Kompleksianalyysi a
Syksy 2016
Harjoitus 6, 20.10.2016

Muista: Kurssikoe torstaina 27.10 tasan kello 10.00 Futuran salissa F100.

1. Astetta neljä olevalla polynomilla p on nollakohdat pisteissä -1, $3i$, ja $-3i$. Nollakohtien kertaluvut ovat 2, 1, ja 1, vastaavasti. Jos $p(1) = 80$, niin etsi $p(z)$.

2. Kirjoita seuraavien polynomien Taylorin esitys pisteen $z = 2$ suhteen: (a) $z^5 + 3z + 4$, (b) z^{10} ja (c) $(z-1)(z-2)^3$.

3. Jos rationaalifunktiolla R on m-asteinen napa pisteessä z_0, niin todista, että sen derivaatalla R' on $(m+1)$-asteinen napa pisteessä z_0.

4. Laske arvot: (a) $\log i$, (b) $\log(1-i)$, (c) $\mathrm{Log}\,(-i)$, (d) $\mathrm{Log}\,(\sqrt{3}+i)$.

5. Ratkaise yhtälöt: (a) $e^z = 2i$, (b) $\mathrm{Log}\,(z^2-1) = \frac{i\pi}{2}$, (c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$.

6. Missä alueessa $f(z) = \mathrm{Log}\,(4+i-z)$ on analyyttinen. Laske $f'(z)$.

7. Määrää funktion $f(z) = \log(z^2+2z+3)$ se haara, joka on analyyttinen pisteessä $z = -1$. Laske $f'(-1)$.

8. Laske kaikki arvot: (a) i^i, (b) $(-1)^{\frac{2}{3}}$, (c) $2^{\pi i}$, (d) $(1+i)^{1-i}$.

9. Etsi seuraavien moniarvoisten funktioiden haarat, jotka ovat analyyttisiä annetuissa alueissa.
   (a) $(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ yksikkökiekossa.
   (b) $(4+z^2)^{\frac{1}{2}}$ kompleksitasossa, josta on leikattu pois jana pisteestä $-2i$ pisteeseen $2i$.
   (c) $(z^3-1)^{\frac{1}{3}}$ joukossa $\{z : |z| > 1\}$.

10. Määrää funktion
$$w = q(z) := 2e^z + e^{2z}$$
käänteisfunktio kompleksisen logaritmin avulla. Etsi ne pisteet z, joissa $q(z) = 3$.

Complex Analysis a
Fall 2016
Exercise 6, 20.10.2016

Remember: Course exam on Thursday 27.10 at 10am sharp in Futura F100.

1. A polynomial p of fourth degree has zeros at -1, $3i$ and $-3i$. The zeros are of orders 2, 1 and 1, respectively. Assuming $p(1) = 80$ find $p(z)$.
2. Write the following polynomials in the Taylor form, centered at $z = 2$: (a) $z^5 + 3z + 4$, (b) z^{10} and (c) $(z - 1)(z - 2)^3$.
3. Show that if the rational function R has a pole of order m at z_0, then its derivative R' has a pole of order $(m + 1)$ at z_0.
4. Calculate: (a) $\log i$, (b) $\log(1 - i)$, (c) $\mathrm{Log}\,(-i)$, (d) $\mathrm{Log}\,(\sqrt{3} + i)$.
5. Solve: (a) $e^z = 2i$, (b) $\mathrm{Log}\,(z^2 - 1) = \frac{i\pi}{2}$, (c) $e^{2z} + e^z + 1 = 0$.
6. Where is $f(z) = \mathrm{Log}\,(4 + i - z)$ analytic? Calculate $f'(z)$.
7. Determine a branch of $f(z) = \log(z^2 + 2z + 3)$ which is analytic at $z = -1$. Calculate $f'(-1)$.
8. Calculate all the values of: (a) i^i, (b) $(-1)^{\frac{2}{3}}$, (c) $2^{\pi i}$, (d) $(1 + i)^{1-i}$.
9. Find a branch of each of the following multiple-valued functions that is analytic in the given domain:
   (a) $(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$ in the unit disc.
   (b) $(4 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ on the complex plane with the line from $-2i$ to $2i$ removed.
   (c) $(z^3 - 1)^{\frac{1}{3}}$ in $\{z : |z| > 1\}$.
10. Determine the inverse of the function

$$w = q(z) := 2e^z + e^{2z}$$

explicitly in terms of the complex logarithms. Use your formula to find all values of z for which $q(z) = 3$.