Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 5 / Ratkaisut

1. Derivoimalla saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}u(x,y) &= e^{-x}(-x\sin y + y\cos y + \sin y),\\ \frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) &= e^{-x}(x\sin y - y\cos y - 2\sin y)\end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) &= e^{-x}(x\cos y - \cos y + y\sin y),\\ \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) &= e^{-x}(-x\sin y + y\cos y + 2\sin y).\end{aligned}$$

Näin ollen kaikki funktion u 2. kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia joukossa $\mathbb{R}^2$ (vastaavasti kuin edellä voidaan laskea u_{xy} ja u_{yx}), ja

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u(x,y) \equiv 0.$$

Näin ollen u on harmoninen joukossa $\mathbb{R}^2$.

Funktion u harmoniselle konjugaatille v pätee (C-R)

$$\frac{\partial}{\partial y}v(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}u(x,y),$$

joten integroimalla muuttujan y suhteen saadaan

$$v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + C(x).$$

Derivoimalla tämä muuttujan x suhteen ja muistamalla, että $v_x = -u_y$ (C-R), saadaan

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}v(x,y) &= e^{-x}(-x\cos y - y\sin y + \cos y) + \frac{\partial}{\partial x}C(x)\\ &= -\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = -e^{-x}(x\cos y + y\sin y - \cos y),\end{aligned}$$

joten $C'(x) \equiv 0$, eli $C(x) = c \in \mathbb{R}$. Siten

$$v(x,y) = e^{-x}(x\cos y + y\sin y) + c$$

ja

$$\begin{aligned}f(x+iy) &= u(x,y) + iv(x,y)\\ &= e^{-x}(x\sin y - y\cos y) + ie^{-x}(x\cos y + y\sin y) + ic,\end{aligned}$$

$c \in \mathbb{R}$. Tästä voi halutessaan laskea vielä funktion f esityksen muuttujan z avulla:

$$\begin{aligned}f(x+iy) &= e^{-x}\big(ix(\cos y - \sin y) - y(\cos y - i\sin y)\big) + ic\\ &= e^{-x}\left(ix\,e^{-iy} - y\,e^{-iy}\right) + ic\\ &= e^{-x-iy}i(x+iy) + ic = iz\,e^{-z} + ic, \quad c \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

2. Oletuksen nojalla funktioiden u ja v kaikki 2. kertaluvun osittaisderivaatat ovat jatkuvia, $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $v_{xx} + v_{yy} = 0$, $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$ (C-R). Nyt

$$\begin{aligned} (uv)_x &= u_x v + u v_x, \\ (uv)_{xx} &= u_{xx} v + 2u_x v_x + u v_{xx} \end{aligned}$$

ja vastaavasti

$$(uv)_{yy} = u_{yy} v + 2u_y v_y + u v_{yy}.$$

Siten $(uv)_{xx}$, $(uv)_{yy}$, $(uv)_{xy}$ ja $(uv)_{yx}$ ovat jatkuvia (kaksi jälkimmäistä voidaan laskea samaan tapaan kuin edellä), ja oletusten nojalla saadaan

$$\begin{aligned} (uv)_{xx} + (uv)_{yy} &= v(u_{xx} + u_{yy}) + 2(u_x v_x + u_y v_y) + u(v_{xx} + v_{yy}) \\ &= 2(u_x v_x + u_y v_y) = 2\big(u_x(-u_y) + u_y u_x\big) = 0, \end{aligned}$$

joten uv on harmoninen.

3. Oletuksen nojalla $-u$ on harmoninen $((-u)_{xx} + (-u)_{yy} = -(u_{xx} + u_{yy}) = 0)$, $u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$. Siten

$$v_x = -u_y = (-u)_y$$

ja

$$v_y = u_x = -(-u_x) = -(-u)_x,$$

joten $-u$ on funktion v harmoninen konjugaatti.

4. Koska funktio f_1 on kokonainen, väitteet $\big(\partial f_1\big)(z) = c$ ja $\big(\bar{\partial} f_1\big)(z) = 0$ seuraavat helposti luentojen Esimerkistä 2.5.4 ja Lauseesta 2.5.5: Sijoittamalla Cauchy-Riemannin yhtälöt Esimerkkiin 2.5.4 saadaan $\big(\partial f\big)(z) = f'(z)$, kun f on analyyttinen. Toki derivaatat voi halutessaan laskea myös määritelmistä samaan tapaan kuin seuraavassa.

Funktion f_2 tapauksessa vastaavaa tulosta ei ole käytettävissä (ainakaan tällä kurssilla), joten lasketaan derivaatat määritelmästä. Kirjoitetaan $z = x + iy$, jolloin $f_2(z) = c(x - iy)$. Wirtingerin derivaattojen määritelmästä saadaan nyt

$$\begin{aligned} \big(\partial f_2\big)(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(c(x - iy)\big) - i\,\frac{\partial}{\partial y}\big(c(x - iy)\big)\right) \\ &= \frac{c}{2}\big(1 - i \cdot 0 - i(0 - i)\big) = \frac{c}{2}\big(1 - 1\big) = 0 \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \big(\bar{\partial} f_2\big)(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(c(x - iy)\big) + i\,\frac{\partial}{\partial y}\big(c(x - iy)\big)\right) \\ &= \frac{c}{2}\big(1 + i(-i)\big) = c. \end{aligned}$$

Vastaavasti $f_3(z) = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, joten

$$\begin{aligned} \big(\partial f_3\big)(z) &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(x^2 + y^2\big) - i\,\frac{\partial}{\partial y}\big(x^2 + y^2\big)\right) \\ &= \frac{1}{2}\big(2x + 0 - i(0 + 2y)\big) = x - iy = \bar{z} \end{aligned}$$

ja

$$(\bar{\partial} f_3)(z) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\big(x^2+y^2\big) + i\,\frac{\partial}{\partial y}\big(x^2+y^2\big)\right)$$
$$= \frac{1}{2}\big(2x + i2y\big) = x + iy = z.$$

5. Oletusten nojalla $f(\zeta) = \zeta$ ja

$$\lim_{z\to\zeta}\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right| = |f'(\zeta)| > 1.$$

Olkoon $\rho = (1+|f'(\zeta)|)/2$, jolloin $1 < \rho < |f'(\zeta)|$, ja edellisen nojalla on olemassa $r > 0$ siten, että

$$|f(z)-\zeta| = |f(z)-f(\zeta)| > \rho\,|z-\zeta|$$

kaikilla $z \in B(\zeta,r)\setminus\{\zeta\}$. Olkoon nyt $z_0 \in B(\zeta,r)\setminus\{\zeta\}$ ja $z_n = f(z_{n-1})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin

$$|z_n-\zeta| > \rho\,|z_{n-1}-\zeta| > \ldots > \rho^n\,|z_0-\zeta|$$

kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis valitsemalla n riittävän suureksi ($n > \left(\log\frac{r}{|z_0-\zeta|}\right)/\log\rho$) saadaan $|z_n-\zeta| > r$, josta väite seuraa.

6. Kiintopisteet saadaan yhtälön $f(z) = 1/(z+1) = z$ ratkaisuista, jotka ovat $z_1 = \big(-1-\sqrt{5}\big)/2$ ja $z_2 = \big(-1+\sqrt{5}\big)/2$. Suoraan derivoimalla saadaan $f'(z) = -1/(z+1)^2$, joten

$$|f'(z_1)| = \frac{4}{\big(1-\sqrt{5}\big)^2} > 1 \quad \text{ja} \quad |f'(z_2)| = \frac{4}{\big(1+\sqrt{5}\big)^2} < 1.$$

Siis z_1 on repulsiivinen ja z_2 on attraktiivinen.

7. Olkoon $\varepsilon > 0$ mielivaltainen. Koska

$$\frac{|P(z)|}{|a_n||z|^n} = \left|\frac{P(z)}{a_nz^n}\right| = \left|1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot\frac{1}{z}+\ldots+\frac{a_0}{a_n}\cdot\frac{1}{z^n}\right| \overset{|z|\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

niin raja-arvon määritelmän nojalla on olemassa $r_0 > 0$ siten, että kaikilla $|z| > r_0$ pätee

$$\left|\frac{|P(z)|}{|a_n||z|^n}-1\right| \le \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad 1-\varepsilon \le \frac{|P(z)|}{|a_n||z|^n} \le 1+\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow\quad (1-\varepsilon)|a_n||z|^n \le |P(z)| \le (1+\varepsilon)|a_n||z|^n.$$

8. Merkitään $M = \max_{0\le j\le n-1}\left\{\left|\frac{a_j}{a_n}\right|\right\}$ ja $R = 1+M$. Jos $M = 0$, niin $P(z) = a_nz^n$, joten väite pätee triviaalisti. Oletetaan sitten, että $M > 0$

ja $|z| \geq R > 1$. Tällöin

$$\begin{aligned}
|P(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\
&\geq |a_n||z|^n - |a_{n-1}||z^{n-1}| - \ldots - |a_1||z| - |a_0| \\
&= |a_n||z|^n \left(1 - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|} - \ldots - \frac{|a_1|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|a_n|} \cdot \frac{1}{|z|^n}\right) \\
&\geq |a_n||z|^n \left(1 - M\left(\frac{1}{|z|} + \ldots + \frac{1}{|z|^{n-1}} + \frac{1}{|z|^n}\right)\right) \\
&> |a_n||z|^n \left(1 - M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|z|^k}\right) \\
&\overset{|z|>1}{=} |a_n||z|^n \left(1 - M \frac{1/|z|}{1 - 1/|z|}\right) = |a_n||z|^n \frac{|z| - 1 - M}{|z| - 1} \\
&= |a_n||z|^n \frac{|z| - R}{|z| - 1} \overset{|z|\geq R}{\geq} 0.
\end{aligned}$$

Näin ollen $|P(z)| > 0$ kaikilla $|z| \geq R$, eli kaikki funktion P nollakohdat kuuluvat kiekkoon $B(0, R)$.