Kompleksianalyysi a
Syksy 2016
Harjoitus 2, 22.9.2016

1. Sievennä.

   (a) $|(1+2i)/(-2+i)|$,
   (b) $|(\overline{2+2i})(2-3i)(4i-3)|$,
   (c) $|i(2+i)^3/(i-1)^2|$,
   (d) $|(\pi+i)^{15}/(1-\pi i)^{15}|$.

2. Esitä seuraavien kompleksilukujen argumentit ja polaarimuodot.

   (a) $-1/2$,
   (b) $-\pi i$,
   (c) $-2\sqrt{3}-2i$,
   (d) $(1-i)(-\sqrt{3}+i)$,
   (e) $(\sqrt{3}-i)^2$,
   (f) $(-1+\sqrt{3}i)/(2+2i)$.

3. Osoita, että vektori $z_1 \neq 0$ on yhdensuuntainen vektorin $z_2 \neq 0$ kanssa (ts. $z_1 = \alpha z_2$, missä $\alpha \in \mathbb{R}$) jos ja vain jos $\Im(z_1\overline{z}_2) = 0$.

4. Kirjoita seuraavat kompleksiluvut muodossa $x + iy$.

   $$\text{(a)}\quad e^{-i\pi/4}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{e^{1+i3\pi}}{e^{-1+i\pi/2}}, \qquad \text{(c)}\quad e^{e^{i}}.$$

5. Osoita, että kaikilla $z \in \mathbb{C}$ pätee (a) $e^{z+(\pi/2)i} = ie^z$, ja (b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

6. Osoita käyttämällä Luvun 1.4 kaavaa[1] (1.7) ja vastavaa kaavaa funktiolle $\sin\theta$, että

   $$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2.$$

7. Osoita käyttämällä Luvun 1.5 kaavaa[2] (1.10), että

   $$\text{(a)}\quad (\sqrt{3}-i)^7 = -64\sqrt{3}+i64, \qquad \text{(b)}\quad (1+i)^{95} = 2^{47}(1-i).$$

8. Etsi seuraavien juurien kaikki arvot.

   (a) $(-8)^{1/3}$,
   (b) $i^{1/4}$,
   (c) $(1-\sqrt{3}i)^{1/3}$,

[1] Käyttäen luentorungon numerointia:
(1.7): $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$
[2] (1.10): $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$

Complex Analysis a
Fall 2016
Exercise 2, 22.9.2016

1. Simplify.
   (a) $|(1+2i)/(-2+i)|$,
   (b) $|(\overline{2+2i})(2-3i)(4i-3)|$,
   (c) $|i(2+i)^3/(i-1)^2|$,
   (d) $|(\pi+i)^{15}/(1-\pi i)^{15}|$.

2. Find the arguments and the polar co-ordinate forms.
   (a) $-1/2$,
   (b) $-\pi i$,
   (c) $-2\sqrt{3}-2i$,
   (d) $(1-i)(-\sqrt{3}+i)$,
   (e) $(\sqrt{3}-i)^2$,
   (f) $(-1+\sqrt{3}i)/(2+2i)$.

3. Show that a vector $z_1 \neq 0$ is parallel to vector $z_2 \neq 0$ (ie. $z_1 = \alpha z_2$, where $\alpha \in \mathbb{R}$) if and only if $\Im(z_1\overline{z}_2) = 0$.

4. Write in the form $x+iy$.

$$\text{(a)}\quad e^{-i\pi/4}, \qquad \text{(b)}\quad \frac{e^{1+i3\pi}}{e^{-1+i\pi/2}}, \qquad \text{(c)}\quad e^{e^i}.$$

5. Show that for all $z \in \mathbb{C}$ we have (a) $e^{z+(\pi/2)i} = ie^z$, and (b) $\overline{e^z} = e^{\overline{z}}$.

6. Show using (1.7) and the respective formula for sine in Chapter 1.4 of the lectures[3] that

$$\cos(\theta_1+\theta_2) = \cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2.$$

7. Show using (1.10) from Chapter 1.5[4] that

$$\text{(a)}\quad (\sqrt{3}-i)^7 = -64\sqrt{3}+i64, \qquad \text{(b)}\quad (1+i)^{95} = 2^{47}(1-i).$$

8. Find all values of the following roots.
   (a) $(-8)^{1/3}$,
   (b) $i^{1/4}$,
   (c) $(1-\sqrt{3}i)^{1/3}$,

[3]Formulas in the lecture notes:
(1.7): $\cos\theta = \frac{1}{2}(e^{i\theta}+e^{-i\theta})$
[4](1.10): $z^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$