Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 3 / EXTRA! / lyhyet vastaukset

1. Käydään todistus läpi vielä kertaalleen. Tarkastellaan pisteitä $z = x + iy$ jotka muodostavat kompleksitason ympyrän, eli pisteitä joille

$$A(x^2 + y^2) + Cx + Dy + E = 0,$$

joillakin vakioilla $A, C, D, E \in \mathbb{R}$. Tällaisen pisteen projektio Riemannin pallolle on piste (x_1, x_2, x_3), missä

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3} \qquad \text{ja} \qquad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Näin ollen pisteille (x_1, x_2, x_3) pätee

$$A\left(\left(\frac{x_1}{1 - x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1 - x_3}\right)^2\right) + \frac{Cx_1}{1 - x_3} + \frac{Dx_2}{1 - x_3} + E = 0.$$

Koska kaikille Riemannin pallon pisteille pätee $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, saadaan sijoittamalla $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = (1 - x_3)(1 + x_3)$

$$A\frac{(1 - x_3)(1 + x_3)}{(1 - x_3)^2} + \frac{Cx_1}{1 - x_3} + \frac{Dx_2}{1 - x_3} + E = 0.$$

Kertomalla nyt puolittain luvulla $1 - x_3$ ja järjestelemällä saadaan

$$Cx_1 + Dx_2 + (A - E)x_3 + A + E = 0.$$

Näin ollen projektiopisteiden joukko on tason $Cx_1 + Dx_2 + (A - E)x_3 + A + E = 0$ ja Riemannin pallon leikkauspisteiden joukko, ja on siis ympyrä Riemannin pallon pinnalla.

2. Olkoon (x_1, x_2, x_3) sellaisia Riemannin pallon pisteitä joille

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

joillekin vakioille $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Sijoittamalla tähän luentojen kaavoista $x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$, $x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$ ja $x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$, kertomalla nimittäjät pois ja järjestelemällä saadaan

$$(c + d)(x^2 + y^2) + 2ax + 2by - c + d = 0.$$

Tämän toteuttava kompleksilukujen $z = x + iy$ joukko on luvuista a, b, c ja d riippuen kompleksitason ympyrä, suora, piste, koko kompleksitaso tai tyhjä joukko. Pisteen tapauksessa tason ja Riemannin pallon leikkaus oli piste, kompleksitason tapauksessa oli $a = b = c = d = 0$, mikä ei ole järkevää, ja tyhjän joukon tapauksessa alkuperäinen taso ei lekannut Riemannin palloa.

3. Oletetaan että $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Tällöin jokaiselle $\epsilon > 0$ on olemassa $\delta > 0$ s.e. $|f(z) - w_0| < \epsilon$ kun $0 < |z - z_0| < \delta$. Tällöin $|\overline{f(z)} - \overline{w_0}| = |\overline{f(z) - w_0}| = |f(z) - w_0| < \epsilon$ kun $0 < |z - z_0| < \delta$. Käänteinen tulos seuraa siitä että $\overline{\overline{f(z)}} = f(z)$ ja $\overline{\overline{w_0}} = w_0$.

   Oletetaan että $\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0$. Edellisen nojalla $\lim_{z \to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0}$. Tiedetään että $f(z) + \overline{f(z)} = 2\Re f(z) = 2u(x, y)$, ja tiedetään että summan raja-arvo on raja-arvojen summa; ensimmäinen väite seuraa. Tiedetään että $f(z) - \overline{f(z)} = i2v(x, y)$, joten toinen väite seuraa. Sama logiikka todistaa väitteen toiseen suuntaan.

Complex Analysis a
Autumn 2015
Exercises 3 / EXTRA! / sketch of answers

1. The proof goes as follows. Consider points $z = x + iy$ which form a circle on the complex plane, that is points for which

$$A(x^2 + y^2) + Cx + Dy + E = 0$$

holds for some constants $A, C, D, E \in \mathbb{R}$.

Such a point has a projection (x_1, x_2, x_3) on the Riemann sphere, where

$$x = \frac{x_1}{1 - x_3} \qquad \text{and} \qquad y = \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Thus for these points (x_1, x_2, x_3) we have

$$A\left(\left(\frac{x_1}{1-x_3}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{1-x_3}\right)^2\right) + \frac{Cx_1}{1-x_3} + \frac{Dx_2}{1-x_3} + E = 0.$$

Since all points of the Riemann sphere satisfy $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, we have $x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2 = (1 - x_3)(1 + x_3)$, and thus

$$A\frac{(1-x_3)(1+x_3)}{(1-x_3)^2} + \frac{Cx_1}{1-x_3} + \frac{Dx_2}{1-x_3} + E = 0.$$

Multiplying both sides by $1 - x_3$ then gives

$$Cx_1 + Dx_2 + (A - E)x_3 + A + E = 0.$$

Hence the set of projected points is the intersection of plane $Cx_1 + Dx_2 + (A - E)x_3 + A + E = 0$ and the Riemann sphere, and is thereby a circle on the Riemann sphere.

2. Let (x_1, x_2, x_3) be points on the Riemann sphere such that

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

for some constants $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. By applying the formulas $x_1 = \frac{2x}{x^2+y^2+1}$, $x_2 = \frac{2y}{x^2+y^2+1}$ and $x_3 = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1}$ from the lectures and multiplying by $x^2 + y^2 + 1$, we obtain

$$(c + d)(x^2 + y^2) + 2ax + 2by - c + d = 0.$$

The set of complex numbers $z = x + iy$ satisfying this is, depending on a, b, c and d, a circle, a line, a point, the whole complex plane or an empty set. In case of a point, the intersection of the original plane and the Riemann sphere was also a point. In case of the complex plane we have $a = b = c = d = 0$, so the original plane was actually not a plane, but the whole space $\mathbb{R}^3$. In the case of the empty set, the intersection of the original plane and the Riemannin sphere was an empty set or the north pole.

3. Let us first assume that $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$. Then for every $\epsilon > 0$ there is $\delta > 0$ so that $|f(z) - w_0| < \epsilon$ when $0 < |z - z_0| < \delta$. Then $|\overline{f(z)} - \overline{w_0}| = |\overline{f(z) - w_0}| = |f(z) - w_0| < \epsilon$ when $0 < |z - z_0| < \delta$. The reverse follows since $\overline{\overline{f(z)}} = f(z)$ and $\overline{\overline{w_0}} = w_0$.

   Let us then assume that $\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$. By the previous $\lim_{z\to z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0}$. We know that $f(z) + \overline{f(z)} = 2\Re f(z) = 2u(x, y)$, and we know the limit of a sum is a sum of the limits; the proposition for u follows. We know $f(z) - \overline{f(z)} = i2v(x, y)$, and the proposition for v follows. The same logic creates the reverse proof.