Mitta- ja integroimisteoria

Kirjalliset harjoitustehtävät
Juha-Matti Huusko
175783
Itä-Suomen yliopisto
13. maaliskuuta 2011

Johdanto

Tämä kirjoitus sisältää kirjallisia harjoitustöitä kurssiin Mitta- ja integroimisteoria a. Kurssia pidetään Itä-Suomen yliopistossa, Joensuun kampuksella. Kurssin luentomonisteena toimii [1].

1. Mitallisia joukkoja koskevat lemmat

Huomautus 1.1. Merkitään mitallisten joukkojen $E \subset \mathbb{R}^n$ kokoelmaa kirjaimella $\mathcal{M}$. Tämän lisäksi merkitään joukon $E \subset \mathbb{R}^n$ komplementtia $E^c = \mathbb{R}^n \backslash E$.

Lemma 1.2. *Jos* $E_1, E_2 \in \mathcal{M}$, *niin* $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{M}$

Todistus. Olkoon $A \subset \mathbb{R}^n$ mielivaltainen testijoukko. Koska $E_2 \in \mathcal{M}$, niin Määritelmän [1, Määritelmä 2.4.1] mukaan E_2 toteuttaa Caratheodory'n ehdon erityisesti siinä tapauksessa, jossa testijoukoksi valitaan $A \cap E_1^c$. Siis pätee

$$m^*(A \cap E_1^c) = m^*(A \cap E_1^c \cap E_2) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c). \tag{1.1}$$

Koska

$$A \cap (E_1 \cup E_2) = (A \cup E_1) \cup (A \cap E_2 \cap E_1^c),$$

niin ulkomitan subadditiivisuuden [1, Lause 2.3.2 (3)] nojalla

$$m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) \leq m^*(A \cup E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c). \tag{1.2}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
& & & m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]^c) \\
&(\text{de Morgan}) & &= m^*(A \cap [E_1 \cup E_2]) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&(1.2) & &\leq m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_2 \cap E_1^c) + m^*(A \cap E_1^c \cap E_2^c) \\
&(1.1) & &= m^*(A \cap E_1) + m^*(A \cap E_1^c) \\
&(E_1 \in \mathcal{M}) & &= m^*(A).
\end{aligned}$$

Määritelmän [1, Määritelmä 2.4.1] mukaan $(E_1 \cup E_2) \in \mathcal{M}$. $\square$

Seuraavat lemmat ovat luentomonisteen [1, ss. 14-15] lemmat 2.4.4 ja 2.4.5.

Lemma 1.3. *Olkoot* $E_1, \ldots, E_k \subset \mathbb{R}^n$ *mitallisia. Tällöin joukot* $\cup_{i=1}^k E_i$ *ja* $\cap_{i=1}^k E_i$ *ovat mitallisia.*

Todistus.

Olkoot $E_i \subset \mathbb{R}^n$ mitallisia kaikilla $i \in \mathbb{N}$. Osoitetaan aluksi induktiolla, että $\cup_{i=1}^k E_i \in \mathcal{M}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Jos $k = 1$, väite on triviaali. Oletetaan toisaalta, että $\cup_{i=1}^k E_i \in \mathcal{M}$ jollakin $k \in \mathbb{N}$. Tällöin, koska myös $E_{k+1} \in \mathcal{M}$, niin $\cup_{i=1}^{k+1} E_i = \cup_{i=1}^k E_i \cup E_{k+1} \in \mathcal{M}$ Lemman (1.2) perusteella. Induktioperiaatteen nojalla $\cup_{i=1}^k E_i \in \mathcal{M}$ kaikilla $k \in \mathbb{N}$.

Väitteen $\cap_{i=1}^k E_i \in \mathcal{M}$ todistaminen onnistuu nyt Lemman [1, Lemma 2.4.3] sekä de Morganin lain avulla. Lemman 2.4.3 mukaan komplementin ottaminen ei vaikuta joukon mitallisuuteen eli $E \in \mathcal{M} \Rightarrow E^c \in \mathcal{M}$. Nyt

$$\begin{aligned} & E_1, \ldots, E_k \in \mathcal{M} \\ \text{(L.2.4.3)} \quad & \Rightarrow E_1^c, \ldots, E_k^c \in \mathcal{M} \\ \text{(L.1.2)} \quad & \Rightarrow (\cup_{i=1}^k E_i^c) \in \mathcal{M} \\ \text{(L.2.4.3, de Morgan)} \quad & \Rightarrow (\cup_{i=1}^k E_i^c)^c = \cap_{i=1}^k E_i \in \mathcal{M}. \end{aligned}$$

□

Lemma 1.4. *Olkoot* $E_1, \ldots, E_k \subset \mathbb{R}^n$ *mitallisia ja erillisiä (ts. pareittain pistevieraita eli* $E_i \cap E_j = \emptyset$ *aina kun* $i \neq j$*.) Tällöin kaikilla* $A \subset \mathbb{R}^n$ *pätee*

$$m^*(A \cap (\cup_{i=1}^k E_i)) = \sum_{i=1}^k m^*(A \cap E_i.)$$

Todistus.

Osoitetaan väite induktiolla luvun k suhteen. Jos $k = 1$, asia on selvä. Induktio-oletus: oletetaan, että väite pätee jollekin $k - 1 \in \mathbb{N}$. Koska joukot E_i ovat erillisiä, pätee

$$A \cap [\cup_{i=1}^k E_i] \cap E_k = A \cap E_k$$

ja

$$A \cap [\cup_{i=1}^k E_i] \cap E_k^c = A \cap [\cup_{i=1}^{k-1} E_i].$$

Käyttämällä lisäksi joukon E_k mitallisuutta saadaan

$$
\begin{aligned}
m^*(A \cap [\cup_{i=1}^k E_i]) &= m^*(A \cap [\cup_{i=1}^k E_i] \cap E_k) + m^*(A \cap [\cup_{i=1}^k E_i] \cap E_k^c) \\
&= m^*(A \cap E_k) + m^*(A \cap [\cup_{i=1}^{k-1} E_i]) \\
&= m^*(A \cap E_k) + \sum_{i=1}^{k-1} m^*(A \cap E_i.
\end{aligned}
$$

□

Viimeinen yhtäsuuruus pätee induktio-oletuksen perusteella. Väite seuraa.

2. Riemannin integraalin yhteys Lebesguen integraaliin

Väite. Jos rajoitettu funktio $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ on Riemann-integroituva, niin se on Lebesgue-integroituva joukossa $[a, b]$ ja integraalien arvot ovat samat.

Väitteen todistamiseksi palautamme mieleen Riemannin integraalin määritelmän. Määritelmät 2.1 ja 2.2 sekä Lause 2.3 ovat peräisin kirjasta [3, ss. 120-123]. Merkinnät noudattavat suurimmaksi osaksi kirjan merkintöjä, mutta niitä on muokattu hieman.

Määritelmä 2.1. Olkoon $[a, b]$ väli. Välin $[a, b]$ *jako* P on äärellinen joukko pisteitä $x_1, x_2, \ldots, x_n$ siten, että

$$a = x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Kaikilla $i = 1, \ldots, n$ merkitsemme

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

Olkoon $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ rajoitettu. Jokaisella välin $[a, b]$ jaolla P käytämme merkintöjä

$$
\begin{aligned}
M_i &= \sup\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}; \\
m_i &= \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}; \\
\mathfrak{Y}(P, f) &= \sum_{i=1}^{k} M_i \Delta x_i; \\
\mathfrak{A}(P, f) &= \sum_{i=1}^{k} m_i \Delta x_i.
\end{aligned}
$$

Lisäksi merkitsemme

$$\mathfrak{Y}\int_a^b f(x)dx = \inf\{\mathfrak{Y}(P,f) : P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}$$
$$\mathfrak{A}\int_a^b f(x)dx = \sup\{\mathfrak{Y}(P,f) : P \text{ on välin } [a,b] \text{ jako}\}.$$

Nimityksiä:

- $\mathfrak{Y}(P,f)$ on funktioon f, väliin $[a,b]$ ja sen jakoon P liittyvä *yläsumma*;
- $\mathfrak{A}(P,f)$ on vastaava *alasumma*;
- $\mathfrak{Y}\int_a^b f(x)dx$ on funktion f *yläintegraali* yli välin $[a,b]$;
- $\mathfrak{A}\int_a^b f(x)dx$ on vastaava *alaintegraali*.

Jos

$$\mathfrak{Y}\int_a^b f(x)dx = \mathfrak{A}\int_a^b f(x)dx,$$

niin merkitsemme

$$\mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx = \mathfrak{Y}\int_a^b f(x)dx = \mathfrak{A}\int_a^b f(x)dx$$

ja sanomme, että funktio f on *Riemann-integroituva* välillä $[a,b]$. Lukua

$$\mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx$$

kutsutaan funktion f *Riemannin integraaliksi* yli välin $[a,b]$. Jos asiayhteydestä on selvää, että tarkoitamme funktion f Riemannin integraalia merkitsemme lyhyemmin

$$\int_a^b f(x)dx = \mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx.$$

Määritelmä 2.2. Sanomme, että jako P^* on *tiheämpi* kuin jako P, jos $P^* \supset P$. Lisäksi jos P_1 ja P_2 ovat saman välin jakoja, sanomme joukko-opin nimitysten mukaisesti, että $P_1 \cup P_2$ on jakojen *yhdiste*.

Lause 2.3. *Jos P^* on tiheämpi, kuin P, niin*

$$\mathfrak{Y}(P^*, f) \leq \mathfrak{Y}(P, f) \text{ ja } \mathfrak{A}(P^*, f) \geq \mathfrak{A}(P, f).$$

Todistus.

Oletetaan aluksi, että $P^* = P \cup \{x^*\}$. Siis jako P^* sisältää jakoon P verrattuna yhden ylimääräisen pisteen. Olkoon

$$x_{i-1} < x^* < x_i,$$

missä x_{i-1} ja x_i ovat jaon P kaksi peräkkäistä pistettä. Merkitään

$$\begin{aligned} w_1 &= \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x^*\}; \\ w_2 &= \inf\{f(x) : x^* \leq x \leq x_i\}. \end{aligned}$$

Nyt $w_1, w_2 \geq m_i = \inf\{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$, koska

$$\begin{gathered} \{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x^*\} \subset \{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \text{ ja} \\ \{f(x) : x^* \leq x \leq x_i\} \subset \{f(x) : x_{i-1} \leq x \leq x_i\}. \end{gathered}$$

Näin ollen

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}(P^*, f) - \mathfrak{A}(P, f) &= w_1[x^* - x_{i-1}] + w_2[x_i - x^*] - m_i[x_i - x_{i-1}] \\ &= (w_1 - m_i)[x^* - x_{i-1}] + (w_2 - m_i)[x_i - x^*] \geq 0. \end{aligned}$$

Siis jos jakoon P lisätään yksi piste, alasumma ei pienene. Yleisessä tapauksessa lisätään k pistettä, $\#P^* - \#P = k \in \mathbb{N}$. Toistamalla ylläoleva päättely k kertaa nähdään, että alasumma ei pienene tässäkään tapauksessa. Näin saadaan alasummia koskeva väite. Yläsummia koskeva väite todistetaan vastaavasti. □

Siis jos jakoa tihennetään, yläsumma pysyy samana tai pienenee ja alasumma pysyy samana tai kasvaa. Nyt voimme todistaa tämän luvun alussa esitetyn väitteen, joka esitetään luentomonisteessa [1, Huomautus 3.2.6 (a)]. Todistus on poimittu lähes suoraan kirjasta [3, ss. 322-324]. Esitys on muutettu aiempien merkintöjen mukaiseksi ja jos sanamuotoa vaihtamalla kirjoittaja on saanut todistuksesta itselleen selvemmän, sanamuotoa on vaihdettu. Huonosti suunnitellun aikataulun takia todistuksen yksityiskohdat ovat jääneet purkamatta auki.

Lause 2.4. *Jos rajoitettu funktio $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ on Riemann-integroituva, niin se on Lebesgue-integroituva joukossa $[a,b]$ ja integraalien arvot ovat samat.*

Todistus. Olkoon $f : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ rajoitettu. Määritelmän 2.1 ja Lauseen 2.3 mukaan on olemassa jono $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ välin $[a,b]$ jakoja siten, että

1. jako P_{k+1} on tiheämpi kuin P_k kaikilla $k \in \mathbb{N}$;
2. $\Delta x_i < 1/k$ kaikilla $i = 1, \ldots, \#P_k - 1$;
3. pätee

$$\lim_{k\to\infty} \mathfrak{A}(P_k, f) = \mathfrak{A}\int_a^b f(x)dx \text{ ja } \lim_{k\to\infty} \mathfrak{Y}(P_k, f) = \mathfrak{Y}\int_a^b f(x)dx.$$

Jos $P_k = x_0, x_1, \ldots, x_n$, missä $x_i \leq x_j$ kaikilla $i \leq j$ sekä $x_0 = a, x_n = b$, merkitään

$$\mathfrak{Y}_k(a) = \mathfrak{A}_k(a) = f(a).$$

Olkoon lisäksi $\mathfrak{Y}_k(x) = M_i, \mathfrak{A}_k(x) = m_i$ kaikilla $x_{i-1} \leq x \leq x_i$ (missä M_i ja m_i ovat kuten edellä). Nyt

$$\mathfrak{A}(P_k, f) = \int_{[a,b]} \mathfrak{A}_k dm, \mathfrak{Y}(P_k, f) = \int_{[a,b]} \mathfrak{Y}_k dm,$$

ja

$$\mathfrak{A}_1(x) \leq \mathfrak{A}_2(x) \leq \ldots \leq f(x) \leq \ldots \leq \mathfrak{Y}_2(x) \leq \mathfrak{Y}_1(x) \tag{2.1}$$

kaikilla $x \in [a,b]$, koska P_{k+1} on tiheämpi kuin P_k. Epäyhtälöketjun (2.1) nojalla on olemassa raja-arvot

$$\mathfrak{A}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{A}_k(x), \mathfrak{Y}(x) = \lim_{k\to\infty} \mathfrak{Y}_k(x).$$

Tässä $\mathfrak{A}$ ja $\mathfrak{Y}$ ovat rajoitettuja mitallisia funktioita väliltä $[a,b]$ reaalilukujen joukkoon ja kaikilla $x \in [a,b]$ pätee

$$\mathfrak{A}(x) \leq f(x) \leq \mathfrak{Y}(x).$$

Lisäksi

$$\int_{[a,b]} \mathfrak{A} dm = \mathfrak{A}\int_a^b f(x)dx, \int_{[a,b]} \mathfrak{Y} dm = \mathfrak{Y}\int_a^b f(x)dx$$

edellisten kohtien ja Monotonisen konvergenssin lauseen [1, Lause 3.2.4] nojalla.

Tässä funktiosta f ei ole oletettu muuta kuin se, että $f : [a, b] \to \mathbb{R}_+$ on rajoitettu. Jotta f olisi Riemann-integroituva, alaintegraalin ja yläintegraalin tulee olla yhtäsuuria, jolloin siis pätee

$$\int_{[a,b]} \mathfrak{A} dm = \int_{[a,b]} \mathfrak{Y} dm.$$

Koska $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{Y}$, niin tämä pätee täsmälleen silloin, kun $\mathfrak{A}(x) = \mathfrak{Y}(x)$ m.k. $x \in [a, b]$. Tällöin $\mathfrak{A}(x) = f(x) = \mathfrak{Y}(x)$ m.k. $x \in [a, b]$ ja siten f on mitallinen ja

$$\int_{[a,b]} f dm = \mathfrak{R}\int_a^b f(x)dx.$$

□

Viitteet

[1] Latvala, V. *Mitta- ja integroimisteoria*. Luentorunko Itä-Suomen yliopiston kurssiin, Joensuu, 2008.

[2] Royden, H.L. *Real Analysis*. Macmillan Publishing Company, New York, 1988.

[3] Rudin, W. *Principles of Mathematical Analysis*. McGraw-Hill, Inc, New York, 1976. (Kirja löytyy esimerkiksi internetistä sivulta
http://dangtuanhiep.files.wordpress.com/2008/09/principles_of_mathematical_analysis_walter_rudin.pdf,
Luettu 13.3.2011.)