Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 4 / EXTRA! / lyhyet vastaukset

1. Määritelmän mukaan
$$\chi(z_n,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_n|^2}}.$$
Koska $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, niin $|z_n|$ saadaan mielivaltaisen suureksi, joten $\chi(z_n,\infty)$ saadaan mielivaltaisen pieneksi.

2. Tiedetään että $z^n = r^n e^{in\theta}$ joillekin r ja θ.

   Tapaus 1: Olkoon $|z| < 1$. Tällöin $r < 1$, joten $z^n \to 0$.

   Tapaus 2: Olkoon $z = 1$. Tällöin $z^n = 1 \to 1$.

   Tapaus 3: Olkoon $|z| \geq 1$, $z \neq 1$. Tällöin $r \geq 1$. Jos $r = 1$, niin $\theta \neq 0$. Tällöin $z^n = e^{in\theta}$ ei saa raja-arvoa (z^n kiertää yksikkökiekon kehää). Jos taas $r > 1$, niin $z^n \to \infty$, ja raja-arvoa ei taaskaan ole olemassa.

3. Sijoittamalla nähdään, että yhtälö
$$f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$$
on muotoa
$$0 = -3iw^2\sqrt{3}.$$
Ainoa käypä w olisi $w = 0$, joka ei ole janalla.

   Huomaa tehtävän opetus: Reaalianalyysistä tuttu differentiaalilaskennan väliarvolause ei päde kompleksifunktioille.

4. *Extra 3/3: Olkoon $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ ja $w_0 = u_0 + iv_0$. Tällöin*
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$
jos ja vain jos
$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} u(x,y) = u_0 \qquad \textit{ja} \qquad \lim_{x\to x_0, y\to y_0} v(x,y) = v_0. \qquad (*)$$
Miksi e^z on jatkuva? Siksi että
$$e^z = e^x(\cos y + i\sin y) = \underbrace{e^x\cos y}_{=u(x,y)} + i\underbrace{e^x\sin y}_{=v(x,y)},$$
ja reaalifunktioiden teoriasta tiedetään että $e^x\cos y$ ja $e^x\sin y$ ovat jatkuvia, ja näin ollen toteuttavat yhtälöt $(*)$ kaikilla $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.

Complex Analysis a
Autumn 2015
Exercises 4 / EXTRA! / sketch of answers

1. By the definition
$$\chi(z_n, \infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z_n|^2}}.$$
Since $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, we can have $|z_n|$ arbitrarily large, so we can get $\chi(z_n, \infty)$ arbitrarily small.

2. We know that $z^n = r^n e^{in\theta}$ for some r and θ.

   Case 1: Let $|z| < 1$. Then $r < 1$, so $z^n \to 0$.

   Case 2: Let $z = 1$. Then $z^n = 1 \to 1$.

   Case 3: Let $|z| \geq 1$, $z \neq 1$. Then $r \geq 1$. If $r = 1$, $\theta \neq 0$. Then $z^n = e^{in\theta}$ has no limit (geometric intuition: it goes round and round the unit circle). On the other hand, if $r > 1$, then $z^n \to \infty$.

3. Plug the numbers in. The equation
$$f(z_2) - f(z_1) = f'(w)(z_2 - z_1)$$
takes the form
$$0 = -3iw^2\sqrt{3}.$$
The only w for which this holds is $w = 0$, which isn't on the line segment.

   Note the teaching of this exercise: The mean value theorem does not hold for complex functions.

4. *Extra 3/3: Let $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z_0 = x_0 + iy_0$ and $w_0 = u_0 + iv_0$. Then*
$$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$$
if and only if
$$\lim_{x\to x_0, y\to y_0} u(x,y) = u_0 \qquad \textit{and} \qquad \lim_{x\to x_0, y\to y_0} v(x,y) = v_0. \qquad (*)$$
Now e^z is continuous because
$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = \underbrace{e^x \cos y}_{=u(x,y)} + i\underbrace{e^x \sin y}_{=v(x,y)},$$
and by the theory of real functions, we know that $e^x \cos y$ and $e^x \sin y$ are continuous and thus satisfy the equations $(*)$ for all $x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$.