Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 3 / Ratkaisut

1. Jos $z = 0$ (kuvapiste etelänapa), niin $-1/\overline{z} = \infty$ (kuvapiste pohjoisnapa), ja väite pätee. Vastaavasti käy tapauksessa $z = \infty$, $-1/\overline{z} = 0$. Olkoon $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, jolloin myös $-1/\overline{z} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Tällöin

$$\chi(z, -1/\overline{z}) = 2\frac{|z + 1/\overline{z}|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+1/|\overline{z}|^2}} = 2\frac{\big||z|^2+1\big|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{|z|^2+1}} = 2.$$

Jos yksikköpallon pisteiden välinen etäisyys on 2, ovat pisteet vastakkaiset.

2. (a) Pisteiden $z_1, z_2 \in \widehat{\mathbb{C}}$ stereografiset projektiot ovat pisteitä Riemannin pallolla, ja $\chi(z_1, z_2)$ on näiden projektiopisteiden Euklidinen etäisyys avaruudessa $\mathbb{R}^3$. Koska Riemannin pallon säde on 1, niin $\chi(z_1, z_2) \leq 2$.

(b) Jos $z_1 = z_2$, niin väite pätee triviaalisti, joten oletetaan $z_1 \neq z_2$. Jos $z_1 = 0$ tai $z_2 = 0$ (voidaan olettaa $z_1 = 0$), niin

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) &= \chi\left(\infty, \frac{1}{z_2}\right) = \frac{2}{\sqrt{1+|1/z_2|^2}} = \frac{2|z_2|}{\sqrt{|z_2|^2+1}} \\ &= \chi(0, z_2) = \chi(z_1, z_2).\end{aligned}$$

Jos $z_1, z_2 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, niin

$$\begin{aligned}\chi\left(\frac{1}{z_1}, \frac{1}{z_2}\right) &= 2\frac{|\frac{1}{z_1} - \frac{1}{z_2}|}{\sqrt{1+|1/z_1|^2}\sqrt{1+|1/z_2|^2}} \\ &= 2\frac{|z_2 - z_1|}{\sqrt{|z_1|^2+1}\sqrt{|z_2|^2+1}} = \chi(z_1, z_2).\end{aligned}$$

(c) Jos $z_2 = \infty$, niin $\chi(0, z_2) = \chi(0, \infty) = 2$ ja väite seuraa kohdasta (a). Muutoin

$$\begin{aligned}\chi(0, z_1) &= 2\frac{|z_1|}{\sqrt{1+|z_1|^2}} = \frac{2}{\sqrt{|1/z_1|^2+1}} \\ &\leq \frac{2}{\sqrt{|1/z_2|^2+1}} = 2\frac{|z_2|}{\sqrt{1+|z_2|^2}} = \chi(0, z_2).\end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned}&2z^2 + z + 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\cdot 2\cdot 3}}{2\cdot 2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{23}}{4} = -\frac{1}{4} \pm i\frac{\sqrt{23}}{4};\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}&z^2 - (3-2i)z + 1 - 3i = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{3 - 2i \pm \sqrt{(3-2i)^2 - 4\cdot 1\cdot (1-3i)}}{2} = \frac{3-2i\pm 1}{2} \\ &\Leftrightarrow \quad z_1 = 2 - i \quad \text{tai} \quad z_2 = 1 - i;\end{aligned}$$

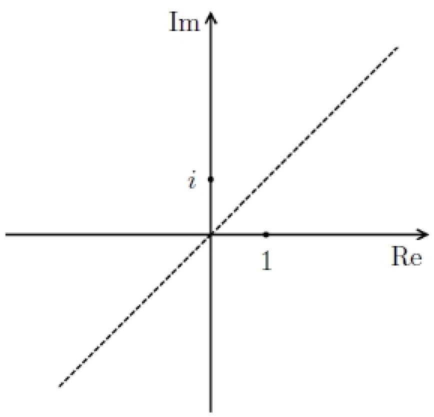
(c)

$$\begin{aligned} &z^2 - 2z + i = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & z = \frac{2 \pm \sqrt{4-4i}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-i}. \end{aligned}$$

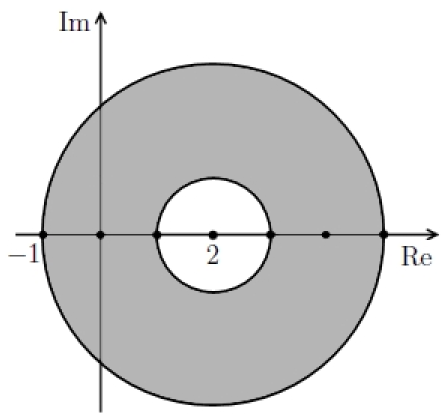
4. (a) Joukkoon kuuluvat ne kompleksitason pisteet, jotka ovat yhtä kaukana pisteistä 1 ja i. Tämä ehto määrää suoran $y = x$ (katso Kuva 1(a)): Merkitään $z = x + iy$. Tällöin

$$\begin{aligned} |z-1|^2 = |i-z|^2 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (1-y)^2 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x = -2y \\ &\Leftrightarrow \quad y = x. \end{aligned}$$

(b) Joukkoon kuuluvat ne kompleksitason pisteet, joiden etäisyys pisteestä 2 on vähintään 1 ja enintään 3. Tällainen ehto määrää renkaan (katso Kuva 1(b)).



(a) Suora $y = x$.



(b) Rengasalue.

Kuva 1: Tehtävien 4(a) ja 4(b) kuvat.

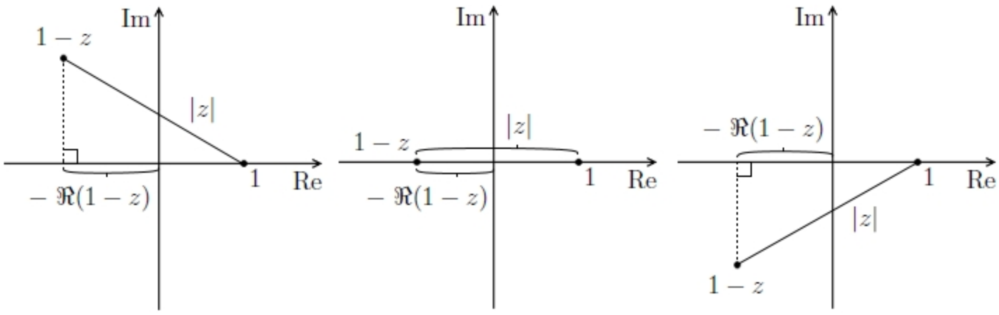
(c) Koska

$$-\Re(1-z) < -\Re(1-z) + 1 = \Re z \leq |z|,$$

niin ehdon $\Re(1-z) = -|z|$ toteuttavia pisteitä ei ole, ja siis $\{z \in \mathbb{C} : \Re(1-z) = -|z|\} = \emptyset$. Tämä voidaan päätellä myös geometrisesti: Jos piste $\Re(1-z) \leq 0$, niin jokin Kuvan 2 tilanteista toteutuu. Näin ollen suorakulmaisen kolmion geometrian nojalla missään tilanteessa ei voi olla $\Re(1-z) = -|z|$.

5. (a)

$$\begin{aligned} f(x+iy) &= 3(x^2 - y^2 + 2ixy) + 5(x+iy) + i + 1 \\ &= \underbrace{\big(3(x^2-y^2) + 5x + 1\big)}_{=u(x,y)} + i \underbrace{\big(6xy + 5y + 1\big)}_{=v(x,y)}; \end{aligned}$$



Kuva 2: Tehtävän 4(c) tapaukset.

(b)

$$g(x+iy) = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \underbrace{\frac{x}{x^2+y^2}}_{=u(x,y)} + i\underbrace{\frac{-y}{x^2+y^2}}_{=v(x,y)};$$

(c) $h(z) = \frac{z+i}{z^2+1} = \frac{z+i}{(z+i)(z-i)} = \frac{1}{z-i}$, joten

$$\begin{aligned} h(x+iy) &= \frac{1}{x+iy-i} = \frac{x-i(y-1)}{x^2+(y-1)^2} \\ &= \underbrace{\frac{x}{x^2+(y-1)^2}}_{=u(x,y)} + i\underbrace{\frac{1-y}{x^2+(y-1)^2}}_{=v(x,y)}; \end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned} q(x+iy) &= \frac{2(x^2-y^2+2ixy)+3}{|x+iy-1|} \\ &= \underbrace{\frac{2(x^2-y^2)+3}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}}_{=u(x,y)} + i\underbrace{\frac{4xy}{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}}_{=v(x,y)}. \end{aligned}$$

6. (a)

$$J(1/z) = \frac{1}{2}\left(1/z + \frac{1}{1/z}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z} + z\right) = J(z).$$

(b) Olkoon $\theta \in [0, \pi]$. Tällöin

$$J\left(e^{i\theta}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = \cos\theta.$$

Koska kosini on bijektio väliltä $[0, \pi]$ välille $[0, 1]$, niin J on bijektio joukolta $\{e^{i\theta} : \theta \in [0, \pi]\}$ välille $[0, 1]$.

7. 1)

$$\frac{n^2-2}{n^2} + \frac{4i+1}{n} = \frac{1-2/n^2}{1} + i\frac{4}{n} + \frac{1}{n} \longrightarrow 1, \quad n \to \infty;$$

2)

$$\frac{n+1}{n^2-7} + \frac{n+i^3}{n^4+3}i = \frac{1/n+1/n^2}{1-7/n^2} + i\frac{1}{n^3+3/n} + \frac{1}{n^4+3} \longrightarrow 0,$$

$n \to \infty$;

3)

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n} i = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n + \frac{i}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \longrightarrow e + i\frac{1}{e},$$

$n \to \infty$. (Yhtäsuuruuden $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ voi tarkistaa esimerkiksi laskemalla raja-arvon $\lim_{n\to\infty} n\log\left(1+\frac{1}{n}\right)$ L'Hôpitalin säännön avulla.)

8. Suoraan laskemalla saadaan

$$\begin{aligned}
1 - \left|\frac{z-w}{1-z\overline{w}}\right|^2 &= \frac{|1-z\overline{w}|^2 - |z-w|^2}{|1-z\overline{w}|^2} \\
&= \frac{(1-z\overline{w})(1-\overline{z}w) - (z-w)(\overline{z}-\overline{w})}{|1-z\overline{w}|^2} \\
&= \frac{1-\overline{z}w - z\overline{w} + |z|^2|w|^2 - |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z}w - |w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2} \\
&= \frac{(1-|z|^2)\,(1-|w|^2)}{|1-z\overline{w}|^2}
\end{aligned}$$

kaikilla $z, w \in \mathbb{D}$.