Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 4 / Ratkaisut

1. Muistetaan luennoilta, että $\chi(z,\infty) = 2/\sqrt{1+|z|^2}$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$.

($\Rightarrow$) Olkoon $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Tällöin

$$\lim_{z\to z_0} \chi(f(z),\infty) = \lim_{z\to z_0} \frac{2}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} = \frac{2}{\sqrt{1+|\lim_{z\to z_0} f(z)|^2}} = 0$$

neliöjuuren ja modulin jatkuvuuden nojalla.

($\Leftarrow$) Intuitiivisesti on varsin selvää, että ehdosta

$$\lim_{z\to z_0} \chi(f(z),\infty) = \lim_{z\to z_0} \frac{2}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} = 0$$

täytyy seurata $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$. Perustellaan tämä vielä tarkasti: Olkoon $\lim_{z\to z_0} \chi(f(z),\infty) = 0$, ja olkoon $M > 0$. Nyt $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ siten, että $2/\sqrt{1+|f(z)|^2} < \varepsilon$, kun $0 < |z - z_0| < \delta$. Olkoon $\varepsilon = 2/\sqrt{M^2+1} < 2$, jolloin $M = \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} - 1}$. Tällöin

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{1+|f(z)|^2}} < \varepsilon \quad &\Rightarrow \quad \frac{4}{\varepsilon^2} < 1 + |f(z)|^2 \\ &\Rightarrow \quad |f(z)| > \sqrt{\frac{4}{\varepsilon^2} - 1} = M \end{aligned}$$

aina, kun $0 < |z - z_0| < \delta$. Näin ollen $\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$.

2. Selvästi f on jatkuva pisteiden ± 1 (lausekkeen $(z^3-1)/(z^2-1)$ nimittäjän nollakohdat) ulkopuolella. Koska

$$z^3 - 1 = (z-1)(z^2+z+1),$$

niin

$$\frac{z^3-1}{z^2-1} = \frac{z^2+z+1}{z+1} \to \frac{3}{2},$$

kun $z \to 1$, joten f on jatkuva myös pisteessä 1. Tarkasteltaessa pistettä -1 huomataan, että funktion z^2+z+1 jatkuvuuden nojalla on olemassa $\delta > 0$ siten, että $|z^2+z+1| > \frac{1}{2}$, kun $|z-(-1)| < \delta$. Näin ollen

$$\lim_{z\to -1} |f(z)| = \lim_{z\to -1} \frac{|z^2+z+1|}{|z+1|} > \lim_{z\to -1} \frac{1/2}{|z-(-1)|} = \infty,$$

joten f ei ole jatkuva pisteessä -1. Siis f on jatkuva joukossa $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$.

3. Olkoot $x, y \in \mathbb{R}$ siten, että $x \neq 0$ tai $y \neq 0$. Tällöin

$$f(x+iy) = \frac{(x+iy)x}{x^2+y^2} \quad \text{ja} \quad g(x+iy) = \frac{(x-iy)y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}.$$

Erityisesti

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2} = 1 \quad \text{ja} \quad f(iy) = \frac{0}{y^2} = 0,$$

joten funktiolla f ei ole raja-arvoa pisteessä $z = 0$, ja näin ollen siitä ei saadaa jatkuvaa koko kompleksitasossa. Vastaavasti

$$g(x) = \frac{0}{|x|^3} = 0,$$

ja jos $y > 0$, niin

$$g(iy) = \frac{-iy^3}{|y|^3} = -i.$$

Näin ollen myöskään g ei ole jatkuva origossa, riippumatta arvosta $g(0)$.

4. (a) Koska $|i/n| = 1/n \to 0$, kun $n \to \infty$, niin $z_n \to 0$, kun $n \to \infty$.

   (b) Koska kaikilla $m \in \mathbb{N}$ pätee $z_{2m} = i$ ja $z_{2m-1} = -i$, niin jonolla $\{z_n\}$ ei ole raja-arvoa, kun $n \to \infty$.

   (c) Huomataan, että kaikki pisteet $z_n = -1 + i/n \neq 0$ kuuluvat ylempään puolitasoon ja niiden argumentti on siten positiivinen (haaraleikkaus pitkin negatiivista reaaliakselia). Näin ollen funktion Arg jatkuvuuden nojalla

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Arg}\left(-1 + \frac{i}{n}\right) = \operatorname{Arg} \lim_{n\to\infty}\left(-1 + \frac{i}{n}\right) = \operatorname{Arg}(-1) = \pi.$$

   (d) Suoraan laskemalla saadaan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n(2+i)}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2+i}{1+1/n} = 2 + i.$$

   (e) Koska

$$\left|\left(\frac{1-i}{4}\right)^n\right| = \left(\frac{|1-i|}{4}\right)^n = \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^n \to 0,$$

   kun $n \to \infty$, niin $\lim_{n\to\infty}((1-i)/4)^n = 0$.

   (f) Koska kaikilla $m \in \mathbb{N}$ pätee

$$z_{5m} = e^{2\cdot 5m\pi i/5} = e^{i2m\pi} = 1$$

   ja

$$z_{5m+1} = e^{2(5m+1)\pi i/5} = e^{i2m\pi}e^{i2\pi/5} = e^{i2\pi/5} \neq 1,$$

   niin jonolla $\{z_n\}$ ei ole raja-arvoa, kun $n \to \infty$.

5. Antiteesi: $\lim_{z\to z_0} f(z) \neq w_0$. Tällöin on olemassa $\varepsilon > 0$ siten, että kaikilla $n \in \mathbb{N}$ on olemassa $z_n \in D(z_0, \frac{1}{n}) \setminus \{z_0\}$, jolle $|f(z_n) - w_0| \geq \varepsilon$. Nyt $z_n \to z_0$, kun $n \to \infty$, mutta $f(z_n) \not\to w_0$, kun $n \to \infty$, mikä on ristiriita oletuksen kanssa. Väite seuraa.

6. Lasketaan raja-arvot $\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0+\Delta z)-f(z_0)}{\Delta z}$.

(a)

$$\begin{aligned}
&\frac{(z_0+\Delta z)^3+z_0+\Delta z+1-z_0^3-z_0-1}{\Delta z}\\
&\qquad=\frac{z_0^3+3z_0^2\Delta z+3z_0(\Delta z)^2+(\Delta z)^3+\Delta z-z_0^3}{\Delta z}\\
&\qquad=3z_0^2+3z_0\Delta z+(\Delta z)^2+1\overset{\Delta z\to 0}{\longrightarrow}3z_0^2+1.
\end{aligned}$$

(b) Merkitään $w=z_0+\Delta z$, jolloin $w\to z_0$, kun $\Delta z\to 0$. Nyt

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta z}\left(\frac{(z_0+\Delta z)^2-1}{(z_0+\Delta z)^2+1}-\frac{z_0^2-1}{z_0^2+1}\right)=\frac{1}{w-z_0}\left(\frac{w^2-1}{w^2+1}+\frac{-z_0^2+1}{z_0^2+1}\right)\\
&\quad=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{w^2z_0^2+w^2-z_0^2-1-w^2z_0^2+w^2-z_0^2+1}{(w^2+1)(z_0^2+1)}\\
&\quad=\frac{2(w-z_0)(w+z_0)}{(w-z_0)(w^2+1)(z_0^2+1)}\overset{w\to z_0}{\longrightarrow}\frac{4z_0}{(z_0^2+1)^2}.
\end{aligned}$$

(c) Samoin kuin edellä,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{w-z_0}\left(\frac{w^2-1}{w^2-2w}+\frac{-z_0^2+1}{z_0^2-2z_0}\right)\\
&\quad=\frac{1}{w-z_0}\cdot\frac{w^2z_0^2-2w^2z_0-z_0^2+2z_0-w^2z_0^2+w^2+2wz_0^2-2w}{(w^2-2w)(z_0^2-2z_0)}\\
&\quad=\frac{(w-z_0)(-2wz_0+w+z_0-2)}{(w-z_0)(w^2-2w)(z_0^2-2z_0)}\overset{w\to z_0}{\longrightarrow}2\frac{z_0-1-z_0^2}{z_0^2(z_0-2)^2}.
\end{aligned}$$

7. Olkoon $z_0\in\mathbb{R}$ siten, että $-\infty<z_0<0$, ja olkoon $z=z_0+iy$, $y\in\mathbb{R}$. Jos $y\geq 0$, niin $\operatorname{Arg}(z)\in(\frac{\pi}{2},\pi]$. Jos taas $y<0$, niin $\operatorname{Arg}(z)\in(-\pi,-\frac{\pi}{2})$. Näin ollen (Arg on jatkuva joukossa $\mathbb{C}\setminus(-\infty,0]$)

$$\lim_{y\to 0^-}\operatorname{Arg}(z_0+iy)\leq-\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{2}\lim_{y\to 0^+}\operatorname{Arg}(z_0+iy),$$

joten $\operatorname{Arg}(z)$ ei ole jatkuva pisteessä z_0.
(*Huom!* Tehtävän kannalta oleellinen havainto on, että argumentin päähaaran (Arg) haaraleikkaus on negatiivisella reaaliakselilla, jota ylitettäessä argumentin arvossa tapahtuu ”hyppäys”. Ratkaisussa täytyy vain kirjoittaa tämä havainto ymmärrettävästi tekstimuotoon.)

8. Nyt $f=u+iv$, missä $u(x,y)=e^{x^2-y^2}\cos(2xy)$ ja $v(x,y)=e^{x^2-y^2}\sin(2xy)$. Derivoimalla saadaan nyt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u(x,y)&=2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy),\\
\frac{\partial}{\partial y}v(x,y)&=-2ye^{x^2-y^2}\sin(2xy)+2xe^{x^2-y^2}\cos(2xy),\\
\frac{\partial}{\partial y}u(x,y)&=-2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy)-2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy),\\
\frac{\partial}{\partial x}v(x,y)&=2xe^{x^2-y^2}\sin(2xy)+2ye^{x^2-y^2}\cos(2xy),
\end{aligned}$$

joten osittaisderivaatat ovat jatkuvia ja toteuttavat C-R yhtälöt $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ ja $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$ kaikilla $z \in \mathbb{C}$. Näin ollen f on kokonainen, ja sen derivaatta saadaan esimerkiksi lausekkeesta

$$f'(z) = \frac{\partial}{\partial x} u(x,y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x,y).$$

Tehtävä voidaan ratkaista myös laskematta osittaisderivaattoja seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{x^2-y^2}(\cos(2xy) + i\sin(2xy)) = e^{x^2-y^2} e^{i2xy} \\ &= e^{x^2+i2xy+(iy)^2} = e^{(x+iy)^2} = e^{z^2} \\ &\Rightarrow \quad f'(z) = 2ze^{z^2}. \end{aligned}$$