Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 1 / EXTRA! / Vastausten luonnokset

1. Kyseessä on peilaus jos (a) pisteet ovat yhtä kaukana suorasta ja (b) ne yhdistävä suora on kohtisuorassa suoraa $ax + by = c$ vasten. Näistä (a) saadaan suoraan laskemalla: katsotaan että pisteiden keskiarvo on suoralla. Olkoon siis $h = \frac{1}{2}\left(\frac{2ic+(b-ai)\overline{z}}{b+ai} + z\right)$. Tällöin (yksityiskohtainen lasku sivuutetaan)

$$a\,\Re h + b\,\Im h = a\frac{ac + b^2\,\Re z - ab\,\Im z}{a^2+b^2} + b\frac{bc - ab\,\Re z + a^2\,\Im z}{a^2+b^2} = c,$$

joten kohta (a) on kunnossa.

Kohta (b) on alkeisgeometriaa: suoraa $ax+by = c$ vastaan kohtisuorassa ovat suorat $-bx + ay = g$, missä $g \in \mathbb{R}$. Pisteen $\frac{2ic+(b-ai)\overline{z}}{b+ai} - z$ olisi siis toteutettava tämä yhtälö arvolla $g = 0$ (jos tämä askarruttaa, piirrä kuva ja ajattele kompleksilukuja tason vektoreina lukiotyyliin), mikä on edellisessä vaiheessa tehtyjen laskujen jälkeen helppo tarkistaa suoraan yhtälöön sijoittamalla ja laskemalla.

2. (a) Valitsemalla u olemaan vektori jonka i:s alkio on 1 ja muut alkiot nollia saadaan suoralla laskulla että $a_{ii} = 0$; eli A:n diagonaalin alkiot ovat nollia. Valitsemalla u:n i:s ja j:s alkio olemaan 1 saadaan tämän jälkeen $a_{ij} = -a_{ji}$. (Tähän asti on päästy reaalisilla u; vrt. seuraavan kohdan esimerkki.)

   Ajatellaan nyt tällaisia 2×2-matriiseja. Ne ovat muotoa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

   Jos $u = (u_1\ u_2)^T$, niin

$$u^\dagger A u = (-a\overline{u_2}u_1 + a\overline{u_1}u_2) = 0.$$

   Nyt joko $a = 0$ tai $\overline{u_1}u_2 = \overline{u_2}u_1$. Jälkimmäinen on aina totta jos u_1 ja u_2 ovat reaalisia, jolloin tämä todistus ei auta (ja seuraavan kohdan esimerkki näyttää että mikään todistus ei auta); mutta kompleksisille u_1 ja u_2 voidaan aina löytää arvot niin että $\overline{u_1}u_2 \neq \overline{u_2}u_1$, jolloin $a = 0$ ja A on nollamatriisi. Yleinen tapaus on samanlainen, mutta sen auki kirjoittaminen jätetään opiskelijalle.

   (b) Esimerkiksi

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

   sillä jokaiselle reaalivektorille $u = (u_1\ u_2)^T$

$$u^\dagger A u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

3. (a) Olkoon A hermiittinen $n \times n$-kompleksimatriisi ja u $n \times 1$-kompleksivektori. Tällöin $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ kaikilla $1 \leq i, j \leq n$, ja siis $a_{ii} \in \mathbb{R}$ kaikilla $i = 1, \ldots, n$. Näin ollen

$$u^\dagger A u = (\overline{u_1} \ \overline{u_2} \cdots \overline{u_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Laskemalla tämä auki saadaan jokseenkin ikävän näköinen lauseke, josta saadaan kuitenkin järjestelemällä

$$(|u_1|^2 a_{11} + |u_2|^2 a_{22} + \ldots + |u_n|^2 a_{nn}) + (\overline{\overline{u_1} u_2 a_{12}} + \overline{u_1} u_2 a_{12})$$
$$+ (\overline{\overline{u_1} u_3 a_{13}} + \overline{u_1} u_3 a_{13}) + \ldots + (\overline{\overline{u_{n-1}} u_n a_{n-1,n}} + \overline{u_{n-1}} u_n a_{n-1,n}),$$

jossa kaikki summattavat ovat reaalisia, ja siten koko summa on reaalinen.

(b) (i) Matriisin $B^\dagger B$ rivin i sarakkeen j alkio on matriisin $B^\dagger$ i:s rivi kertaa matriisin B j:s sarake.

(ii) Matriisin $(B^\dagger B)^\dagger$ rivin i sarakkeen j alkio on matriisin $B^\dagger B$ rivin j sarakkeen i alkion kompleksikonjugaatti. Matriisin $B^\dagger B$ rivin j sarakkeen i alkio on matriisin $B^\dagger$ j:s rivi kertaa matriisin B i:s sarake.

(iii) Merkitään matriisin B i:nnettä saraketta b_i, ja sen j:nnettä saraketta b_j. Tällöin matriisin $B^\dagger$ i:s rivi on $\overline{b_i}$, ja sen j:s rivi on $\overline{b_i}$. Näin ollen kohtien (i) ja (ii) alkiot ovat

$$\overline{b_i} \cdot b_j \qquad \text{ja} \qquad \overline{\overline{b_j} \cdot b_i} = \overline{b_i} \cdot b_j,$$

missä tulot vektoreiden välisiä pistetuloja.

(c) Kohdan (b) nojalla $C^\dagger C$ on hermiittinen, ja kohdan (a) nojalla $u^\dagger C^\dagger C u \in \mathbb{R}$ kaikille u. Tämä ei aivan vielä riitä, joten lasketaan ensin tulot $u^\dagger C^\dagger$ ja Cu, jolloin saadaan

$$u^\dagger C^\dagger = (\overline{u_1 c_{11} + u_2 c_{12} + \ldots + u_n c_{1n}} \cdots \overline{u_1 c_{n1} + u_2 c_{n2} + \ldots + u_n c_{nn}})$$

ja

$$Cu = \begin{pmatrix} u_1 c_{11} + u_2 c_{12} + \ldots + u_n c_{1n} \\ \vdots \\ u_1 c_{n1} + u_2 c_{n2} + \ldots + u_n c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Kun nämä kerrotaan keskenään, saadaan tulokseksi

$$|u_1 c_{11} + u_2 c_{12} + \ldots + u_n c_{1n}|^2 + \ldots + |u_1 c_{n1} + u_2 c_{n2} + \ldots + u_n c_{nn}|^2,$$

joka on selvästi ei-negatiivinen reaaliluku.

4. Huomaa että

$$\arg[(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)] = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1),$$

eli $\cos\phi$ on kosini kahden kulman erotuksesta. Piirtämällä vihjeen mukainen kolmio nähdään että kyseessä on lukiogeometriasta tuttu kosinilause.

Complex Analysis a
Autumn 2015
Exercises 1 / EXTRA! / Sketch of answers

1. The points are one another's reflections with respect to a line if (a) their distance to the line is the same (b) the line segment joining them is orthogonal to the line $ax + by = c$. (a) can be verified by a direct calculation: check that the average of the points is on the line. Thus, let $h = \frac{1}{2}\left(\frac{2ic+(b-ai)\overline{z}}{b+ai} + z\right)$. Then (details are omitted)

$$a\,\Re h + b\,\Im h = a\frac{ac + b^2\,\Re z - ab\,\Im z}{a^2+b^2} + b\frac{bc - ab\,\Re z + a^2\,\Im z}{a^2+b^2} = c,$$

so the claim (a) holds.

The claim (b) can be checked by using basic geometry: the lines orthogonal to $ax + by = c$ are of the form $-bx + ay = g$ where $g \in \mathbb{R}$. The point $\frac{2ic+(b-ai)\overline{z}}{b+ai} - z$ should therefore satisfy this equation with $g = 0$ (if this is not clear to you, draw a picture and think about complex numbers as vectors) which, after the calculations done in the previous part, is easy to verify by simply substituting into the equation and calculating.

2. (a) Letting u be a vector whose ith entry 1 and the other entries are zeros, a direct calculation gives $a_{ii} = 0$, that is, the diagonal entries of A are all zero. By choosing the ith and $j$the entries of u to be 1 then gives $a_{ij} = -a_{ji}$. (So far we have only used vectors u with real numbers as entries; compare this to the example in part (b).)

Let's now think about such a 2×2-matrix. They are of the form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

If $u = (u_1\ u_2)^T$, then

$$u^\dagger A u = (-a\overline{u_2}u_1 + a\overline{u_1}u_2) = 0.$$

Now $a = 0$ or $\overline{u_1}u_2 = \overline{u_2}u_1$. The latter one is always true if u_1 and u_2 are real, in which case this proof does not help (and the example in the next part shows that no proof helps); but complex u_1 and u_2 can always be chosen such that $\overline{u_1}u_2 \neq \overline{u_2}u_1$, whence $a = 0$ and A is a zero matrix. The general case is similar but the details are left for the student.

(b) For example

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

because for every real vector $u = (u_1\ u_2)^T$

$$u^\dagger A u = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 & u_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = 0.$$

3. (a) Let A be a hermitian $n\times n$ complex matrix and u an $n\times 1$ complex vector. Then $a_{ij} = \overline{a_{ji}}$ for all $1 \le i, j \le n$, and thus $a_{ii} \in \mathbb{R}$ for all $i = 1, \dots, n$. Hence

$$u^\dagger Au = (\overline{u_1}\ \ \overline{u_2} \cdots \overline{u_n}) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \overline{a_{12}} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{1n}} & \overline{a_{2n}} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

By computing and organizing this becomes

$$(|u_1|^2 a_{11} + |u_2|^2 a_{22} + \ldots + |u_n|^2 a_{nn}) + (\overline{\overline{u_1}u_2a_{12}} + \overline{u_1}u_2a_{12})$$

$$+(\overline{\overline{u_1}u_3a_{13}} + \overline{u_1}u_3a_{13}) + \ldots + (\overline{\overline{u_{n-1}}u_na_{n-1,n}} + \overline{u_{n-1}}u_na_{n-1,n})$$

where all the summands are real, and thus the whole sum is real.

(b) (i) The entry on the ith row and jth column of the matrix $B^\dagger B$ is the product of the ith row of $B^\dagger$ and the jth column of B.

(ii) The entry on the ith row and jth column of the matrix $(B^\dagger B)^\dagger$ is the complex conjugate of the entry on the jth row and ith column of $B^\dagger B$. This entry is in turn the product of the jth row of $B^\dagger$ and the ith column of B.

(iii) Denote the ith column of B by b_i and the jth column by b_j. Then the ith and jth rows of $B^\dagger$ are $\overline{b_i}$ and $\overline{b_i}$, respectively. Hence the entries of cases (i) and (ii) are

$$\overline{b_i} \cdot b_j \qquad \text{and} \qquad \overline{\overline{b_j} \cdot b_i} = \overline{b_i} \cdot b_j$$

where the products are scalar products between vectors.

(c) By part (b) the matrix $C^\dagger C$ is a hermitian and by part (a) $u^\dagger C^\dagger Cu \in \mathbb{R}$ for all u. This is not quite enough, so let's start by calculating the products $u^\dagger C^\dagger$ and Cu. We get

$$u^\dagger C^\dagger = (\overline{u_1c_{11} + u_2c_{12} + \ldots + u_nc_{1n}} \cdots \overline{u_1c_{n1} + u_2c_{n2} + \ldots + u_nc_{nn}})$$

and

$$Cu = \begin{pmatrix} u_1c_{11} + u_2c_{12} + \ldots + u_nc_{1n} \\ \vdots \\ u_1c_{n1} + u_2c_{n2} + \ldots + u_nc_{nn} \end{pmatrix}.$$

Multiplying these gives

$$|u_1c_{11} + u_2c_{12} + \ldots + u_nc_{1n}|^2 + \ldots + |u_1c_{n1} + u_2c_{n2} + \ldots + u_nc_{nn}|^2$$

which is clearly a non-negative real number.

4. Notice that

$$\arg[(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)] = \arg(z_3 - z_1) - \arg(z_2 - z_1),$$

so $\cos\phi$ is a cosine of the difference of two angles. By drawing a picture according to the hint one sees that the claim is actually just a version of the familiar law of cosines.