista:

$$\begin{aligned} e_1 \cdot \text{Ric}(e_1) &= R_{11} = \sum_i R_{i1i1} = \sum_{i \neq 1} R_{i1i1} \\ &= \sum_{i=2}^m K(e_1 \wedge e_i). \end{aligned}$$

Siitä johtuu, että mille tahansa ortonormaalille kannalle v_1, \dots, v_m tangentialiavaruudessa $T_p S$, on

$$v_1 \cdot \text{Ric}(v_1) = \sum_{i=2}^m K(v_1 \wedge v_i), \quad (4.12)$$

ja mille tahansa yksikkövektorille $v \in T_p S$, on

$$v \cdot \text{Ric}(v) = \frac{m-1}{\text{vol } \mathbf{S}^{m-2}} \int_{w \perp v} K(v \wedge w). \quad (4.13)$$

$w \in T_p S$

Riccin kaarevuudella on tulkinta, että se on keskiarvo sektionaalisista kaarevuuksista.

Skalaarikaarevuus R on määritelty Riccin kaarevuuden jälkeenä:

$$R = \sum_i R_{ii}. \quad (4.14)$$

Mille tahansa ortonormaalille kannalle v_1, \dots, v_m tangentialiavaruudessa $T_p S$,

$$R = 2 \sum_{1 \leq i < j \leq m} K(v_i \wedge v_j) = \frac{m(m-1)}{\text{vol } \mathcal{P}} \int_{P \in \mathcal{P}} K(P), \quad (4.15)$$

missä \mathcal{P} on kaikkien tangentialiavaruuden $T_p S$ 2-tasojen joukko. Siten skalaarikaarevuus on verrannollinen sektionaalisten kaarevuuksien keskiarvoon pisteessä.

Huomautus. Historiallisesti Ric oli vastakkaismerkkinen. Jotkin kirjat antavat Riemannin kaarevuustensorille R_{ijkl} vastakkaisen merkin.

Esimerkki 4.3. Olkoon

$$y_1 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 5x_3^2,$$

$$y_2 = 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$$

3-ulotteinen pinta avaruudessa \mathbf{R}^5 .

a) Mikä on Π origossa?

Ratkaisu. Kaavalla (4.1) saadaan

$$\Pi = \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right]_0 = \begin{bmatrix} (2, 6) & (2, 0) & (0, 0) \\ (2, 0) & (2, 2) & (0, 2) \\ (0, 0) & (0, 2) & (10, 2) \end{bmatrix}.$$

b) Mikä on sektionaalinen kaarevuus x_1x_2 -tasolle?

Ratkaisu. Kaavalla (4.4) saadaan

$$\begin{aligned} K(e_1, e_2) &= \Pi(e_1, e_1) \cdot \Pi(e_2, e_2) - \Pi(e_1, e_2) \cdot \Pi(e_1, e_2) \\ &= (2, 6) \cdot (2, 2) - (2, 0) \cdot (2, 0) = 12. \end{aligned}$$

c) Mikä on sektionaalinen kaarevuus tasolle $x_1 + x_2 = 0$ ja tasolle $x_1 + x_2 + x_3 = 0$?

Ratkaisu. Yksi ortonormaalikanta tasolle $\{x_1 + x_2 = 0\}$ on $\frac{v=(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, $w = (0, 0, 1)$. Näin ollen kaavalla (4.5) saadaan sektionaaliseksi kaarevuudeksi

$$\begin{aligned} K &= \Pi(v, v) \cdot \Pi(w, w) - \Pi(v, w) \cdot \Pi(v, w) \\ &= \left(\sum a_{ik} v_i v_k \right) \cdot \left(\sum a_{jl} w_j w_l \right) - \left(\sum a_{jk} v_k w_j \right) \cdot \left(\sum a_{il} v_i w_l \right) \\ &= (0, 4) \cdot (10, 2) - (0, -\sqrt{2}) \cdot (0, -\sqrt{2}) = 6. \end{aligned}$$

Yksi ortonormaalikanta tasolle $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ on $v = \frac{(1,-1,0)}{\sqrt{2}}$, $w = \frac{(1,1,-2)}{\sqrt{6}}$. Kaavalla (4.5) saadaan tasolle keskikaarevuudeksi

$$K = 0.$$

d) Laske kaikki Riemannin kaarevuustensorin komponentit. Näiden avulla laske uudelleen vastaukset kohtiin b) ja c).

Ratkaisu. Riemannin kaarevuustensorin komponentit saadaan kaavalla (4.7)

$$R_{ijkl} = a_{ik} \cdot a_{jl} - a_{jk} \cdot a_{il}$$

eli

$$\begin{aligned} R_{1212} &= a_{11} \cdot a_{22} - a_{21} \cdot a_{12} \\ &= (2, 6) \cdot (2, 2) - (2, 0) \cdot (2, 0) \\ &= 12, \end{aligned}$$

$$R_{1213} = a_{11} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{13} = 12,$$

$$R_{1223} = a_{12} \cdot a_{23} - a_{12} \cdot a_{23} = 0,$$

$$R_{1313} = a_{11} \cdot a_{33} - a_{31} \cdot a_{13} = 32,$$

$$R_{1323} = a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{13} = 20,$$

$$R_{2323} = a_{22} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} = 20.$$

Koska II on symmetrinen, niin kaavan (4.8) mukaan saadaan loput Riemannin kaarevuustensorin komponentit

$$R_{1312} = R_{1213} = 12,$$

$$R_{2312} = R_{1223} = 0,$$

$$R_{2313} = R_{1323} = 20.$$

Tämän avulla lasketaan uudelleen kohdat b) ja c). Kohdassa b) lasketaan uudelleen sektionaalinen kaarevuus x_1x_2 -tasolle kaavalla (4.6)

$$\begin{aligned} K(P) &= \sum R_{ijkl} v_i w_j v_k w_l \\ &= R_{1212} = 12. \end{aligned}$$

c)-kohdassa tason $\{x_1 + x_2 = 0\}$ ortonormaalien kannan termit ovat $v_1 = -v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $w_3 = 1$, loput 0. Kaavalla (4.6) tason $\{x_1 + x_2 = 0\}$ sektionaaliseksi kaarevuudeksi saadaan

$$K = \frac{1}{2}R_{1313} - \frac{1}{2}R_{1323} - \frac{1}{2}R_{2313} + \frac{1}{2}R_{2323} = 6.$$

Tason $\{x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ ortonormaalien kannan komponentit ovat $v_1 = -v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $v_3 = 0$, $w_1 = w_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $w_3 = -\frac{2}{\sqrt{6}}$. Kaavalla (4.6) saadaan sektionaaliseksi kaarevuudeksi tälle tasolle

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{12}R_{1212} - \frac{1}{6}R_{1213} - \frac{1}{6}R_{1312} + \frac{1}{3}R_{1313} - \frac{1}{12}R_{1221} + \frac{1}{6}R_{1321} \\ &\quad - \frac{1}{3}R_{1323} - \frac{1}{12}R_{2112} + \frac{1}{6}R_{2113} - \frac{1}{3}R_{2313} + \frac{1}{12}R_{2121} + \frac{1}{3}R_{2323} \\ &= \dots = 0. \end{aligned}$$

e) Laske Riccin kaarevuus ja skalaarikaarevuus.

Ratkaisu. Riccin kaarevuuden koordinaatit saadaan kaavalla (4.11)

$$Ric = R_{jl} = \sum_i R_{ijil} = \begin{bmatrix} 44 & 20 & 0 \\ 20 & 32 & 12 \\ 0 & 12 & 52 \end{bmatrix}$$

ja skalaarikaarevuus saadaan kaavalla (4.14)

$$R = \sum_i R_{ii} = 44 + 32 + 52 = 128.$$

4.2 Kovariantti derivaatta

Olkoon S m -ulotteinen C^2 -pinta avaruudessa \mathbf{R}^n . Jos f on differentioituva funktion pinnalla S , niin silloin derivaatta ∇u on tangenttivektorikenttä. Mutta jos \mathbf{f} on vektorikenttä (tai matriisien tai tensorien kenttä), pisteittäin tangenttiavaruudessa $T_p S$, niin silloin derivaatalla on yleensä komponentteja, jotka ovat normaaleja pintaa S vastaan. Projektiota tangenttiavaruuteen $T_p S$ kutsutaan *kovariantiksi derivaataksi*. (Kuvat 7 ja 8.)

Paikallisilla koordinaateilla u_1, \dots, u_m , missä $g = I$ ensimmäiseen järjestykseen pisteessä p , kovariantin derivaataan \mathbf{f} koordinaatit pisteessä p on annettu usean osittaisderivaatan avulla. Esimerkiksi, vektorikentän, jolla on koordinaatit f_i , kovariantin derivaatan koordinaatit $f_{i,j}$ on annettu

$$f_{i,j} = f_{i,j} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial u_j}.$$

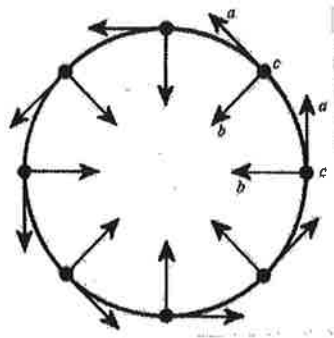
Esimerkki 4.4. Olkoon avaruudessa \mathbf{R}^3 vektorikenttä

$$\mathbf{f} = y^2 \mathbf{i} + (x+z) \mathbf{j} + x^3 \mathbf{k}.$$

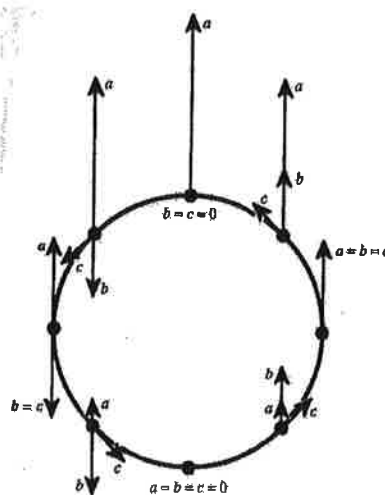
a) Laske vektorikentän \mathbf{f} derivaatta avaruuden \mathbf{R}^3 pisteessä.

Ratkaisu. Vektorikentän \mathbf{f} derivaatta avaruuden \mathbf{R}^3 pisteessä on

$$\begin{aligned} Df &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3x^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= (0, 2y, 0) \mathbf{i} + (1, 0, 1) \mathbf{j} + (3x^2, 0, 0) \mathbf{k}. \end{aligned}$$



Kuva 7: (a) Vektorikenttä f ympyrällä, (b) sen derivaatta, ja (c) sen kovarianttiderivaatta, 0.



Kuva 8: (a) Vektorikenttä f ympyrällä, (b) sen derivaatta, ja (c) sen kovarianttiderivaatta.

b) Laske vektorikentän f kovariantti derivaatta yksikköpallon pisteessä $(0, 0, 1)$.

Ratkaisu. Pisteessä $(0, 0, 1)$ vektorikentän f derivaatta on

$$Df(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (0, 0, 0)\mathbf{i} + (1, 0, 1)\mathbf{j} + (0, 0, 0)\mathbf{k}.$$

Kovariantti derivaatta pisteessä $(0, 0, 1)$ vektorikentälle f on

$$f_{i,j} = f_{j,i} \equiv \frac{\partial f_i}{\partial u_j} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = (1, 0)\mathbf{j}.$$

5 Sisäinen Riemannin geometria

Koska monet analyttisen geometrian suureet ovat sisäisiä sille m -ulotteiselle pinnalle S avaruudessa \mathbf{R}^n , standardi käsittely välttää kaikki viittaukset ympäröivään avaruuteen \mathbf{R}^n . Pinta S on määritelty topologisena monistona peitettynä yhteensopivilla C^∞ -koordinaattikartoilla yhdessä "Riemannin metriikan" g kanssa. Tätä monistoa kutsutaan *Riemannin monistoksi*.

Tähän mennessä on käsitelty yksi sisäinen suure, avaruuden \mathbf{R}^n 2-ulotteisen pinnan Gaussin kaarevuus G . Todistettiin, että G on sisäinen derivoimalla kaava Gaussin kaarevuudelle metriikan termien avulla.

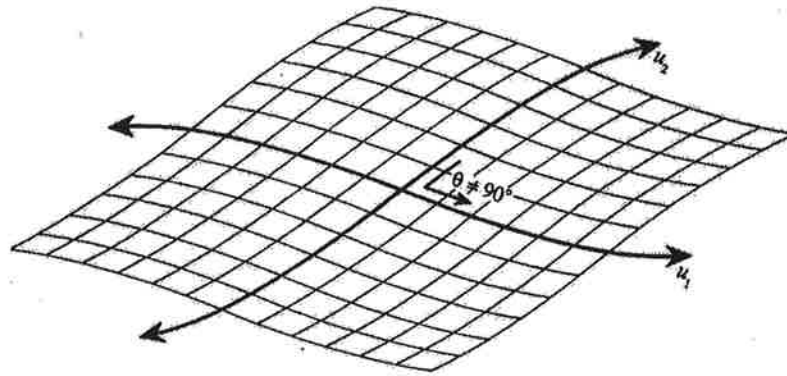
Voisi luulla, että sisäinen Riemannin geometria ei ole muuta kuin suunnattoman suuri kokoelma sellaisia kaavoja, joissa todistetaan sisäiseksi sellaiset suureet kuten Riemannin kaarevuus, sektionaalinen kaarevuus ja kovariantti derivaatta. Standardi lähestyminen käyttää näitä kaavoja määritelmänä. Etuna on se, että ulkoiset määritelmät ovat takana. Kaavat tulevat paljon monimutkaisemmiksi sisäisille paikallisille koordinaateille.

Erityisesti monimutkaisuutta lisää se seikka, että paikalliset koordinaatit eivät yleensä ole ortonormaaleja (Kuva 9). u_1 -akseli ei ole kohtisuora tasoa $\{u_1 = 0\}$ vastaan; tai infinitesimaalisesti, yksikkövektori $e_1 = \partial/\partial u_1$ ei ole kohtisuora tasoa $\{du_1 = 0\}$ vastaan. Vektorikentän komponentit

$$X = (X^1, X^2, \dots, X^m) = \sum X^i e_i = \sum X^i \frac{\partial}{\partial u^i}$$

ja differentiaalin komponentit

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m) = \sum \varphi_i du^i$$



Kuva 9: Ei-ortogonaalisille koordinaateille u_1 -akseli ei ole kohtisuora u_2 -akselia kohtaan (siten, että $\{u_1 = 0\}$). Infinitesimaalisesti yksikkövektori $e_1 = \partial/\partial u_1$ ei ole kohtisuora tasoa $\{du_1 = 0\}$ vastaan.

käyttäytyvät hyvin eri tavoin, esimerkiksi koordinaattien muuttuessa. Korostetaan erityispiirrettä siten, että yläindeksejä käytetään samanlaisten vektorien komponenteille, eli *kontravarianteille*, tensoreille, ja alaindeksijä käytetään samanlaisille differentiaaleille, eli *kovarianteille*, tensoreille.

Näin ollen vektorikentällä X on komponentit X^i . Sen kovariantilla derivaatalla on komponentit $X^i_{;j}$, joka erottautuu puolipisteellä osittaisderivaatasta X^i_j . Kovariantin derivaatan komponentit annetaan kaavalla

$$X^i_{;j} = X^i_j + \sum_k \Gamma^i_{jk} X^k, \quad (5.1)$$

missä merkintä Γ^i_{jk} tarkoittaa Cristoffelin symbolia

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \sum_l g^{il} (g_{lj,k} + g_{lk,j} - g_{jk,l}), \quad (5.2)$$

määriteltynä metriikan g_{ij} osittaisderivaatoilla ja käänteisluvuilla g^{ij} . Erityisesti kovariantti derivointi on sisäinen käsite.

Kaavassa (5.1) osittaisderivaatta antaa ensimmäisen päätermin. Lisäksi on ylimääräisiä termejä, sillä kantavektorit itse kääntyvät.

Molemmissa kaavoissa (5.1) ja (5.2) jokainen indeksi i, j tai k vasemmalla esiintyy samassa asemassa (joko ylä- tai alaindeksinä) oikealla. Summa kulkee yli indeksin k tai l , mikä ilmenee molemmissa ala- ja yläindeksissä. Näillä merkinnöillä esitysmuoto on yhteydessä konvarianttiin ja kontravarianttiin.

Jotkut käsittelyt määrittävät kovariantin derivoinnin Γ_{jk}^i monistoilla ilman metriikoita. Kovarianttia derivointia kutsutaan myös *konnektioksi*, koska derivoimalla vektorikentät, saadaan konnektio pinnan S tangettiavaruuksien välille eri pisteissä. Kanoninen konnektio, mikä tulee Riemannin metriikasta ("Levi-Civita yhteys") on symmetrinen, joten termi *torsio* on 0 eli

$$T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i = 0. \quad (5.3)$$

Riemannin kaarevuus on annettu kaavalla

$$R_{jkl}^i = -\Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl,k}^i + \sum_h (-\Gamma_{jk}^h \Gamma_{hl}^i + \Gamma_{jl}^h \Gamma_{hk}^i). \quad (5.4)$$

Riemannin kaarevuus on sisäinen, koska konnektio Γ_{jk}^i on sisäinen. Jokainen indeksi kaavan vasemmalla puolella ilmenee samassa asemassa kaavan oikealla puolella. Summa kulkee yli indeksin h , joka ilmenee sekä ylä- että alaindeksinä.

Vanhat symmetriat kaavoissa (4.8)-(4.10) pätevät yhä samanlaisille tensoreille

$$R_{ijkl} = \sum_h g_{ih} R_{jkl}^h.$$

Koska

$$R_{jkl}^i = \sum_h g^{ih} R_{hijkl},$$

niin

$$R_{jlk}^i = -R_{ljk}^i, \quad (5.5)$$

mutta yleisesti $R_{jkl}^i \neq -R_{ljk}^i$. Esimerkiksi, R_{2kl}^2 ei välttämättä häviä. Ensimmäinen Bianchin yhtälö pätee

$$R_{jkl}^i + R_{klj}^i + R_{ljk}^i = 0. \quad (5.6)$$

Riccin kaarevuus saadaan kaavalla

$$R_{jl} = \sum_i R_{jil}^i, \quad (5.7)$$

ja skalaarikaarevuus kaavalla

$$R = \sum g^{jl} R_{jl}. \quad (5.8)$$

Tason, jolla on ortonormaalikanta v, w , sektionaalinen kaarevuus on

$$K(v \wedge w) = \sum_{i,j,k,l} R_{ijkl} v^i w^j v^k w^l. \quad (5.9)$$

Jos pinta S on 2-ulotteinen, niin sen Gaussin kaarevuus on $G = R/2$.

Jos $g = I$ on ensimmäiseen järjestykseen pisteessä p , niin silloin

$$\begin{aligned}\Gamma_{jk}^i &= 0, \\ X_{,j}^i &= X_{,j}^i, \\ R_{ijkl} &= R_{jkl}^i = -\Gamma_{jk,l}^i + \Gamma_{jl,k}^i, \\ R_{jl} &= \sum_i R_{jil}^i, \\ R &= \sum R_{jj}.\end{aligned}$$

ja

$$K(v \wedge w) = \sum R_{ijkl}^i v^i w^j v^k w^l.$$

Muutamaa muuta erityistä kaavaa tarvitaan joskus. Yleisen tensorin f kovariantti derivaatta on annettu kaavalla

$$\begin{aligned}f_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} &= f_{i_1 \dots i_r, k}^{j_1 \dots j_s} + \sum_m \Gamma_{mk}^{j_1} f_{i_1 \dots i_r}^{m j_2 \dots j_s} + \dots \\ &+ \sum_m \Gamma_{mk}^{j_s} f_{i_1 \dots i_r}^{j_1 \dots j_{s-1} m} - \sum_m \Gamma_{k i_1}^m f_{m i_2 \dots i_r}^{j_1 \dots j_s} - \dots \\ &- \sum_m \Gamma_{k i_r}^m f_{i_1 \dots i_{r-1} m}^{j_1 \dots j_s}.\end{aligned}\quad (5.10)$$

Riccin lemma sanoo, että metriikan kovariantti derivaatta on 0 eli

$$g_{ij;k} = g_{,k}^{ij} = 0. \quad (5.11)$$

Yleisesti vektorikentän X sekoitetut kovariantit osittaisderivaatat eivät ole yhtäsuuria. *Riccin yhtälö* antaa kaavan Riemannin kaarevuuksien termien erolle:

$$X_{,j;k}^i - X_{,k;j}^i = - \sum_h R_{hjk}^i X^h. \quad (5.12)$$

Vaikka Riccin yhtälö antaa vaihtoehdoisen kuvauksen Riemannin kaarevuudelle, niin se antaa väärän vastauksen sekoitetuille osittaisderivaatoille. Riemannin geometrian sisäisissä kaavoissa Riccin yhtälö on joskus käännetty Riemannin kaarevuuden määritelmään.

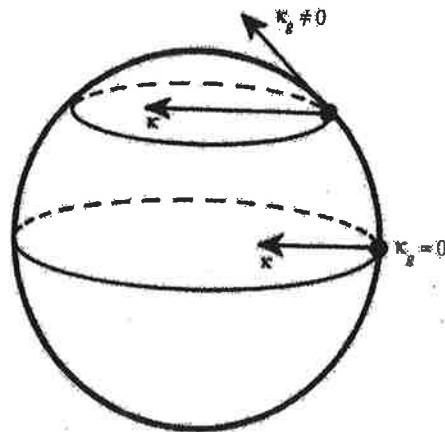
On olemassa kaksi tapaa todistaa Riemannin geometrian sisäiset kaavat: joko suoraan ulkoisten määritelmien avulla tai enemmän sisäisesti tutkimalla invarianssia, kun koordinaatit muuttuvat. Kaavalle (5.1) ulkoinen että invarianssi todistus löytyy lähteestä [9].

5.1 Geodeesit

Olkoon C C^2 -käyrä m -dimensionaalisella C^2 -pinnalla S avaruudessa \mathbf{R}^n varustettuna kaarevuusvektorilla κ pisteessä $p \in C$. Määritetään *geodeettinen kaarevuus* κ_g kaarevuusvektorin κ projektiona tangentiavaruuteen $T_p S$. κ_g on myös yksikkötangenttivektorin kovarianttiderivaatta. Kun kaarevuus κ on ulkoinen, niin geodeettinen kaarevuus κ_g on sisäinen.

Geodeesi on käyrä, jolle $\kappa_g = \mathbf{0}$ kaikissa pisteissä. Esimerkiksi pallopinnalla geodeesit ovat isoymyrän kaaria, mutta muut pallopinnan ympyrän kaaret eivät ole geodeeseja. (Kuva 10.) Lyhimmät polut osoittautuvat geodeeseiksi, mutta on olemassa myös muita pidempiä geodeeseja kahden pisteen välillä. Esimerkiksi ei-antipodaaliset pisteet ekvaattorilla voidaan liittää lyhyellä ja pitkällä geodeesilla, riippuen siitä mihin suuntaan liikutaan. Navat on liitetty yhteen äärettömän monella puoliympyrän muotoisilla pituuspiireillä, joilla kaikilla on sama pituus.

Seuraava lause selittää, miksi lyhin polku on aina geodeesi.



Kuva 10: Pallopinnalla isoymyrän kaaret ovat geodeeseja ($\kappa = \mathbf{0}$), mutta muut pallopinnan ympyrän kaaret eivät ole geodeeseja ($\kappa \neq \mathbf{0}$).

Lause 5.1. *Käyrä on geodeesi, jos ja vain jos sen pituuden ensimmäinen variaatio häviää.*

Todistus. Olkoon $\mathbf{x}(t)$ paikallinen parametrusointi kaarelle. Vastaavasti infinitesimaalinen kompaktisti tuettu kaaren $\mathbf{x}(t)$ muutos $\delta\mathbf{x}$, joten pituuden variaatio saa-

daan

$$\begin{aligned}\delta L &= \delta \int (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^{1/2} = \int \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}})^{-1/2} 2\dot{\mathbf{x}} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} \\ &= \int \mathbf{T} \cdot \delta \dot{\mathbf{x}} = - \int \dot{\mathbf{T}} \cdot \delta \mathbf{x} = - \int \boldsymbol{\kappa} \cdot \delta \mathbf{x} = - \int \boldsymbol{\kappa}_g \cdot \delta \mathbf{x}\end{aligned}$$

integroimalla osittain ja ottamalla huomioon, että $\delta \mathbf{x}$ pysyy pinnalla. δL häviää kaikilla $\delta \mathbf{x}$ pitkin pintaa jos ja vain jos $\boldsymbol{\kappa}_g = 0$, jolloin käyrä on geodeesi. \square

Paikallisille koordinaateille u^1, \dots, u^m olkoon kaarenpituuden parametrusointi $u(t)$ siten, että yksikkötangenttivektori $\mathbf{T} = \dot{u}$. Minkä tahansa funktion $f(u)$ derivaatta pitkin käyrää on annettu muodossa $\sum f_j \dot{u}^j$ (ketjusääntö). Minkä tahansa vektorikentän X^i kovariantti derivaatta pitkin käyrää on

$$\begin{aligned}\sum_j X^i_{;j} \dot{u}^j &= \sum_j X^i_{,j} \dot{u}^j + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j X^k \\ &= \dot{X}^i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j X^k\end{aligned}\tag{5.13}$$

(katso kaava (5.1)). Näin ollen saadaan kaava geodeeseille (parametrisoituna kaaren pituudella), sillä kovariantti derivaatta pitkin vektorikentän $X^i = \mathbf{T}^i = \dot{u}^i$ käyrää täytyy hävitä eli

$$0 = \ddot{u}^i + \sum_{j,k} \Gamma^i_{jk} \dot{u}^j \dot{u}^k.\tag{5.14}$$

5.2 Hyperbolinen geometria

Esimerkkinä Riemannin geometriasta, olkoon H 2-ulotteinen hyperbolinen avaruus, jolle globaalit koordinaatit on annettu ylemmässä puolitasossa

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y > 0\}$$

varustettuna metriikalla

$$g_{ij} = y^{-2} \delta_{ij};$$

missä

$$ds^2 = \frac{1}{y^2} dx^2 + \frac{1}{y^2} dy^2.$$

Koska pisteittäin g on standardin metriikan monikerta (g on "konforminen"), kulmat ovat ylemmässä puolitasossa samat kuin hyperbolisessa avaruudessa H , vaikkakin etäisyydet eivät ole samat.

Lasketaan Christoffelin symbolit ja kaarevuus. Metriikan g_{ij} käänteinen metriikka on

$$g^{ij} = y^2 \delta^{ij}.$$

Kaavalla (5.2) saadaan,

$$\begin{aligned} \Gamma_{12}^1 &\equiv \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{2} y^2 (g_{12,1} + g_{11,2} - g_{12,1}) \\ &= \frac{1}{2} y^2 \frac{\partial}{\partial y} y^{-2} = -y^{-1}. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$-\Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = -y^{-1}$$

ja loppujen Cristoffelin symbolien arvot ovat 0.

Kaavalla (5.4) saadaan

$$\begin{aligned} R_{212}^1 &= -\Gamma_{21,2}^1 + \Gamma_{22,1}^1 + \sum_h (-\Gamma_{21}^h \Gamma_{h2}^1 + \Gamma_{22}^h \Gamma_{h1}^1) \\ &= -y^{-2} + 0 + (-y^{-2} + y^{-2}) = -y^{-2}. \end{aligned}$$

Vastaavasti

$$\begin{aligned} R_{121}^2 &= -y^{-2}, \quad R_{111}^1 = R_{222}^2 = 0, \\ R_{11} &= R_{111}^1 + R_{121}^2 = -y^{-2}, \quad R_{22} = -y^2, \\ R &= -2, \quad G = -1. \end{aligned}$$

Hyperbolisella avaruudella H on jatkuva Gaussin kaarevuus -1.

Geodeesi parametrisoituna kaaren pituudes muuttujan t avulla täytyy toteuttaa yhtälöt (5.14) eli

$$\ddot{x} - 2y^{-1} \dot{x} \dot{y} = 0 \quad \text{ja} \quad \ddot{y} + y^{-1} \dot{x}^2 - y^{-1} \dot{y}^2 = 0.$$

Olkoon $p = dx/dy$. Silloin

$$\dot{x} = p\dot{y}, \quad \ddot{x} = \frac{dp}{dy} \dot{y}^2 + p\ddot{y}.$$

Ratkaisemalla \ddot{y} toisesta yhtälöstä ja sijoittamalla se ensimmäiseen yhtälöön saadaan

$$\frac{dp}{dy} = y^{-1}(p^3 + p).$$

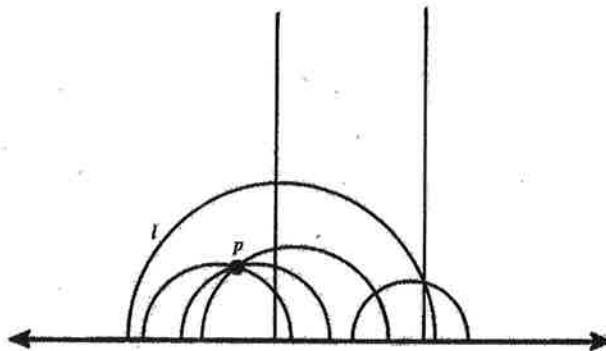
Integroimalla osamurtoluku saadaan

$$\frac{dx}{dy} = p = \pm \frac{cy}{\sqrt{1 - c^2 y^2}}.$$

Jos $c = 0$, saadaan pysysuorat suorat geodeeseiksi. Muutoin jos $c = 1/a$, niin integroimalla saadaan

$$(x - b)^2 + y^2 = a^2.$$

Nämä geodeesit ovat vain puoliympyröitä, jotka ovat keskittyneet x -akselille. (Kuva 11.)



Kuva 11: Geodeesit hyperbolisessa avaruudessa H ovat puoliympyröitä, jotka ovat keskittyneet x -akselille tai pystysuoria viivoja.

Läpi minkä tahansa kahden pisteen on olemassa yksikäsitteinen geodeesi, tai ”suora viiva”, joka antaa lyhimmän polun pisteiden välille. Euklideen neljä ensimmäistä postulaattia pätevät. Surullisen kuuluisa viides postulaatti ei päde. Sen ekvivalentti lausuma Playfairin ansiosta sanoo, että annetulle suoralle l ja pisteelle p , joka ei ole suoralla, on olemassa yksikäsitteinen suora pisteen p kautta, joka ei leikkaa suoraa l . Yksikäsitteisyys ei päde hyperbolisessa geometriassa. Hyperbolinen geometria todistaa sen mahdottomuuden, mitä matemaatikot ovat yrittäneet tuhat vuotta - päätellä viides postulaatti neljästä ensimmäisestä - ja antaa ensimmäisen esimerkin epäeuklidisesta geometriasta.

Mielivaltaisen pisteen (a, b) hyperbolinen etäisyys x -akselista, mitattuna pystysuoralla geodeesilla, on

$$\int_{y=0}^b y^{-1} dy = \infty$$

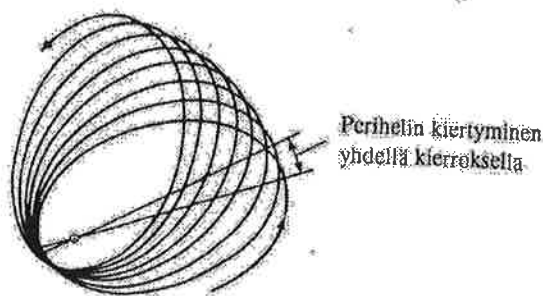
Hyperbolisella avaruudella ei ole reunaa, mutta se laajenee rajattomasti kaikkiin suuntiin.

5.3 Geodeesit ja sektionaalinen kaarevuus

Positiivinen sektionaalinen kaarevuus tarkoittaa, että yhdensuuntaiset geodeesit supenevat kuten pallopinnalla. Negatiivinen sektionaalinen kaarevuus tarkoittaa, että yhdensuuntaiset geodeesit hajaantuvat kuten hyperbolisessa avaruudessa.

6 Yleinen suhteellisuusteoria

Tämä Luku perustuu lähteisiin [7] ja [9]. Avaruuden kaareutumisesta Aurinkokunnassa on havaittavia seurauksia. Pisimpään tunnettu ilmiö on Merkuriuksen rataellipsin hidas kiertyminen (Kuva 12.).



Kuva 12: Merkuriuksen radan kiertyminen. [7]

Rataellipsin Aurinkoa lähin piste eli periheli kiertyy vuosisadassa 574 kaarisekuntia. Ranskalainen tähtitieteilijä U. Le Verrier osoitti 1859, että pääosa tästä kiertymisestä (531 kaarisekuntia) on seurausta muiden planeettojen vaikutuksesta.

Jäljelle jäänyttä osaa 43 kaarisekuntia, ei voitu selittää klassisen mekaniikan avulla. Einstein osoitti, että kiertymän epäsäännöllinen osa voidaan ymmärtää suhteellisuusteorian pohjalta. Perihelin kiertymisen aiheuttaa osaltaan avaruuden kaareutuminen, mutta Merkuriuksen rataliikkeeseen vaikuttavat myös Lorentzin kontraktio ja ajan dilataatio.

Yleisellä suhteellisuusteorialla on kolme elementtiä. Ensimmäisenä suppeampi suhteellisuusteoria kuvaa liikettä vapaassa avaruudessa ilman painovoimaa. Toiseksi ekvivalentin periaate laajentaa teorian, ainakin periaatteessa, ottamaan mukaan painovoiman yhtälöimällä painovoiman kiihtyvyyden kanssa. Kolmanneksi Riemannin geometria antaa matemaattiset kehykset, mikä tekee laskemisen mahdolliseksi.

6.1 Suppeampi suhteellisuusteoria

Yksi hiukkanen vapaassa avaruudessa seuraa suoraa viivaa vakionopeudella. Esimerkiksi $x = at$, $y = bt$, $z = ct$,

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c},$$

mikä on origon kautta kulkevan suoran yhtälö kolmiulotteisessa avaruudessa. Tämä polku on myös suora 4-ulotteisessa avaruusajassa eli

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{t}{1},$$

Tämä on geodeesi standardimetriikalle

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + dt^2. \quad (6.1)$$

Itseasiassa se on geodeesi mille tahansa metriikalla, joka on muotoa

$$ds^2 = a_1 dx^2 + a_2 dy^2 + a_3 dz^2 + a_4 dt^2. \quad (6.2)$$

Kaikki niitä koordinaatistojärjestelmiä, jotka liikkuvat absoluuttisen avaruuden suhteen vakionopeudella, kutsutaan *inertiaalijärjestelmiksi*.

Einsteinin pohjasi suppeamman suhteellisuusteoriansa kahteen postulaattiin:

1. Kaikki inertiaalijärjestelmät ovat saman arvoisia kaikkien fyysikaalisten tapahtumien kuvailussa.
2. Valon nopeus c on sama kaikissa inertiaalijärjestelmissä eli *invariantti*.

Postulaatin 1 välitön seuraus on, että valo etenee samalla nopeudella havaitsijan liiketilasta riippumatta, kuten Michelsonin ja Morleyn tekemä koe osoitti.

Einsteinin postulaatit pätevät liikkeelle pitkin geodeesia avaruusajassa. Niistä esimerkkinä erikoistapaus kaavasta (6.2)

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2 dt^2. \quad (6.3)$$

Tämä on kuuluisa *Lorenzin metriikka*, missä c on valonnopeus. Valitsemme yksiköt siten, että $c = 1$.

Lorenzin metriikka pysyy invarianttina koordinaattien sisäisessä muutoksessa, mutta näyttää erilaiselta kiihtyvissä koordinaattisysteemeissä.

Tämä metriikka on mukana tässä miinus merkkisenä; metriikka ei ole positiivisesti definiitti. Lukuunottamatta uutta faktaa, että kaaren pituuden neliö avaruusajassa voi olla positiivinen tai negatiivinen, kaikki määritelmät ja ominaisuudet

säilyvät muodollisesti samoina. Yleisesti, positiivinen sektionaalinen kaarevuus tarkoittaa, että yhdensuuntainen geodeesi suppenee (niiden välisen etäisyyden neliö pienenee). (Katso Kappale 5.3)

Tätä uutta etäisyyttä s on usein kutsuttu "aidoksi ajaksi" τ , koska liikahtamattomalle partikkelille (x, y, z vakiot) on $ds^2 = dt^2$. Jos korvataan symboli s symbolilla τ ja muutetaan koordinaatit pallokoordinaateiksi, saadaan Lorentzin metriikka muotoon

$$d\tau^2 = -dr^2 - r^2 d\varphi^2 - r^2 \sin^2 \varphi d\theta^2 + dt^2. \quad (6.4)$$

6.2 Ekvivalenssiperiaate

Suppeampi suhteellisuusteoria käsittelee liikettä (paikkaa, nopeutta, kiihtyvyyttä) vapaassa avaruudessa. Jäljelle jäävä kysymys on, että kuinka käsitellä painovoimaa. Ekvivalenssiperiaate sanoo, että infinitesimaalisesti painovoiman aiheuttamat fyysiset vaikutukset ovat erottamattomat kiihtyvyyden vaikutuksista. Jos tunnet puristusta pienessä hississä, et voi kertoa johtuuko se siitä, että hissi on massiivisella planeetalla vai siitä, että hissi liikkuu ylöspäin. Sen tähden painovoiman vaikutukset ovat samat kuin kiihtyvyyden vaikutukset. Liikkeen laskeminen gravitaationaalilla kentällä supistuu geodeesin laskemiseen jollakin vieraalla metriikalla.

6.3 Schwarzschildin metriikka

Yleisin perusesimerkki yleisestä suhteellisuudesta on Lorentzin metriikan vaikutus pistemassaan, kuten aurinko aurinkokunnan keskellä. Oletetaan, että metriikka saa yksinkertaisen muodon

$$d\tau^2 = -e^{\lambda(r)} dr^2 - r^2 (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\theta^2) + e^{\nu(r)} dt^2, \quad (6.5)$$

missä $\lambda(r)$ ja $\nu(r)$ ovat määritettäviä funktioita. Tämä metriikka on pallomaisesti symmetrinen ja ajasta riippumaton. Fysiikaalisilla syillä Einstein oletti eteenpäin, että nyt niin kutsuttu Einsteinin tensori katoaa:

$$G_k^i = g^{ij} R_{jk} - \frac{1}{2} R \delta_k^i = 0. \quad (6.6)$$

Jotta tätä olettamusta voidaan käyttää, lasketaan Einsteinin tensori metriikalle kaavassa 6.5. Käytetään muuttujia r, φ, θ ja t . Lasketaan ensin metriikka

$$g_{11} = -e^\lambda, \quad g_{22} = -r^2, \quad g_{33} = -r^2 \sin^2 \varphi, \quad g_{44} = e^\nu, \quad \text{muut katoavat,}$$

$g^{11} = -e^{-\lambda}$, $g^{22} = -r^{-2}$, $g^{33} = -r^{-2} \sin^{-2} \varphi$, $g^{44} = e^{-\nu}$, muut katoavat;

silloin Christoffelin symbolit

$$\begin{aligned}\Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2}\lambda', & \Gamma_{22}^1 &= -re^{-\lambda}, & \Gamma_{33}^1 &= -re^{-\lambda} \sin^2 \varphi, \\ \Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2}\nu' e^{\nu-\lambda}, & \Gamma_{12}^2 \Gamma_{13}^3 &= r^{-1}, & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \varphi \cos \varphi, \\ \Gamma_{23}^3 &= \cot \varphi, & \Gamma_{14}^4 &= \frac{1}{2}\nu', & \text{muut katoavat,}\end{aligned}\tag{6.7}$$

missä λ' tarkoittaa $d\lambda/dr$; silloin jotkin Riemannin kaarevuustensorit ovat muotoa

$$\begin{aligned}R_{121}^2 &= R_{131}^3 = \frac{1}{2}r^{-1}\lambda', & R_{141}^4 &= -\frac{1}{2}\nu'' + \left(\frac{1}{2}\nu'\right)\left(\frac{1}{2}\lambda'\right) - \frac{1}{4}\nu'^2, \\ R_{212}^1 &= \frac{1}{2}r\lambda'e^{-\lambda}, & R_{232}^3 &= 1 - e^{-\lambda}, & R_{242}^4 &= \frac{1}{2}\nu'(-re^{-\lambda}), \\ R_{313}^1 &= \frac{1}{2}r\lambda'\sin^2 \varphi e^{-\lambda}, & R_{323}^2 &= \sin^2 \varphi(1 - e^{-\lambda}), \\ R_{343}^4 &= \frac{1}{2}\nu'(-r)e^{-\lambda} \sin^2 \varphi, \\ R_{414}^1 &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda'), \\ R_{424}^2 &= R_{434}^3 = \frac{1}{2}r^{-1}\nu e^{\nu-\lambda};\end{aligned}$$

silloin jotkin Riccin kaarevuuden komponentit saavat muodon

$$\begin{aligned}R_{11} &= r^{-1}\lambda' - \frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{4}\nu'^2, \\ R_{22} &= 1 + \frac{1}{2}re^{-\lambda}(\lambda' - \nu') - e^{-\lambda}, \\ R_{33} &= \sin^2 \varphi R_{22}, \\ R_{44} &= \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}(\nu'' + \frac{1}{2}\nu'^2 - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + 2r^{-1}\nu'), \\ R &= -2r^{-2} + e^{-\lambda}(\nu'' - 2r^{-1}\lambda' - \frac{1}{2}\nu'\lambda' + \frac{1}{2}\nu'^2 + 2r^{-1}\nu' + 2r^{-2});\end{aligned}$$

ja lopultakin jotkin Einsteinin tensorin komponentit saavata muodon

$$\begin{aligned}G_k^i &= g^{ij}R_{jk} - \frac{1}{2}R\delta_k^i, \\ G_1^1 &= r^{-2} + e^{-\lambda}(-r^{-1}\nu' - r^2), \\ G_2^2 &= G_3^3 = e^{-\lambda}\left(-\frac{1}{2}\nu'' + \frac{1}{2}r^{-1}\lambda' - \frac{1}{2}r^{-1}\nu' + \frac{1}{4}\nu'\lambda' - \frac{1}{4}\nu'^2\right), \\ G_4^4 &= r^{-2} + e^{-\lambda}(r^{-1}\lambda' - r^2).\end{aligned}$$

Koska $G_4^4 = 0$, $e^{-\lambda} = 1 - \gamma r^{-1}$ joillekin vakioille γ (tarkistetaan, että $d\gamma/dr = 0$). Ottamalla huomioon testipartikkeli, jolle nopeus on 0 ja r on suuri, päästään joh-topäätökseen, että $\gamma = 2GM$, missä M on keskimassa ja G on gravitaatiovakio.

Siksi

$$e^{-\lambda} = 1 - 2GMr^{-1}.$$

Koska

$$G_1^1 = G_4^4 = 0,$$

niin $\lambda + \nu$ on vakio. Koska metriikan tulisi näyttää Lorentzin metriikalta suunnattoman suurella vakiolla r , voidaan päätellä, että $\lambda + \nu = 0$. Siksi

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - 2GMr^{-1}. \quad (6.8)$$

Nyt $G_2^2 = G_3^3 = 0$ automaattisesti.

Schwarzschildin metriikaksi saadaan nyt

$$d\tau^2 = -(1 - 2GMr^{-1})^{-1}dr^2 - r^2(d\varphi^2 + \sin^2\varphi d\theta^2) + (1 - 2GMr^{-1})dt^2 \quad (6.9)$$

Jos $M = 0$, Schwarzschildin metriikka kaavassa (6.9) sieventyy Lorentzin metriikaksi kaavassa (6.4). Kun r pienenee arvoksi $1/2GM$, $d\tau^2$ räjähtää: kutistamalla aurinko yhdeksi massapisteeksi on luotu musta-aukko, jonka säde on $1/2GM$!

6.4 Suhteellinen taivaan mekaniikka

Nyt voidaan katsoa, mitä eroja yleinen suhteellisuusteoria ennustaa Merkuriuksen radoille. Fysiikka on antanut muodon neljälle geodeesien kaavoille 5.14 Schwarzschildin metriikassa (6.9). Neljän yhtälön pitäisi johtaa siihen, että voidaan ratkaista r , φ , θ , ja t muuttujan τ funktiona. Sen sijaan, että käytetään geodeesien ensimmäistä yhtälöä, jossa on $d^2r/d\tau^2$, niin käytetään identtisuutta $d\tau^2 = g_{ij}dx^i dx^j$:

$$\begin{aligned} & -(1 - 2GMr^{-1})^{-1}\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 - r^2\left(\frac{d\varphi}{d\tau}\right)^2 \\ & - r^2 \sin^2\varphi\left(\frac{d\theta}{d\tau}\right)^2 + (1 - 2GMr^{-1})\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = 1. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Jotta voidaan laskea kolme muuta geodesian yhtälöä, jatketaan kaavasta (6.8) laskemalla

$$\begin{aligned} \lambda' &= -\nu' = -2GM(r^2 - 2GMr)^{-1}, \\ \lambda'' &= -\nu'' = 2GM(r^2 - 2GMr)^{-2}(2r - 2GM), \end{aligned}$$

ja silloin kaavalla (6.7) saadaan

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11}^1 &= -GM(r^2 - 2GMr)^{-1} \\
\Gamma_{22}^1 &= -r(1 - 2GMr^{-1}) = 2GM - r \\
\Gamma_{33}^1 &= (2GM - r) \sin^2 \varphi \\
\Gamma_{44}^1 &= \frac{1}{2}(1 - 2GMr^{-1})(2GMr^{-2}) \\
\Gamma_{12}^2 &= \Gamma_{13}^3 = r^{-1} \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \varphi \cos \varphi \\
\Gamma_{23}^3 &= \cot \varphi \\
\Gamma_{14}^4 &= GM(r^2 - 2GMr)^{-1}.
\end{aligned}$$

Näin ollen kolme viimeistä geodeesien yhtälöä (vertaa kaavaa (5.14)) ovat

$$\frac{d^2\varphi}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\varphi}{d\tau} - \sin \varphi \cos \varphi \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 = 0, \quad (6.11)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} + 2 \cot \varphi \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (6.12)$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + \frac{2GM}{r^2 - 2GMr} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0. \quad (6.13)$$

Yhtälöiden (6.10)-(6.13) ratkaisu antaa Merkuriuksen kiertoradan. Oletetaan, että aluksi $d\varphi/d\tau$ ja $\cos \varphi$ ovat 0, yhtälöllä (6.11) saadaan, että φ on $\pi/2$. Siten kiertorata säilyy tasolla. Muut kolme yhtälöä (6.10), (6.12) ja (6.13) tulevat muotoon

$$-(1 - 2GMr^{-1})^{-1} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 - r^2 \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 + (1 - 2GMr^{-1}) \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = 1, \quad (6.14)$$

$$\frac{d^2\theta}{d\tau^2} + 2r^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{d\theta}{d\tau} = 0, \quad (6.15)$$

$$\frac{d^2t}{d\tau^2} + 2GM(r^2 - 2GMr)^{-1} \frac{dr}{d\tau} \frac{dt}{d\tau} = 0. \quad (6.16)$$

Integroimalla kaavat (6.15) ja (6.16) saadaan

$$r^2 \frac{d\theta}{d\tau} = h \text{ (vakio)}, \quad (6.17)$$

$$(1 - 2GMr^{-1}) \frac{dt}{d\tau} = \beta \text{ (vakio)}. \quad (6.18)$$

Siksi yhtälö (6.14) tulee muotoon

$$-r^{-4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r^{-2}(1 - 2GMr^{-1}) + \beta^2 h^{-2} = h^{-2}(1 - 2GMr^{-1}). \quad (6.19)$$

Merkitimällä $r = u^{-1}$ saadaan

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = 2GM \left(u^3 - \frac{1}{2GM}u^2 + \beta_1u + \beta_0\right)$$

joillekin vakioille β_0 ja β_1 . Parametrin u maksimi- ja minimiarvot u_1 ja u_2 ovat juuria. Koska juurien summa on $1/2GM$, niin silloin kolmas juuri on $1/2GM - u_1 - u_2$. Näin ollen

$$\begin{aligned} \left(\frac{du}{d\theta}\right) &= 2GM(u - u_1)(u - u_2) \left(u - \frac{1}{2GM} + u_1 - u_2\right), \\ \frac{d\theta}{|du|} &= \frac{1}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}} [1 - 2GM(u + u_1 + u_2)]^{-1/2} \\ &\approx \frac{1 + GM(u + u_1 + u_2)}{\sqrt{(u_1 - u)(u - u_2)}}. \end{aligned}$$

Ensimmäiselle approksimaatiolle kiertorata oli klassinen ellipsi

$$u = l^{-1}(1 + e \cos \theta),$$

yhdessä $u_1 = l^{-1}(1 + e)$, $u_2 = l^{-1}(1 - e)$, ja etäisyyksien keskiarvo

$$a = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2}\right) = \frac{l}{1 - e^2}.$$

Yhdelle pyörähdykselle pätee

$$\begin{aligned} \Delta\theta &\approx \int_{\theta=0}^{2\pi} \frac{1 + GMl^{-1}(3 + e \cos \theta)}{\sqrt{l^{-1}e(1 - \cos \theta)l^{-1}e(1 + \cos \theta)}} l^{-1}e |\sin \theta| d\theta \\ &= \int_{\theta=0}^{2\pi} 1 + GMl^{-1}(3 + e \cos \theta) d\theta \\ &= 2\pi + 6\pi GM/l \\ &= 2\pi + 6GM/a(1 - e^2). \end{aligned}$$

Ellipsi on kiertynyt $6\pi GM/a(1 - e^2)$ radiaanin. Merkuriuksen jakson T kiertynyt termi on

$$\frac{6\pi GM}{a(1 - e^2)T},$$

tai useammalla vakioyksiköllä ilmoitettuna (missä valonnopeus c ei ole 1),

$$\frac{6\pi GM}{c^2 a(1 - e^2)T} \text{ radiaania.}$$

Nyt

$$G = \text{gravitaatiovakio} = 6,67 \times 10^{-11} \text{m}^3/\text{kg s}^2,$$

$$M = \text{aurion massa} = 1,99 \times 10^{30} \text{kg},$$

$$c = \text{valonnopeus} = 3,00 \times 10^8 \text{m/s},$$

$$a = \text{keskiarvo etäisyys Merkuriuksesta aurinkoon} = 5,768 \times 10^{10} \text{m},$$

$$e = \text{Merkuriuksen kiertoradan eksentrisyys} = 0,206$$

$$T = \text{Merkuriuksen jakso} = 88,0 \text{ päivää},$$

$$\text{vuosisata} = 36525 \text{ päivää}$$

$$\text{radiaani} = 360/2\pi \text{ astetta},$$

$$\text{aste} = 3600''.$$

Sijoittamalla nämä luvut kaavaan, saadaan kiertymisen suuruudelle arvio

$$43,1''/\text{vuosisata},$$

yhteisymmärryksessä havaintojen kanssa.

7 Gauss-Bonnet'n lause

Yksi tunnetuimmista matematiikan tuloksista on Gauss-Bonnet'n lause, joka yhdistää pintojen geometrian ja topologian. Gauss-Bonnet'n lauseen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [4] s. 168-171.

7.1 Gauss-Bonnet'n kaava

Lause 7.1. *Olkoon R sileä kiekko sileällä 2-ulotteisella Riemannin monistolla M varustettuna Gaussin kaarevuudella G . Olkoon κ_g reunan geodeettinen kaarevuus. Silloin*

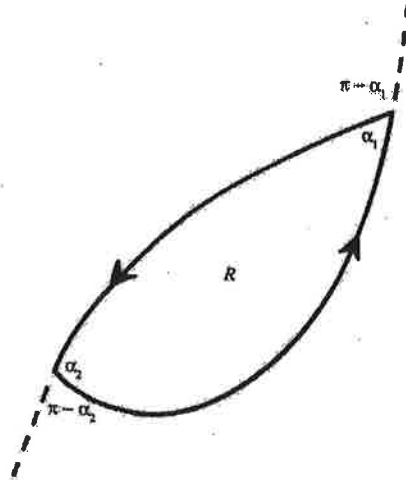
$$\int_R G + \int_{\partial R} \kappa_g = 2\pi. \quad (7.1)$$

Esimerkiksi tason kiekolle $0 + 2\pi = 2\pi$. Yksikköpallon ylemmälle puoliskolle $2\pi + 0 = 2\pi$.

Tämä kaava viittaa, että G on sisäinen kuten Gaussin Theorema Egregium 2.9 ilmoitti.

Jos reunalla ∂R on sisäkulmia α_i , kuten Kuvassa 13, niin silloin reunan kaarevuusstermi $\int_{\partial R} \kappa_g$ kaavassa (7.1) voidaan tulkita uudelleen sisältämään diskreetit kontribuutiot $\sum(\pi - \alpha_i)$. Vaihtoehtoisesti jos kulmat käsitellään erikseen, niin

$$\int_R G + \int_{\partial R} \kappa_g + \sum(\pi - \alpha_i) = 2\pi. \quad (7.2)$$



Kuva 13: Sisäkulma α antaa kontribuutiot $\pi - \alpha$ termille $\int_{\partial R} \kappa_g$.

Yleisesti geodeettiselle kolmiolle Δ pätee

$$\int_{\Delta} G + \pi = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3, \quad (7.3)$$

joka on variaatio tutulle lausunnolle, että tason kolmion kulmien summa on π . Käyttämällä pisteeksi suppenevia kolmioita voidaan laskea Gaussin kaarevuus

$$G = \lim \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{\text{pinta-ala } \Delta}.$$

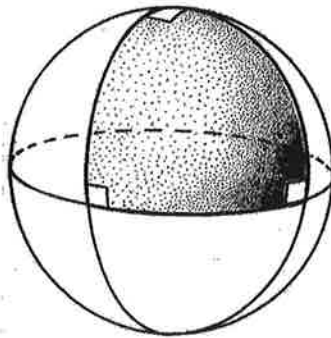
Yksikköpallon pinnalla $\int_{\Delta} G$ tulee kolmion Δ alaksi A :

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + A, \quad (7.4)$$

joka on yksi peruskaava pallon trigonometriassa. Esimerkiksi geodeettiselle kolmiolle, kuten Kuvassa 14, jonka yksi kärki on pohjoisnavalla ja kaksi ekvaattorilla sekä kolme oikeaa kulmaa,

$$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi + \frac{\pi}{2}.$$

Gauss alunperin löysi kaavan (7.3) vuonna 1827. Bonnet vahvisti kaavan (7.1) vuonna 1848.



Kuva 14: Pallopinnalla olevalle kolmiolle kulmien summa on $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi + A$. Kuvan tapauksessa $\pi/2 + \pi/2 + \pi/2 = \pi + \pi/2$.

7.2 Gauss-Bonnet'n lause

Gauss-Bonnet'n lause on globaali tulos kompaktista 2-ulotteisesta sileästä Riemannin monistosta M . Se on suhteessa geometriseen suureeseen, Gaussin kaarevuuden integraaliin, ja topologiseen suureeseen, Eulerin karakteristikaan χ .

Määritelmä 7.2. Mille tahansa Riemannin moniston M kolmioinnille varustettuna kärjillä V , reunoilla E ja pinnalla F , Eulerin karakteristika χ on määritelty

$$\chi = V - E + F.$$

Lause 7.3. (Gauss-Bonnet'n lause) Lause sanoo, että

$$\int_M G = 2\pi\chi. \quad (7.5)$$

Esimerkiksi otetaan yksikköpallo, joka on kolmioitu ekvaattorilla ja pituusateen kahdella ortogonaalisella isoympyrällä. (Kuva 15.) Eulerin karakteristika on

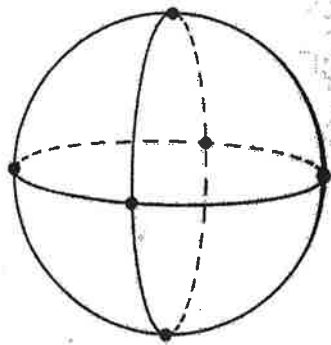
$$\chi = V - E + F = 6 - 12 + 8 = 2.$$

Näin ollen

$$\int G = 4\pi = 2\pi\chi.$$

Yksi seuraus kaavasta (7.5) on, että Eulerin karakteristika on riippumaton kolmioinnin valinnasta ja siitä johtuu, että se on topologisesti invariantti. Itseasiassa pinnoille varustettuna *genuksella* g (genus tarkoittaa "reikien" tai "kahvojen" lukumäärää pinnassa) pätee

$$\chi = 2 - 2g.$$



Kuva 15: Yksikköpallolla on Eulerin karakteristika $\chi = V - E + F = 6 - 12 + 8 = 2$. Gauss-Bonnet'n lause sanoo, että $\int G = 4\pi = 2\pi\chi$.

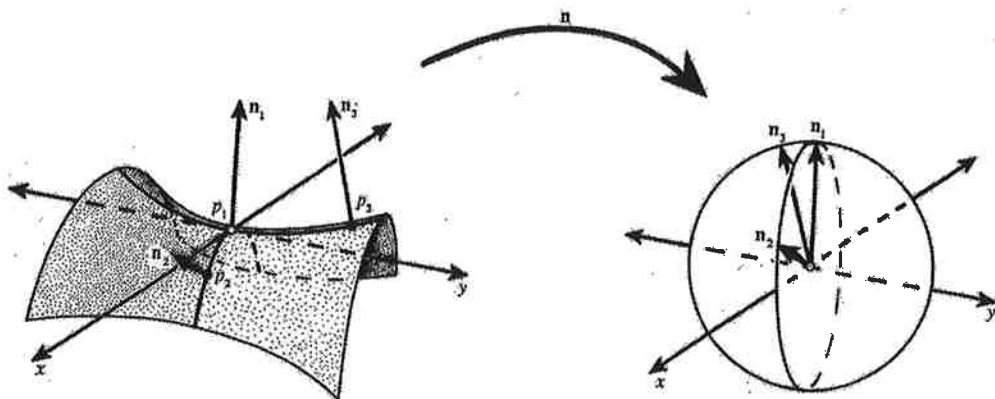
Toinen seuraus kaavasta (7.5) on, että $\int G$ on riippumaton metriikasta ja riippuvainen vain Riemannin moniston M metriikasta.

7.3 Gaussin kuvaus pinnalla avaruudessa \mathbf{R}^3

Avaruudessa \mathbf{R}^3 pinnan M Gaussin kuvaus on vain yksikkönormaalivektori

$$\mathbf{n} : M \rightarrow S^2.$$

Olkoon pinta, kuten Kuvassa 16, sellainen, että se on tangentiaalinen xy -tasoa vastaan pisteessä p_1 varustettuna pääkaarevuuksilla κ_1 pitkin x -akselia ja κ_2 pitkin y -akselia. Oletetaan, että $\kappa_1 < 0$ ja $\kappa_2 > 0$.



Kuva 16: Gaussin kuvaus kuvaa pisteen yksikkönormaalivektorilla pallopinnalle.

Derivaattaa $D\mathbf{n}$ kutsutaan Weingartenin kuvaukseksi. Jos liikutaan x -suunnassa

pisteestä p_1 pistettä p_2 kohti, niin \mathbf{n} kääntyy x -suuntaan $|\kappa_2|$ verran, mutta on positiivinen kun $\kappa_1 < 0$. Ensimmäinen sarake derivaatasta $D\mathbf{n}$ on $\begin{bmatrix} -\kappa_1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Jos päinvastoin liikutaan suunnassa y pisteestä p_1 pisteen p_3 suuntaan, niin \mathbf{n} kääntyy negatiiviseen y -suuntaan $|\kappa_1|$ verran. Toinen sarake derivaatasta $D\mathbf{n}$ on $\begin{bmatrix} 0 \\ -\kappa_2 \end{bmatrix}$. Tästä johtuu, että

$$D\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\kappa_1 & 0 \\ 0 & -\kappa_2 \end{bmatrix} = -II.$$

Yhtälö pätee millä tahansa ortonormaaleilla koordinaateilla. Gaussin kuvauksen Jacobin determinantti on yhtä suuri kuin Gaussin kaarevuus eli

$$\det D\mathbf{n} = \kappa_1\kappa_2 = G.$$

Jos M on topologinen pallo, niin yksikkönormaalivektorilla \mathbf{n} on aste 1 (peittää pallopinnan kerran, algebrallisesti), ja

$$\int_M G = \text{kuvan pinta-ala } \mathbf{n} = 4\pi = 2\pi\chi.$$

On löydetty Gauss-Bonnet'n lause pallolle avaruudessa \mathbf{R}^3 . Yleiselle kompaktille Gaussin pinnalle M avaruudessa \mathbf{R}^3 yksikkönormaalivektorin \mathbf{n} aste on $\chi/2$, ja

$$\int_M G = \frac{\chi}{2}4\pi = 2\pi\chi,$$

mikä on Gauss-Bonnet' lause mille tahansa suljetulle pinnalle avaruudessa \mathbf{R}^3 .

7.4 Hyperpinnan Gaussin kuvaus

Hyperpinnalle M^n avaruudessa \mathbf{R}^{n+1} Gaussin kuvaus on

$$\mathbf{n} : M \rightarrow S^n.$$

Ortonormaaleilla koordinaateilla, jotka on suunnattu pääkaarevuus suuntiin pisteessä, Weingarten kuvaus on

$$D\mathbf{n} = \begin{bmatrix} -\kappa_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & -\kappa_n \end{bmatrix}.$$

Gaussin kuvauksen \mathbf{n} Jacobin determinantti on

$$(-\kappa_1) \cdots (-\kappa_n) = (-1)^n G,$$

jos Gaussin kaarevuus G on määritelty $\kappa_n \cdots \kappa_n = \det II$. Pinnoille pätee, jos n parillinen, niin Gaussin kuvauksen n aste on Eulerin karakteristika

$$\chi = V - E + F - \dots$$

ja

$$\int_M G = \frac{\chi}{2} \text{ pinta-ala } S^n, \quad (7.6)$$

yleistys Gauss-Bonnetista hyperpinnoille (H. Hopf 1925). (Jos n on pariton, niin $\chi = 0$.)

7.5 Gauss-Bonnet-Chern lause

Gauss-Bonnetin lauseen yleistys kaava 7.6 pätee mille tahansa parillisulotteiselle sileälle kompaktille Riemannin monistolle M .

Kaava ja todistus vaativat Gaussin kaarevuuden G määritelmää paikallisilla koordinaateilla. Se on

$$G = \frac{1}{2^{n/2} n! \det g_{ij}} R_{i_1 i_2 j_1 j_2} R_{i_3 i_4 j_3 j_4} \cdots R_{i_{n-1} i_n j_{n-1} j_n} \epsilon^{i_1 \cdots i_n} \epsilon^{j_1 \cdots j_n},$$

missä $\epsilon^{i_1 \cdots i_n} = \pm 1$, riippuen siitä, että onko i_1, \dots, i_n parillinen vai pariton permutaatio. Esimerkiksi 2-ulotteiselle pinnalle, joka on tangentiaalinen $x_1 x_2$ -tasoa vastaan origossa avaruudessa \mathbf{R}^n , varustettuna paikallisilla koordinaateilla x_1 ja x_2 , $\det g_{ij} = 1$, ja ainoan sektorin Gaussin kaarevuus on näin ollen

$$G = \frac{1}{2!} (R_{1212} - R_{1221} + R_{2121}) = R_{1212}.$$

7.6 Yhdensuuntaissiirto

Vektorikentän käyrää kutsutaan *yhdensuuntaiseksi*, jos sen kovariantti derivaatta pitkin käyrää katoaa (Katso kaava (5.13)). Vektori jossakin pisteessä käyrällä voi olla yksikäsitteisesti jatkuva "yhdensuuntaissiirtymällä" kuten yhdensuuntaisella vektorikentällä. Euklidisessa avaruudessa yhdensuuntainen vektorikenttä on jatkuva, jos kaikki vektorit ovat "yhdensuuntaiset".

Riemannin monistossa M käyrä on geodeesi, jos ja vain jos sen yksikkötangenttivektori T on yhdensuuntainen. Jos M on 2-ulotteinen pinta, γ on käyrä, ja θ on yhdensuuntaisen vektorikentän X ja yksikkötangenttivektorin T välinen kulma, niin silloin geodeettinen kaarevuus

$$\kappa_g = \frac{d\theta}{ds}.$$

Jos γ on suljettu käyrä, niin tulos $X(1)$ yhdensuuntaissiirtymästä X käyrän ympäri on jossakin kulmassa α verrattuna alkuvektoriin $X(0)$ (Kuva 17.). Gauss-Bonnetin kaavalla (7.1),

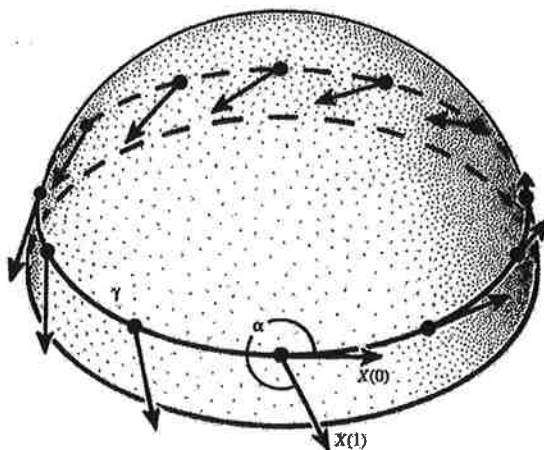
$$2\pi - \int G = \int \kappa_g = \int \frac{d\theta}{ds} = 2\pi - \alpha,$$

joten

$$\alpha = \int G.$$

Tästä johtuu, että Gaussin kaarevuus voidaan tulkita verkon summana, missä vektori kääntyy yhdensuuntaissiirtymän aikana pienen suljetun käyrän ympäri.

Yleisemmin korkeampi dimensionaalisissa Riemannin monistoissa M , R_{ijkl} voidaan tulkita suuruutena, jonka vektori kääntyy e_i, e_j -tasossa yhdensuuntaissiirtymän aikana pienen suljetun tason e_k, e_l käyrän ympäri.



Kuva 17: Geodeettinen kaarevuus $\kappa_g = d\theta/ds$, missä θ on kulma yhdensuuntaisesta vektorikentästä X yksikkötangenttivektoriin T . Gauss-Bonnetin kaavalla kulma α , alusta $X(0)$ loppuun $X(1)$, on $\int G$. Esimerkiksi kulkeminen itään pitkin leveysasteen ympyrää pohjoisella yksikkö pallopuoliskolla sisältää kaartumista vasemmalle (ajattellaan pieni ympyrä pohjoisnavan ympäri). Leveysasteelle lähellä päiväntasaajaa tämä efekti on pieni ja yhdensuuntainen vektorikenttä loppuu pisteeseen, joka osoittaa lievästi oikealle, t.s. kulmassa α , joka on melkein 2π vasemmalle. Oheinen alue on melkein 2π , joka on koko pohjoisen pallopuoliskon pinta-ala.

Kaavassa 5.3 oli infinitesimaalinen version Riemannin kaarevuudesta

$$X_{;k;l}^i - X_{;l;k}^i = - \sum_j R_{jkl}^i X^j.$$

Vasen puoli kuvaa vaikutuksia vektorikenttään X , kun liikutaan infinitesimaalin suunnikkaan suuntaan: ensin suuntaan k , sitten suuntaan l , sitten takaisinpäin pitkin polkua, joka meni ensin suuntaan l , sitten suuntaan k . R_{jkl}^i antaa suuruuden, jonka alkuperäisen vektorikentän X j komponentti muuttuu, kun i komponentti muuttuu.

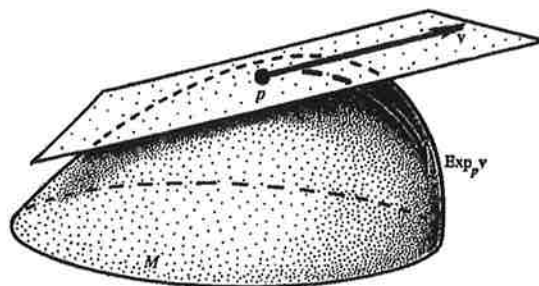
8 Geodeesit ja globaali geometria

Olkoon M sileä Riemannin monisto. Differentiaaliyhtälöiden teorian mukaan on olemassa yksikäsitteinen geodeesi läpi jokaisen pisteen jokaiseen suuntaan. Oletetaan, että M on (geodeettisesti) *täydellinen* eli geodeesi voi jatkua rajattomasti. Tämä edellytys tarkoittaa, että Riemannin monistolla M on reuna ja sillä ei ole puuttuvia pisteitä.

8.1 Eksponentiaalinen kuvaus

Määritelmä 8.1. *Eksponentiaalinen kuvaus* Exp_p pisteessä p Riemannin monistossa M kuvaa tangenttiavaruuden T_pM Riemannin monistoon M lähettämällä vektorin \mathbf{v} tangenttiavaruudesta T_pM pisteeseen Riemannin monistossa M etäisyydelle $|\mathbf{v}|$ pitkin geodeesia pisteestä p suuntaan \mathbf{v} .

(Kuva 18).

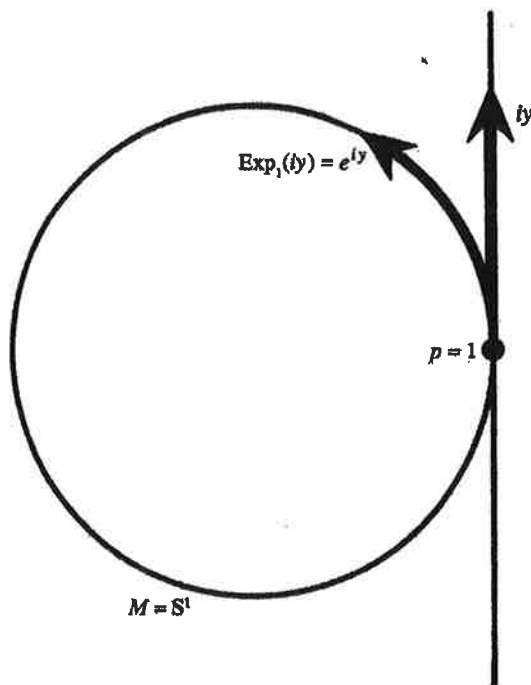


Kuva 18: Eksponentiaalinen kuvaus Exp_p kuvaa $\mathbf{v} \in T_pM$ pisteeseen etäisyydelle $|\mathbf{v}|$ pitkin geodeesia suuntaan \mathbf{v} .

Esimerkiksi, olkoon M yksikköympyrä kompleksisella tasolla \mathbb{C} , $p = 1$, $T_pM = \{iy\}$. Silloin

$$\text{Exp}_1(iy) = e^{iy}.$$

(Kuva 19.)



Kuva 19: Ympyrälle M tangentiavaruus on $T_1M = \{iy\}$, ja eksponentiaalinen kuvaus on $\text{Exp}_1(iy) = e^{iy}$.

Toisena esimerkkinä, olkoon M avaruuden \mathbf{R}^n rotaatioiden Lien ryhmä $SO(n)$, esitettynä

$$SO(n) = \{n \times n \text{ matriisit } A : AA^t = I \text{ ja } \det A = 1\} \subset \mathbf{R}^{n^2}.$$

Tangentiavaruus identtisyysmatriisissa I sisältää kaikki vinosymmetrisetmatriisit,

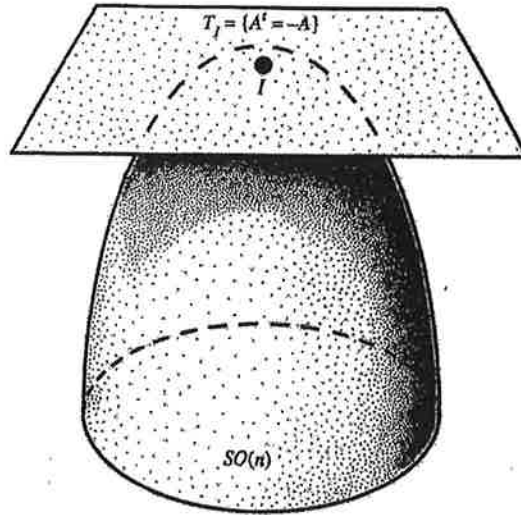
$$T_I SO(n) = \{A : A^t = -A\},$$

koska differentioimalla määräävän suhteen $AA^t = I$ saadaan $IA^t + AI^t = 0$, joka on $A^t = -A$. (Kuva 20.)

Eksponentiaalinen kuvaus tangentiavaruudessa $T_I SO(n)$ on annettu eksponentiaalisten matriisien funktioina, jotka tunnetaan lineaarialgebrasta:

$$\text{Exp}_I(A) = e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \dots$$

Mille tahansa pisteelle p sileällä Riemannin monistolla M , Exp_p on sileä diffeomorfismi origossa. Tämä tarjoaa koordinaatit, joita kutsutaan *normaalikoordinaateiksi* ympäristössä p . Normaalikoordinaateilla on käyttöä metriikassa $g_{ij} = I$ ensimmäiseen järjestykseen pisteessä p . (Vertaa Lauseeseen 2.9.)



Kuva 20: Erityiselle ortogonaaliselle ryhmälle $SO(n)$ tangentialiavaruus on $T_I SO(n) = \{A : A^t = -A\}$, ja eksponentiaalinen kuvaus on $\text{Exp}_I(A) = e^A$.

Pieni avoin pallo normaalikoordinaateilla on yksinkertainen ja konvekksi (i. kupe-
ra): on olemassa yksikäsitteinen geodeesi minkä tahansa kahden pisteen välillä. (Yk-
sinkertaisesti tämä tarkoittaa useimmissa tapauksissa sitä, että konvekksi tarkoittaa
ainakin yhtä.) Vielä lisäksi tämä geodeesi on lyhin polku kaikissa Riemannin mo-
nistoissa M kahden pisteen välillä.

Hopf-Rinow'n lause sanoo, että jos vain Riemannin monisto M on yhtenäinen,
niin on olemassa geodeesi, joka antaa lyhimmän polun minkä tahansa kahden pisteen
välille. Erityisesti Exp_p kuvaa tangentialiavaruuden $T_p M$ Riemannin monistoon M .

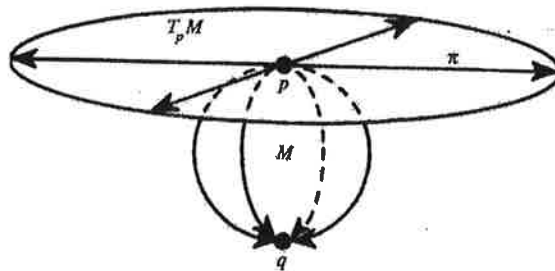
8.2 Liittopisteet ja Jacobin kentät

Vaikka Exp_p on diffeomorfismi origossa, niin sen ei tarvitse olla diffeomorfismi kaikis-
sa pisteissä $\mathbf{v} \in T_p M$. Esimerkiksi olkoon M yksikköpallo ja olkoon p pohjoisnapa.
Silloin Exp_p kuvaa kiekon $\{\mathbf{v} \in T_p M : |\mathbf{v}| < \pi\}$ diffeomorfistisesti pinnalle $M - \{q\}$,
missä q on etelänapa, mutta se kuvaa kokoympyrän $\{|\mathbf{v}| = \pi\}$ joukoksi $\{q\}$. (Kuva
21.)

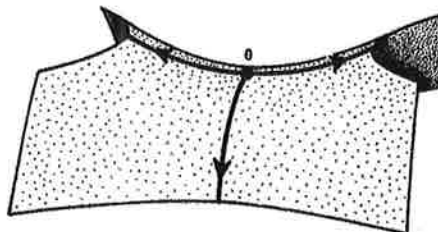
Toisaalta, satulalle

$$\{z = -x^2 + y^2\}$$

Kuvassa 22, Exp_0 on globaali diffeomorfismi.



Kuva 21: Pallopinnalla M Exp_p kuvaa avoimen kiekon diffeomorfistisesti pinnalle $M - \{q\}$, mutta kuvaa koko reunaympyrän pisteeseen $\{q\}$. Yksittäistä pistettä q eksponentiaaliselle kuvaukselle Exp_p kutsutaan liittopisteeksi.



Kuva 22: Satulalle $\{z = -x^2 + y^2\}$ Exp_0 on globaali diffeomorfismi.

Pistettä $q = \text{Exp}_p \mathbf{v} \in M$ kutsutaan *liittopisteeksi* pisteelle p , jos Exp_p ei ole diffeomorfismi pisteessä \mathbf{v} . Tämä siinä tapauksessa, että jos lineaarinen kuvaus $D\text{Exp}_p \mathbf{v}$ on singulaarinen. Tämä ilmenee silloin, kun liikutaan kohtisuoraan vektoria \mathbf{v} vastaan pisteessä $\mathbf{v} \in T_p M$, mikä vastaa nopeutta 0 pisteessä $q \in M$, tai läheisiä geodeeseja pisteestä p kohti pistettä q . Sellaiset liittopisteet q ovat karakterisoitu ”Jacobin” vektorikentän J variaatiolla pitkin geodeesia, joka on häviävä pisteissä p ja q , mille pituuden toinen variaatio on nolla. Toisin sanoen, olkoon $\gamma_s(t)$ tulos siitä, että annetaan äärellisen palan geodeesia $\gamma_0(t)$ liukua etäisyydelle $s|J(t)|$ suuntaan $J(t)$. Olkoon $L(s) = \text{pituus } \gamma_s$. Silloin $L''(0) = 0$.

Huomautus. Kun geodeesi kulkee liittopisteen kautta, se ei ole enää lyhin geodeesi pisteestä p .

Seuraava lause on esimerkki kaarevuuden ja liittopisteiden suhteesta.

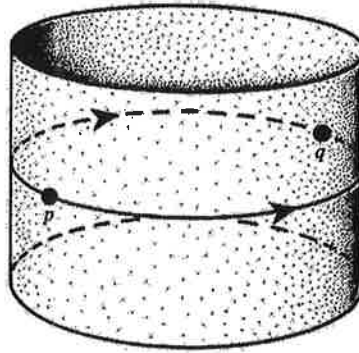
Lause 8.2. *Olkoon M sileä Riemannin monisto. Jos sektionaalinen kaarevuus K jokaisessa pisteessä jokaiselle sektiolle on rajoitettu vakiolla K_0 , niin silloin etäisyydestä tahansa pisteestä liittopisteeseen on ainakin $\pi/\sqrt{K_0}$. Yleisesti, jos sektionaalinen kaarevuus K on ei-postiivinen, niin siellä ei ole liittopisteitä, ja Exp_p on (paikallinen) diffeomorfismi jokaisessa pisteessä. (Sanotaan, että Exp_p on upottaminen tai peitekuvaus.)*

8.3 Leikkauspisteet ja injektiivisyysäde

Leikkauspiste on viimeinen piste geodeesilla lähdetessä pisteestä p , missä geodeesi säilyy lyhimpänä polkuna pisteestä p . Leikkauspiste q voisi olla liittopiste pisteelle p , kuten antipodaalinen piste pallopinnalla, missä infinitesimaalisesti lähdellä geodeettistä fokusta. Vaihtoehtoisesti, leikkauspiste q voisi olla kuten antipodaalinen piste sylinterillä kuten Kuvassa 23, missä geodeesit kulkee vastakkaiseen suuntaan pisteestä p lopulta kohtaavat.

Leikkauspisteessä Exp_p on injektiivinen, diffeomorfismi. Mielivaltaisen pisteen ja leikkauspisteen infimum etäisyyttä kutsutaan moniston *injektiivisyysädeksi*. Esimerkiksi a -säteisen sylinterin injektiivisyysäde on πa .

Rajoittamalla sektionaalinen kaarevuus ei rajoiteta injektiivisyysädettä pois arvosta 0. Sylinterillä, varustettuna Gaussin kaarevuudella 0, voi olla mielivaltaisen pieni säde ja injektiivisyysäde. Kuten myös hyperbolisella monistolla varustettuna negatiivisella kaarevuudella voi olla pieni injektiivisyysäde. Yleinen hypoteesi



Kuva 23: Pisteestä p lähtevä geodeesit sylinterillä eivät ole enää lyhimpiä polkuja leikkauspisteessä q .

globaaleille teorioille on rajoitettu geometria: sektionaalinen kaarevuus rajoitettu yläpuolella ja injektiivisyysäde rajoitettu alapuolella.

8.4 Bonnet'n lause

Bonnet'n lause vetää globaalin johtopäätöksen paikallisesta kaarevuushypoteesista:

Lause 8.3. *Olkoon M sileä (yhtenäinen) Riemannin monisto varustettuna sektionaalisella kaarevuudella, joka on rajoitettu alapuolelta positiivisella vakiolla K_0 . Silloin Riemannin moniston M halkaisija on korkeintaan $\pi/\sqrt{K_0}$.*

Riemannin moniston halkaisija on suurin etäisyys minkä tahansa kahden pisteen välillä. Yksikköpallo, varustettuna sektionaalisella kaarevuudella $K = 1$ ja halkaisijalla π (etäisyys mitattu pallopinnalla) osoittaa, että Bonnet'n lause on terävä.

Seuraavaksi esitetään todistus luonnos aloittaen kolmella apulauseella. Ensimmäinen apulause suhteuttaa geodeesin pituuden toisen variaation sektionaaliseen kaarevuuteen K . Täydellinen todistus löytyy esimerkiksi lähteestä [3] s.352-353.

Apulause 8.4. *Olkoon γ äärellinen geodeesin pala varustettuna yksikkötangentilla T . Olkoon W ortogonaalinen ja yhdensuuntainen yksikkövariaatiovektorikenttä geodeesin palassa γ . Silloin alkuperäinen pituuden toinen variaatio annetaan muodossa*

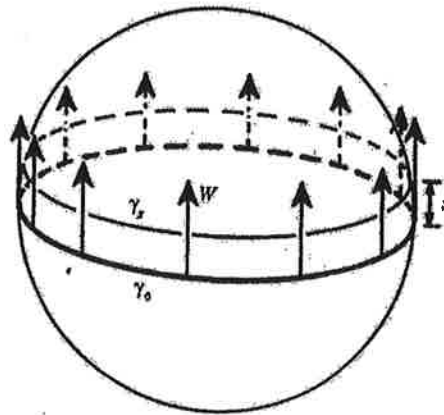
$$L''(0) = - \int K(T, W). \quad (8.1)$$

Esimerkiksi, olkoon γ yksikköpallon ekvaattori kuten Kuvassa 24. Olkoon W ylöspäin suunnattu yksikkövektorikenttä. Silloin ympyrän leveysaste γ_s , etäisyydellä

s geodeesin palasta γ , on $L(s) = 2\pi \cos s$. Näin ollen

$$L''(0) = -2\pi = - \int K,$$

sillä $K = 1$.



Kuva 24: Ekvaattorin pituuden toinen variaatio on $L''(0) = - \int K(T, W) = 2\pi$.

Tämä apulause havainnollistaa aikaisempaa huomiota 5.3, että positiivinen karevuus tarkoittaa, että yhdensuuntaiset geodeesit lähestyvät toisiaan (ja siitä johtuu, että ristisektionaalinen etäisyys pienenee).

Huomaa, että skaalaamalla pituuden a variationaalista vektorikenttää aW saadaan

$$L''(0) = \int -a^2 K(T, W). \quad (8.2)$$

Toinen apulause käsittelee muuttuvan pituuden variationaalista vektorikenttää.

Apulause 8.5. *Olkkoon γ pituuden $L(0)$ avaruuden \mathbf{R}^2 x -akselin alkuperäinen jana. Olkkoon $f(x)$ sileä pystysuora vektorikenttä. Silloin pituuden alkuperäinen toinen variaatio on annettu muodossa*

$$L''(0) = \int_0^{L(0)} f'(x)^2 dx. \quad (8.3)$$

Todistus. Liuttamalla termiä $sf(x)$ saadaan pituuden

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_0^{L(0)} [1 + s^2 f'(x)^2]^{1/2} dx \\ &= \int_0^{L(0)} [1 + \frac{1}{2} s^2 f'(x)^2 + \dots] dx \end{aligned}$$

käyrä. Derivointi antaa yhtälön 8.3. □

Kolmas apulause ilmoittaa ilman todistusta tuloksen, joka syntyy kun yhdistetään kahden aikaisemman apulauseen yhtälöiden (8.2) - (8.3) tulokset.

Apulause 8.6. *Olkoon γ äärellinen palanen geodeesia varustettuna yksikkötangentilla T . Olkoon fW variationaalinen vektorikenttä, missä W on ortogonaalinen ja yhdensuuntainen yksikkövariationaalinen vektorikenttä äärellisessä palasessa geodeesia γ . Silloin pituuden alkuperäinen toinen variaatio on annettu muodossa*

$$L''(0) = \int_{\gamma} [f'^2 - f^2 K(T, W)]. \quad (8.4)$$

Oletetaan halkaisija $M > \pi/\sqrt{K_0}$. Silloinen on olemassa lyhin geodeesi $\gamma(t)$ pituudelle $l > \pi/\sqrt{K_0}$. Näin ollen $K \geq K_0 > \pi^2/l^2$.

Oletetaan, että γ on parametrisoitu kaaren pituudella t . Olkoon W ortogonaalinen ja yhdensuuntainen yksikkövektorikenttä geodeesilla γ . Otetaan variationaaliseksi vektorikentäksi $(\sin \frac{\pi}{l} t) W$, joka häviää geodeesin γ päätepisteissä. Yhtälön 8.4 mukaan pituuden alkuperäinen toinen variaatio annetaan muodossa

$$\begin{aligned} L''(0) &= \int_0^l \left(\frac{\pi}{l} \cos \frac{\pi}{l} t \right)^2 - \left(\sin^2 \frac{\pi}{l} t \right) K(T, W) \\ &< \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{\pi}{l} t - \frac{\pi^2}{l^2} \sin^2 \frac{\pi}{l} t = 0. \end{aligned}$$

Tämä ristiriitaisuus valinnasta γ *lyhimmäksi* poluksi päättää todistuksen.

Huomautus. Bonnet'n lauseen todistuksessa olisi voitu valita minkä tahansa yksikkövektorin, joka on ortogonaalinen tangenttivektoria T vastaan, vektorikenttään W geodeesin γ alkupisteessä (laajentamalla W yhdensuuntaissiirtymällä). Määräämällä keskiarvon yli kaikkien sellaisten valintojen, antaa luvan korvata raja K sen rajan keskiarvolla, Riccin kaarevuudella. Myer'in lause ottaa mukaan sen, että jos $\text{Ric} \geq (n-1)K_0$, silloin halkaisija $M \geq \pi/\sqrt{K_0}$.

Viitteet

- [1] Boyer C. *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osa II*, WSOY, Juva, 1994
- [2] Browder A. *Mathematical analysis, an Introduction*, Springer, New York, 1996

- [3] do Carmo M. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall, New Jersey, 1976
- [4] Chern S., Chern W. and Lam K. *Lectures On Differential Geometry*, World Scientific Publishing, Singapore, 1999
- [5] Lehto O. *Differentiaali ja integraalilaskenta II*, H.Hästesko-Offset, Helsinki, 1970
- [6] Lehtonen A. *Differentiaaligeometriaa*, Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 1993
- [7] Maalampi J. ja Perko T. *Lyhyt modernin fysiikan johdatus*, Limes ry:n graafiset laitokset, Helsinki, 1997
- [8] Monastyrsky M. *Riemann, topology, and physics*, Birkhäuser, Boston 1987
- [9] Morgan F. *Riemannian Geometry, a Beginner's Guide*, Jones and Bratlett Publishers, Boston, 1993
- [10] Purmonen V. *Differentiaali- ja integraalilaskentaa II osa*, Jyväskylän yliopistopaino, Jyväskylä, 2000
- [11] Spivak M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry II*, Publish or Perish, Houston 1979

