Kompleksianalyysi a
Syksy 2016
Harjoitus 3, 29.9.2016

Tehtävissä 1 ja 2 käytetään määritelmiä $1/0 = \infty$ ja $1/\infty = 0$.

1. Osoita, että pisteiden z ja $-1/\overline{z}$ stereograafiset projektiot ovat Riemannin pallolla vastakkaiset pisteet.

2. Todista, että kaikilla $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ pätee

   (a) $\chi(z_1, z_2) \leq 2$;
   (b) $\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \chi(z_1, z_2)$;
   (c) jos $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty$, niin $\chi(\infty, z_1) \geq \chi(\infty, z_2)$.

3. Ratkaise seuraavat yhtälöt.

   (a) $2z^2 + z + 3 = 0$,
   (b) $z^2 - (3 - 2i)z + 1 - 3i = 0$,
   (c) $z^2 - 2z + i = 0$.

4. Tarkastele (esim. piirrä) geometrisesti pistejoukkoja:

   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |i - z|\}$,
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |2 - z| \leq 3\}$,
   (c) $\{z \in \mathbb{C} : \Re(1 - z) = -|z|\}$,
   (d) $\{z \in \mathbb{C} : \chi(z, \infty) = 1\}$.

5. Kirjoita seuraavat funktiot muodossa $u(x, y) + iv(x, y)$, missä $u(x, y)$ ja $v(x, y)$ ovat reaaliarvoisia funktioita, sijoittamalla $z = x + iy$:

   (a) $f(z) = 3z^2 + 5z + i + 1$,
   (b) $g(z) = 1/z$,
   (c) $h(z) = (z + i)/(z^2 + 1)$,
   (d) $q(z) = (2z^2 + 3)/(|z - 1|)$.

6. Joukowski-kuvaus J määritellään kaavalla $J(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Osoita, että (a) $J(z) = J(1/z)$, (b) J kuvaa joukon $\{e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$ bijektiivisesti reaalivälille $[-1, 1]$.

7. Määrää raja-arvot, kun $n \to \infty$, tapauksissa

   $$\frac{n^2 - 2}{n^2} + \frac{4i + 1}{n}, \quad \frac{n + 1}{n^2 - 7} + \frac{n + i^3}{n^4 + 3} i, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} i.$$

   Ohje: Sovella reaalianalyysistä tuttuja raja-arvon laskusääntöjä sekä reaaliosaan että imaginaariosaan.

8. Osoita, että

   $$1 - \left|\frac{z - w}{1 - z\bar{w}}\right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2}$$

   kaikilla $z, w \in \mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$. *Huom!* $|\zeta| = |\overline{\zeta}|$, jos $\zeta \in \mathbb{C}$.

Complex Analysis a
Fall 2016
Exercise 3, 29.9.2016

In problems 1 and 2 you can assume that $1/0 = \infty$ and $1/\infty = 0$.

1. Show that the stereographic projections of the points z and $-1/\overline{z}$ are diametrically opposite points on the Riemann sphere.

2. Show that for all $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ we have
   (a) $\chi(z_1, z_2) \leq 2$;
   (b) $\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) = \chi(z_1, z_2)$;
   (c) if $|z_1| \leq |z_2| \leq \infty$, then $\chi(\infty, z_1) \geq \chi(\infty, z_2)$.

3. Solve the following equations.
   (a) $2z^2 + z + 3 = 0$,
   (b) $z^2 - (3 - 2i)z + 1 - 3i = 0$,
   (c) $z^2 - 2z + i = 0$.

4. Sketch the geometric shape of the following sets.
   (a) $\{z \in \mathbb{C} : |z - 1| = |i - z|\}$,
   (b) $\{z \in \mathbb{C} : 1 \leq |2 - z| \leq 3\}$,
   (c) $\{z \in \mathbb{C} : \Re(1 - z) = -|z|\}$,
   (d) $\{z \in \mathbb{C} : \chi(z, \infty) = 1\}$.

5. Write in the form $u(x, y) + iv(x, y)$, where $u(x, y)$ and $v(x, y)$ are real-valued functions, by writing $z = x + iy$.
   (a) $f(z) = 3z^2 + 5z + i + 1$,
   (b) $g(z) = 1/z$,
   (c) $h(z) = (z + i)/(z^2 + 1)$,
   (d) $q(z) = (2z^2 + 3)/(|z - 1|)$.

6. A Joukowski transformation J is defined by $J(z) = \frac{1}{2}(z + 1/z)$. Show that (a) $J(z) = J(1/z)$, (b) J maps the set $\{e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$ bijectively to the real interval $[-1, 1]$.

7. Calculate the limits when $n \to \infty$ for
$$\frac{n^2 - 2}{n^2} + \frac{4i + 1}{n}, \quad \frac{n + 1}{n^2 - 7} + \frac{n + i^3}{n^4 + 3}i, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} i.$$
   Hint: Consider the limits of real and imaginary parts separately.

8. Show that
$$1 - \left|\frac{z - w}{1 - z\bar{w}}\right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - z\bar{w}|^2}$$
   for all $z, w \in \mathbb{D} := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$. *Note!* $|\zeta| = |\overline{\zeta}|$, if $\zeta \in \mathbb{C}$.