Kompleksianalyysi a
Syksy 2016
Harjoitus 6 / Ratkaisut

1. Annettujen nollakohtien perusteella polynomi p on muotoa

$$p(z) = c(z+1)^2(z-3i)(z+3i),$$

missä $c \in \mathbb{C}$. Nyt

$$80 = p(1) = c\,4(1+9) = 40c \quad \Rightarrow \quad c = 2,$$

joten

$$p(z) = 2(z+1)^2(z^2+9).$$

2. Tehtävän kaikki kohdat voidaan ratkaista mekaanisesti derivoimalla annettua funktiota, laskemalla derivaatat pisteessä $z = 2$ ja sijoittamalla Taylorin kaavaan (luentorungon sivu 25). Ainakin kohdissa (a) ja (c) kannattaa kuitenkin edetä hieman toisin.

   (a) Kirjoitetaan $z = z - 2 + 2 = \xi + 2$ ($\xi = z - 2$). Tällöin

$$\begin{aligned} z^5 + 3z + 4 &= (\xi+2)^5 + 3(\xi+2) + 4 \\ &= \xi^5 + 5\cdot 2\xi^4 + 10\cdot 2^2\xi^3 + 10\cdot 2^3\xi^2 \\ &\quad + 5\cdot 2^4\xi + 2^5 + 3\xi + 6 + 4 \\ &= \xi^5 + 10\xi^4 + 40\xi^3 + 80\xi^2 + 83\xi + 42 \\ &= (z-2)^5 + 10(z-2)^4 + 40(z-2)^3 \\ &\quad + 80(z-2)^2 + 83(z-2) + 42. \end{aligned}$$

   (b) Merkitään $p(z) = z^{10}$. Tällöin yleisesti

$$p^{(k)}(z) = \frac{10!}{(10-k)!}\, z^{10-k}, \quad k \in \{0, \ldots, 10\}.$$

   Näin ollen

$$\begin{aligned} z^{10} &= \sum_{k=0}^{10} \frac{10!}{(10-k)!k!}\, 2^{10-k}(z-2)^k \\ &= 1024 + 5120(z-2) + 11520(z-2)^2 \\ &\quad + 15360(z-2)^3 + 13440(z-2)^4 + 8064(z-2)^5 \\ &\quad + 3360(z-2)^6 + 960(z-2)^7 + 180(z-2)^8 \\ &\quad + 20(z-2)^9 + (z-2)^{10}. \end{aligned}$$

   (c) Nyt

$$\begin{aligned} (z-1)(z-2)^3 &= ((z-2)+1)(z-2)^3 \\ &= (z-2)^4 + (z-2)^3. \end{aligned}$$

3. Jos rationaalifunktiolla R on m-asteinen napa pisteessä z_0, niin R on muotoa

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)^m Q(z)},$$

missä P ja Q ovat polynomeja siten, että $P(z_0) \neq 0$ ja $Q(z_0) \neq 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} R'(z) &= \frac{P'(z)(z-z_0)^m Q(z) - P(z)\left(m(z-z_0)^{m-1}Q(z) + (z-z_0)^m Q'(z)\right)}{\left((z-z_0)^m Q(z)\right)^2} \\ &= \frac{(z-z_0)\left(P'(z)Q(z) - P(z)Q'(z)\right) - mP(z)Q(z)}{(z-z_0)^{m+1}Q(z)^2}, \end{aligned}$$

missä osoittaja saa pisteessä z_0 arvon $-mP(z_0)Q(z_0) \neq 0$, ja $Q(z_0)^2 \neq 0$. Näin ollen rationaalifunktiolla R' on $(m+1)$-asteinen napa pisteessä z_0.

4. (a) $\log i = \operatorname{Log}|i| + i\operatorname{Arg} i + in2\pi = i\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
   (b) $\log(1-i) = \operatorname{Log}\sqrt{2} + i\left(-\frac{\pi}{4} + n2\pi\right) = \frac{1}{2}\operatorname{Log} 2 + \left(-\frac{\pi}{4} + n2\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
   (c) $\operatorname{Log}(-i) = \operatorname{Log}|-i| + i\operatorname{Arg}(-i) = -i\frac{\pi}{2}$;
   (d) $\operatorname{Log}(\sqrt{3}+i) = \operatorname{Log} 2 + i\frac{\pi}{6}$.

5. (a) $e^z = 2i \quad \Leftrightarrow \quad z = \log 2i = \operatorname{Log} 2 + i\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$;
   (b) Nyt

$$\begin{aligned} \operatorname{Log}(z^2-1) = \frac{i\pi}{2} \quad &\left(\Leftrightarrow \quad |z^2-1| = 1 \quad \text{ja} \quad \operatorname{Arg}(z^2-1) = \frac{\pi}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 - 1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\ &\Leftrightarrow \quad z = (1+i)^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}+n\pi}, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ &\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt[4]{2}\, e^{i\frac{\pi}{8}}; \end{aligned}$$

   (c) Koska $e^{2z} = (e^z)^2$, niin

$$\begin{aligned} &(e^z)^2 + e^z + 1 = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & e^z = \frac{-1 + (1 - 4\cdot 1)}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}} \\ \Leftrightarrow \quad & z = \pm i\frac{2\pi}{3} + in2\pi, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

6. Funktio f on analyyttinen, kun

$$\begin{aligned} 4 + i - z \neq t \in (-\infty, 0] \quad &\Leftrightarrow \quad z \neq 4 + i - t, \quad t \in (-\infty, 0] \\ &\Leftrightarrow \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{\xi = x + i \in \mathbb{C} : x \geq 4\}. \end{aligned}$$

Tässä joukossa

$$f'(z) = \frac{-1}{4+i-z} = \frac{1}{z-4-i}.$$

7. Logaritmin päähaara kelpaa, sillä pisteessä $z = -1$ saadaan

$$z^2 + 2z + 3 = 1 - 2 + 3 = 2 \notin (-\infty, 0].$$

Siis $f(z) = \operatorname{Log}(z^2 + 2z + 3)$, ja siis

$$f'(z) = \frac{2z+2}{z^2+2z+3} \quad \Rightarrow \quad f'(-1) = \frac{0}{2} = 0.$$

8. (a) Koska $\log i = i\left(\frac{\pi}{2} + n2\pi\right)$, niin

$$i^i = e^{i\log i} = e^{-\left(\frac{\pi}{2}+n2\pi\right)}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

(b) Koska $\log(-1) = i(\pi + n2\pi)$, niin

$$(-1)^{\frac{2}{3}} = e^{\frac{2}{3}\log(-1)} = e^{i\left(\frac{2\pi}{3}+n\frac{4\pi}{3}\right)}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Kolme eri arvoa saadaan valitsemalla esimerkiksi $n = 0$, $n = 1$ ja $n = 2$:

$$\begin{aligned}
&n = 0 : (-1)^{\frac{2}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\\
&n = 1 : (-1)^{\frac{2}{3}} = 1,\\
&n = 2 : (-1)^{\frac{2}{3}} = e^{i\frac{10\pi}{3}} = e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Huom! Tehtävän voisi ratkaista myös kurssin alkupuolen keinoin käyttäen esitystä $-1 = e^{-i\pi+in2\pi}$, $n \in \mathbb{Z}$.

(c) Koska $\log 2 = \operatorname{Log} 2 + in2\pi$, niin

$$2^{i\pi} = e^{i\pi\log 2} = e^{i\pi\operatorname{Log} 2 - n2\pi^2} = e^{-n2\pi^2}e^{i\pi\operatorname{Log} 1}, \quad n \in \mathbb{Z};$$

(d) Saadaan $\log(1+i) = \operatorname{Log}\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + n2\pi\right)$, $n \in \mathbb{Z}$. Nyt voitaisiin laskea kuten edellä, eli

$$(1+i)^{1-i} = e^{(1-i)\log(1+i)}$$

sijoittaen ja sieventäen. Tässä päästään kuitenkin ”sievään” tulokseen hieman helpommin, jos kirjoitetaan

$$\begin{aligned}
(1+i)^{1-i} &= (1+i)(1+i)^{-i} = (1+i)\,e^{-i\log(1+i)}\\
&= (1+i)\,e^{-i\operatorname{Log}\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+n2\pi}\\
&= (1+i)\,e^{\frac{\pi}{4}+n2\pi}e^{-i\operatorname{Log}\sqrt{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

9. (a) Logaritmin päähaara ei suoraan käy, sillä esimerkiksi pisteessä $z = 0$ on $z^2 - 1 = -1 \in (-\infty, 0]$. Tehtävä voidaan ratkaista ainakin kahdella eri tavalla:

Tapa 1. Kirjoitetaan

$$z^2 - 1 = (-1)(1 - z^2).$$

Koska kaikilla $z = x + iy$, joille $|z| < 1$, pätee

$$\Re(1 - z^2) = 1 - \Re z^2 = 1 - x^2 + y^2 > 0,$$

niin $\operatorname{Log}(1 - z^2)$ on analyyttinen yksikkökiekossa. Näin ollen, koska

$$(z^2 - 1)^{\frac{1}{2}} = (-1)^{\frac{1}{2}}(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} = ie^{\frac{1}{2}\log(1-z^2)},$$

niin funktio $ie^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(1-z^2)}$ toteuttaa vaaditut ehdot.

Tapa 2. Kirjoitetaan

$$z^2 - 1 = (z+1)(z-1),$$

jolloin

$$(z^2-1)^{\frac{1}{2}} = (z+1)^{\frac{1}{2}}(z-1)^{\frac{1}{2}}.$$

Nyt ratkaisu saadaan kiinnittämällä funktioiden $(z+1)^{\frac{1}{2}}$ ja $(z-1)^{\frac{1}{2}}$ haarat siten, että ne ovat analyyttisiä yksikkökiekossa: Esimerkiksi

$$(z+1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}(z+1)} \quad \text{ja} \quad (z-1)^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{1}{2}\mathcal{L}_0(z-1)}$$

kelpaavat, sillä $\Re(z+1) > -1+1 = 0$ ja $\Re(z-1) < 1-1 = 0$, kun $|z| < 1$.

(b) Logaritmin päähaara ei suoraan käy, sillä esimerkiksi pisteessä $z = 3i$ on $4 + z^2 = 4 - 9 = -5 \in (-\infty, 0]$. Kirjoitetaan

$$4 + z^2 = z^2\left(1 + \frac{4}{z^2}\right).$$

Nyt $\operatorname{Log}\left(1 + \frac{4}{z^2}\right)$ on analyyttinen annetussa alueessa, sillä

$$1 + \frac{4}{z^2} = t \in (-\infty, 0] \quad \Leftrightarrow \quad z = \pm\frac{2i}{\sqrt{1-t}},$$

missä $1/\sqrt{1-t} \in (0, 1]$. Näin ollen, koska

$$(4+z^2)^{\frac{1}{2}} = z\, e^{\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{4}{z^2}\right)},$$

niin funktio $z\, e^{\frac{1}{2}\operatorname{Log}\left(1+\frac{4}{z^2}\right)}$ toteuttaa vaaditut ehdot.

(c) Nytkään logaritmin päähaara ei suoraan käy, sillä $\operatorname{Log}(z^3-1)$ ei ole analyyttinen pisteessä $z = -2$. Kirjoitetaan

$$z^3 - 1 = z^3\left(1 - \frac{1}{z^3}\right).$$

Nyt $\operatorname{Log}\left(1 - \frac{1}{z^3}\right)$ on analyyttinen, kun $|z| > 1$, sillä ($z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $\theta \in (-\pi, \pi]$)

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{z^3} = 1 - r^{-3}e^{-i3\theta} \in (-\infty, 0] \quad &\Leftrightarrow \quad 3\theta = n2\pi \quad \text{ja} \quad r < 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \theta = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{-2\pi}{3} \quad \text{ja} \quad r < 1. \end{aligned}$$

Näin ollen $z\, e^{\frac{1}{3}\operatorname{Log}\left(1-\frac{1}{z^3}\right)}$ on joukossa $\{z : |z| > 1\}$ analyyttinen funktion $(z^3-1)^{\frac{1}{3}}$ haara.

10. Nyt

$$\begin{aligned} w = q(z) = 2e^z + e^{2z} \quad &\Leftrightarrow \quad (e^z)^2 + 2e^z - w = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad e^z = \frac{-2 + (4-4w)^{1/2}}{2} = -1 + (1+w)^{1/2}, \end{aligned}$$

missä neliöjuuri on kaksiarvoinen funktio. Siten

$$z = \log\left(-1 + (1+w)^{1/2}\right).$$

Jos $w = 3$, niin

$$z = \log(-1+2) = \log 1 = in2\pi, \quad n \in \mathbb{Z},$$

tai

$$z = \log(-1-2) = \log(-3) = \operatorname{Log} 3 + i(\pi + n2\pi), \quad n \in \mathbb{Z}.$$