
Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 3 / EXTRA!

1. Palauta mieleen seuraava luennoilla esitetty tulos: Jokaisen kompleksitason ympyrän ja suoran projektio Riemannin pallolle on ympyrä.
2. Osoita edellisen tehtävän kääneinen suunta: Jokainen Riemannin pallon ympyrä on kompleksitason ympyrän tai suoran projektio.
3. Olkoon $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ja $w_0 = u_0 + iv_0$. Todista että

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

jos ja vain jos

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u_0 \quad \text{ja} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v_0.$$

(*Vihje:* Näytä ensin että $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ jos ja vain jos $\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0}$.)

Complex Analysis a
Autumn 2015
Exercises 3 / EXTRA!

1. Recall the following result stated in the lectures: For each circle and line of the complex plane, their projection to the Riemann sphere is a circle.
2. Show the reverse of the previous exercise: Each circle on a Riemann sphere is the projection of a complex plane circle or line.
3. Let $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ and $w_0 = u_0 + iv_0$. Show that

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$$

if and only if

$$\lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} u(x, y) = u_0 \quad \text{and} \quad \lim_{x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0} v(x, y) = v_0.$$

(*Hint:* Show first that $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = w_0$ if and only if $\lim_{z \rightarrow z_0} \overline{f(z)} = \overline{w_0}$).