Kompleksianalyysi a
Syksy 2016
Harjoitus 1, 15.9.2016

1. Olkoon $z = x + iy \in \mathbb{C}$. Esitä seuraavat reaaliluvut muuttujien x ja y avulla:

   (i) $\Re(z^2)$,

   (ii) $\Im(z^2)$,

   (iii) $\Re\left(\frac{1}{z}\right)$,

   (iv) $\Im\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

   Merkinnät $\Re(z)$ and $\Im(z)$ tarkoittavat luvun z *reaaliosaa* ja *imaginaariosaa*, vastaavasti.

2. Osoita käyttämällä esitystä $z = x + iy \in \mathbb{C}$, että

   (i) $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$,

   (ii) $z - \overline{z} = 2i\,\Im(z)$,

   (iii) $\overline{(\overline{z})} = z$,

   (iv) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

3. Esitä osamäärä $\frac{3-4i}{1-2i}$ muodossa $x + yi$, missä $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Osoita, että $\Re(iz) = -\Im(z)$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

5. Ratkaise seuraavat yhtälöt muuttujan z suhteen:

   (a) $iz = 8 - zi$,

   (b) $\frac{z}{z-1} = 1 - 5i$,

   (c) $(2 - i)z + 8z^2 = 0$,

   (d) $z^2 + 25 = 0$.

6. Osoita, että jos $\Re(z) > 0$, niin $\Re\left(1/z\right) > 0$.

7. Olkoot $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Osoita, että $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$. (Piste viittaa tässä tavalliseen kompleksilukujen kertolaskuun. Yleensä sitä ei kirjoiteta näkyviin, mutta tässä halutaan täsmentää, mitä lukua milloinkin konjugoidaan.)

8. Osoita, että kolmioepäyhtälössä $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ pätee yhtäsuuruus jos ja vain jos z_1 on luvun z_2 ei-negatiivinen moninkerta tai $z_2 = 0$.

Complex Analysis a
Fall 2016
Exercises 1, 15.9.2016

---

1. Let z be complex number. Write the following in terms of x and y, where $x, y \in \mathbb{R}$ and $z = x + iy$.

   (i) $\Re(z^2)$,

   (ii) $\Im(z^2)$,

   (iii) $\Re\left(\frac{1}{z}\right)$,

   (iv) $\Im\left(\frac{1}{z^2}\right)$.

   Here and from now on $\Re z$ and $\Im z$ refer to the real and imaginary parts of $z \in \mathbb{C}$, respectively: for $z = x + iy$, this means $x = \Re z$ and $y = \Im z$.

2. Let $z \in \mathbb{C}$. We write $\overline{z}$ for the complex conjugate of z; if $z = x + iy$, then $\overline{z} = x - iy$. Show using the representation $z = x + iy$ that the following equalities are true.

   (i) $z + \overline{z} = 2\,\Re(z)$,

   (ii) $z - \overline{z} = 2i\,\Im(z)$,

   (iii) $\overline{(\overline{z})} = z$,

   (iv) $|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$.

3. Write the fraction $\frac{3-4i}{1-2i}$ in the form $x + yi$, where $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Show that $\Re(iz) = -\Im(z)$ for all $z \in \mathbb{C}$.

5. Solve for z:

   (a) $iz = 8 - zi$,

   (b) $\frac{z}{z-1} = 1 - 5i$,

   (c) $(2 - i)z + 8z^2 = 0$,

   (d) $z^2 + 25 = 0$.

6. Show that if $\Re(z) > 0$, then $\Re(1/z) > 0$.

7. Let $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2 \in \mathbb{C}$. Show that $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z}_1 \cdot \overline{z}_2$. (The dot means normal (complex) multiplication, and wouldn't usually be written. It's there now just to make it easier to see what exactly is being conjugated.)

8. Show that the equality in the triangle inequality $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ holds (that is, if $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$) if and only if z_1 is a non-negative multiple of z_2 or $z_2 = 0$.