Kompleksianalyysi a
Syksy 2016
Harjoitus 4, 6.10.2016

1. Tarkastellaan vielä luentojen luvussa 1.7 määriteltyä pallometriikkaa χ. Olkoon f määritelty jossakin pisteen $z_0 \in \mathbb{C}$ punkteeratussa ympäristössä. Todista, että
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{z\to z_0} \chi\big(f(z), \infty\big) = 0.$$

2. Olkoon $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ määritelty kaavalla
$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z^2-1}, \ z \neq \pm 1, \\ \frac{3}{2}, \ z = \pm 1. \end{cases}$$
Missä joukossa f on jatkuva?

3. Olkoot $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ määritelty kaavoilla
$$f(z) = \frac{z\Re(z)}{|z|^2} \quad \text{ja} \quad g(z) = \frac{\overline{z}\big(\Im(z)\big)^2}{|z|^3}.$$
Tässä $\Re(z)$ ja $\Im(z)$ tarkoittavat pisteen z reaaliosaa ja imaginaariosaa, vastaavasti. Voidaanko funktiot f ja g määritellä pisteessä $z = 0$ niin, että ne olisivat jatkuvia koko kompleksitasossa $\mathbb{C}$?

4. Tarkastele jonojen $\{z_n\}$ käyttäytymistä, kun $n \to \infty$. Suppenemistapauksissa etsi raja-arvot.
   (a) $z_n = i/n$,
   (b) $z_n = i(-1)^n$,
   (c) $z_n = \text{Arg}\,(-1 + i/n)$,
   (d) $z_n = n(2+i)/(n+1)$,

5. Osoita seuraava väite: Jos $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ jokaiselle jonolle $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, joka suppenee kohti pistettä z_0 ($z_n \neq z_0$), niin tällöin $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$.

6. Laske seuraavien funktioiden derivaatat määritelmän avulla:
$$\text{(a) } z^3 + 3z - 2z + 1, \quad \text{(b) } \frac{z^2-1}{z^2+1}, \quad \text{(c) } \frac{z^2-1}{z^2-2z}.$$

7. Osoita, että $\text{Arg}(z)$ on epäjatkuva jokaisessa pisteessä $z_0 \in \mathbb{R}$, joka toteuttaa ehdon $-\infty < z_0 < 0$.

8. Osoita, että f:llä on kompleksinen derivaatta pisteessä z_0, jos ja vain jos on olemassa $A \in \mathbb{C}$ ja funktio $\epsilon_{f,z_0}(h)$, jolle $\lim_{h\to 0} \epsilon_{f,z_0}(h) = 0$, siten että seuraava yhtälö pätee
$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hA + h\epsilon_{f,z_0}(h),$$
ja tällöin $A = f'(z_0)$. Osoita tämän avulla ketjusääntö: $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$, missä g on derivoituva z:n ympäristössä ja f derivoituva $g(z)$:n ympäristössä.

Complex Analysis a
Fall 2016
Exercise 4, 6.10.2016

1. Consider the chordal metric χ defined in section 1.7 of the lectures. Suppose that f is defined in a punctured neighborhood of $z_0 \in \mathbb{C}$. Prove that
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \lim_{z\to z_0} \chi\big(f(z), \infty\big) = 0.$$

2. Let $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be defined by
$$f(z) = \begin{cases} \frac{z^3-1}{z^2-1}, \; z \neq \pm 1, \\ \frac{3}{2}, \; z = \pm 1. \end{cases}$$
In which set is f continuous?

3. Let $f, g : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ be defined by the equations
$$f(z) = \frac{z\Re(z)}{|z|^2} \quad \text{and} \quad g(z) = \frac{\overline{z}\big(\Im(z)\big)^2}{|z|^3}.$$
Here $\Re(z)$ and $\Im(z)$ are the real and the imaginary parts of z. Can you make f and g continuous in $\mathbb{C}$ by defining $f(0)$ and $g(0)$ appropriately?

4. Examine the behavior of $\{z_n\}$ when $n \to \infty$. In the cases of convergence, find the limits.
   (a) $z_n = i/n$,
   (b) $z_n = i(-1)^n$,
   (c) $z_n = \mathrm{Arg}\,(-1 + i/n)$,
   (d) $z_n = n(2+i)/(n+1)$,

5. Show the following: If $\lim_{n\to\infty} f(z_n) = w_0$ for every sequence $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ which converges to z_0 ($z_n \neq z_0$), then $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$.

6. Calculate the derivatives of the following functions by the definition:
$$\text{(a) } z^3 + 3z - 2z + 1, \quad \text{(b) } \frac{z^2-1}{z^2+1}, \quad \text{(c) } \frac{z^2-1}{z^2-2z}.$$

7. Show that $\mathrm{Arg}(z)$ is discontinuous at each point $z_0 \in \mathbb{R}$ satisfying the condition $-\infty < z_0 < 0$.

8. Show that f a complex derivative at point z_0, if and only if there exists $A \in \mathbb{C}$ and a function $\epsilon_{f,z_0}(h)$ with $\lim_{h\to 0} \epsilon_{f,z_0}(h) = 0$, so that we have
$$f(z_0 + h) = f(z_0) + hA + h\epsilon_{f,z_0}(h),$$
and in this case $A = f'(z_0)$. Use this fact to prove the chain rule: $\frac{d}{dz} f(g(z)) = f'(g(z))g'(z)$, where g is differentiable near z and f is differentiable near $g(z)$.