Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 1 / EXTRA!

1. Tiedetään että kompleksikonjugaatti (eli $\overline{z}$) on kompleksiluvun z peilaus reaaliakselin suhteen. Olkoon $a, b, c \in \mathbb{R}$ siten, että $ab \neq 0$. Näytä että pisteen z peilaus suoran $ax + by = c$ suhteen on piste
$$\frac{2ic + (b - ai)\overline{z}}{b + ai}.$$
(Suora koostuu niistä kompleksiluvuista $x + iy$ jolle $ax + by = c$ pätee.)
(*Vihje:* Reaaliakseli on suora $y = 0$.)

2. Olkoon B $m \times n$-matriisi jonka alkiot ovat kompleksilukuja. Merkitään $B^\dagger$ matriisia joka saadaan ottamalla matriisin B transpoosi (vaihdetaan rivit sarakkeiksi ja sarakkeet riveiksi: rivin i sarakkeen j alkiosta (merkitään a_{ij}) tulee rivin j sarakkeen i alkio (merkitään a_{ji})), ja sen jälkeen jokaisesta alkiosta sen kompleksikonjugaatti. Eli esimerkiksi
$$\begin{pmatrix} i & 3 \\ 4-i & -2i \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} -i & 4+i \\ 3 & 2i \end{pmatrix},$$
ja
$$\begin{pmatrix} 1+i \\ 3 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1-i & 3 \end{pmatrix}.$$
Olkoon A $n \times n$-kompleksimatriisi. Todista seuraavat väitteet.
   (a) Jos $u^\dagger A u = 0$ kaikille $n \times 1$-kompleksivektoreille u, niin A on nollamatriisi.
   (*Vihje:* sen näyttämiseksi että a_{ij} on nolla, oleta että u:n alkiot ovat nollia lukuunottamatta i:nnettä ja j:nnettä alkiota.)
   (b) Näytä esimerkillä että yo. väite ("A on nollamatriisi") voi olla epätosi jos ehto pätee vain reaalivektoreille u.
   (*Vihje:* Koeta löytää 2×2-matriisi A joka ei ole nollamatriisi, ja jolle $u^\dagger A u = 0$ kaikille 2×1-reaalivektoreille u.)

3. Olkoon A $n \times n$-kompleksimatriisi. Sanotaan että A on *hermiittinen* jos $A^\dagger = A$.
   (a) Näytä: Jos A on hermiittinen, niin $u^\dagger A u$ on reaalinen kaikille $n \times 1$-kompleksivektoreille u.
   (b) Näytä: Jos B on $m \times n$-kompleksimatriisi, niin $B^\dagger B$ on hermiittinen.
   (c) Näytä: Jos C on $n \times n$-kompleksimatriisi ja u on $n \times 1$-kompleksivektori, niin $u^\dagger C^\dagger C u$ on ei-negatiivinen reaaliluku.

4. Olkoon z_1, z_2 ja z_3 eri kompleksilukuja, ja olkoon ϕ jokin argumentin $\arg[(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)]$ arvo. Näytä että
$$|z_3 - z_2|^2 = |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - |z_3 - z_1||z_2 - z_1| \cos \phi.$$
(*Vihje:* Tutki kompleksitason kolmiota jonka kärkipisteet ovat z_1, z_2 ja z_3.)

Complex Analysis a
Autumn 2015
Exercises 1 / EXTRA!

---

1. We know $\overline{z}$ is a reflection of z with respect to the real axis. Let $a, b, c \in \mathbb{R}$ such that $ab \neq 0$. Show that z reflected with respect to the line $ax + by = c$ is the point
$$\frac{2ic + (b - ai)\overline{z}}{b + ai}.$$
("The line"means the set of all those complex numbers $x + iy$ for which $ax + by = c$ holds.)

   (*Hint:* The real axis is the line $y = 0$.)

2. Let B be a $m \times n$ matrix whose entries are complex numbers. We write $B^\dagger$ for the matrix that is the transpose of B (exchange rows for columns: row i column j entry (we write a_{ij}) becomes row j column i entry (a_{ji})) with every entry complex conjugated. For example,
$$\begin{pmatrix} i & 3 \\ 4 - i & -2i \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} -i & 4 + i \\ 3 & 2i \end{pmatrix},$$
and
$$\begin{pmatrix} 1 + i \\ 3 \end{pmatrix}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 - i & 3 \end{pmatrix}.$$
Let A be a $n \times n$-complex matrix. Prove the following.

   (a) If $u^\dagger A u = 0$ for all $n \times 1$-complex vectors u, then A is a zero matrix. (That is, all entries of A are zeroes.)

   (*Hint:* To show $a_{ij} = 0$, consider a vector u with zero entries except for the i:th and j:th place.)

   (b) Show with an example that the previous point does not follow if it is true only for real vectors u.

   (*Hint:* It is enough to find a 2×2 matrix A that is not a zero matrix, and for which $u^\dagger A u = 0$ for all 2×1 real vectors u.)

3. Let A be a $n \times n$ complex matrix. We say that A is *Hermitian* if $A^\dagger = A$.

   (a) Show: If A is Hermitian, them $u^\dagger A u$ is real for all $n \times 1$ complex vectors u.

   (b) Show: If B is a $m \times n$ complex matrix, then $B^\dagger B$ is Hermitian.

   (c) Show: If C is a $n \times n$ complex matrix and u is a $n \times 1$ complex vector, then $u^\dagger C^\dagger C u$ is a non-negative real. (Since it is a 1×1 matrix, this just means its only entry is a non-negative real number.)

4. Let z_1, z_2 and z_3 be different complex numbers, and let ϕ be some value of the argument $\arg[(z_3 - z_1)/(z_2 - z_1)]$. Show that
$$|z_3 - z_2|^2 = |z_3 - z_1|^2 + |z_2 - z_1|^2 - |z_3 - z_1||z_2 - z_1| \cos \phi.$$
(*Hint:* Interpret geometrically and consider the complex plane triangle with corners at z_1, z_2 and z_3.)