Kompleksianalyysi a
Syksy 2016
Harjoitus 5, 13.10.2016

Kurssikoe pidetään torstaina 27.10.2016 Futuran salissa F100. Koe alkaa tasan 10.00.

Tehtävissä 5 ja 6 käytetään seuraavaa määritelmää: Funktion f kiintopiste ξ on *repulsiivinen*, jos f on analyyttinen pisteen ξ ympäristössä ja $|f'(\xi)| > 1$.

1. Näytä että $f(z) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy))$ on kokonainen, ja laske sen derivaatta.

2. Osoita käyttäen Cauchy-Riemannin yhtälöitä, että jos f on kokonainen, niin myös f^2 on kokonainen.

3. Todista, että $u(x,y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ on harmoninen joukossa $\mathbb{R}^2$. Etsi sellainen funktio $v(x,y)$, että $f = u + iv$ on kokonainen.

4. Osoita seuraava väite: Jos v on funktion u harmoninen konjugaatti alueessa D, niin tällöin uv on harmoninen alueessa D.

5. Olkoon f kokonainen, ja ζ sen repulsiivinen kiintopiste. Todista, että on olemassa ζ-keskinen kiekko D siten, että lähtöpisteistä $w \in D \setminus \{\zeta\}$ aloitetut radat poistuvat lopulta kiekosta D.

6. Määrää funktion $f(z) = 1/(z+1)$ kiintopisteet, ja erittele mitkä kiintopisteistä ovat atraktiivisia, repulsiivisia

7. Olkoon $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$, missä $a_n \neq 0$. Osoita, että polynomin $P(z)$ kaikki nollakohdat kuuluvat kiekkoon $B(0,R)$, missä

   $$R = 1 + \max_{0 \le j \le n-1} \left\{ \left| \frac{a_j}{a_n} \right| \right\}.$$

   Vihje: Käytä kolmioepäyhtälöä ja geometrisen sarjan summakaavaa osoittaaksesi, että

   $$|P(z)| > |a_n|\,|z|^n \left(\frac{|z| - R}{|z| - 1} \right)$$

   kun $|z| \ge R$.

8. Oletetaan, että P, p ja q ovat polynomeja, joille pätee $P = pq$. Osoita, että jos P ja p ovat reaalikertoimisia, niin myös q:n on oltava reaalikertoiminen.

Complex Analysis a
Fall 2016
Exercise 5, 13.10.2016

The course exam will be held at Futura F100 auditorium on Thursday 27.10.2016 at 10.00 sharp.

We use the following definition in exercises 5 and 6: A fixed point ξ of a complex function f is a *repellor* if f is analytic in a neighborhood of ξ and $|f'(\xi)| > 1$.

1. Show that $f(z) = e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy))$ is entire and calculate its derivative.

2. Show by using Cauchy-Riemann equations that if f is entire, then so is f^2.

3. Show that $u(x, y) = e^{-x}(x\sin y - y\cos y)$ is harmonic in $\mathbb{R}^2$. Find a function $v(x, y)$ such that $f = u + iv$ is entire.

4. Show: If v is a harmonic conjugate of u in D, then uv is harmonic in D.

5. Let f be entire, and let $\zeta \in \mathbb{C}$ a repellor for f. Prove that there exists a disc D centered at ζ such that all orbits launched from $w \in D \setminus \{\zeta\}$ eventually leave D.

6. Determine the fixed points of $f(z) = 1/(z + 1)$, and decide which are attractors, repellors, or neither.

7. Let $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ with $a_n \neq 0$. Show that all zeros of the polynomial $P(z)$ are in the disc $B(0, R)$, where
$$R = 1 + \max_{0\leq j\leq n-1} \left\{ \left| \frac{a_j}{a_n} \right| \right\}.$$
Hint: Use the triangle inequality and the sum of a geometric series to show that
$$|P(z)| > |a_n|\, |z|^n \left(\frac{|z| - R}{|z| - 1} \right)$$
when $|z| \geq R$.

8. Let P, p and q be polynomials satisfying $P = pq$. Show that if P and p both have real coefficients, then so does q.