**Kompleksianalyysi a**
**Syksy 2013**
**Harjoitus 5 / EXTRA!**

# Iteroidut kuvaukset: Julian joukot

Tarkastellaan iteroimalla muodostuvaa jonoa

$$z_0,\ f(z_0),\ f(f(z_0)), \ldots,$$

jota sanotaan pisteen $z_0$ *radaksi* kuvauksessa $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Jos iteroimme funktiota $f(z) = z^2$, niin on helppo ennustaa ratoja. Jos lähtöpiste (tai siemen) $z_0$ on yksikkökiekon sisällä, niin radat ovat rajoitettuja (neliöinti pienentää modulia), ja radat suppenevat origoon. Jos taas $|z_0| > 1$, niin radat ovat rajoittamattomia.

**Esimerkki 1** *Jos* (i) *funktio $f$ on analyyttinen pisteen $\xi \in \mathbb{C}$ ympäristössä,* (ii) $f(\xi) = \xi$, *ja* (iii) $|f'(\xi)| < 1$, *niin on olemassa $r > 0$ siten, että kaikkien pisteiden $z_0 \in B(\xi, r)$ radat pysyvät kiekossa $B(\xi, r)$, ja suppenevat kohti pistettä $\xi$.*

Jos $f(\xi) = \xi$, niin $\xi$ on funktion $f$ *kiintopiste*. Kiintopistettä, jolla on Esimerkin **??** ominaisuudet sanotaan *atraktiiviseksi kiintopisteeksi*, ja sellaisten lähtöpisteiden joukkoa, joiden radat suppenevat pisteeseen $\xi$, sanotaan *atraktiiviseksi alueeksi.* Näin ollen $\xi = 0$ on funktion $f(z) = z^2$ atraktiivinen kiintopiste ($f(0) = 0$ ja $|f'(0)| = 0 < 1$), ja atraktiivinen alue on $\mathbb{D}$. Esimerkin **??** nojalla jokaisen atraktiivisen kiintopisteen atraktiivinen alue pitää sisällään avoimen kiekon. Funktion $f(z) = z^2$ toinen kiintopiste on $\xi = 1$. Se on *repulsiivinen kiintopiste*, koska $|f'(\xi)| > 1$.

Jos $|z_0| = 1$, niin pisteen $z_0$ rata kuvauksessa $f(z) = z^2$ sisältyy yksikkökiekon kehään. Itseasiassa, jos $z_0 = \pm 1$, niin rata suppenee nopeasti kiintopisteeseen $\xi = 1$.

**Määritelmä 1** Polynomifunktion $f$ *täytetty Julian joukko* on

$$\big\{z_0 \in \mathbb{C} : \text{pisteen } z_0 \text{ rata kuvauksessa } f \text{ on rajoitettu}\big\}.$$

*Julian joukko* on täytetyn Julian joukon reuna.

Esimerkiksi, funktion $f(z) = z^2$ Julian joukko on $\partial\mathbb{D}$, ja sen täytetty Julian joukko on $\overline{\mathbb{D}}$.

1. Osoita Esimerkin **??** väite. *Vinkki:* Olkoon $\varrho := \big(1 + |f'(\xi)|\big)/2 < 1$. Derivaatan määritelmän nojalla on olemassa luku $r > 0$ siten, että $|f(z) - f(\xi)| \leq \varrho|z - \xi|$ kaikilla $z \in B(\xi, r)$. Osoita, että kiekolla $B(\xi, r)$ on vaaditut ominaisuudet.

2. Olkoon $f$ kokonainen, ja $\zeta$ sen repulsiivinen kiintopiste. Todista, että on olemassa $\zeta$-keskinen kiekko $D$ siten, että lähtöpisteistä $w \in D \setminus \{\zeta\}$ aloitetut radat poistuvat lopulta kiekosta $D$.

3. Määrää funktion $f(z) = 1/(z + 1)$ kiintopisteet, ja erittele mitkä kiintopisteistä ovat atraktiivisia, repulsiivisia tai ei kumpiakaan.

**Complex Analysis a**
**Autumn 2013**
**Exercises 5 / EXTRA!**

## Iterated maps: Julia sets

Consider the sequence of complex points (the iteration)

$$z_0,\ f(z_0),\ f(f(z_0)), \ldots,$$

which is called an *orbit* generated by the *starting point* (or the *seed*) $z_0$ trough the iteration of $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. If $f(z) = z^2$, then it is easy to determine orbits. If $z_0 \in \mathbb{D}$, then the orbit is bounded, and the iteration converges to the origin; while if $|z_0| > 1$, then the orbit is unbounded.

**Example 1** *If* (i) $f$ *is analytic in a neighborhood of* $\xi \in \mathbb{C}$*,* (ii) $f(\xi) = \xi$*, and* (iii) $|f'(\xi)| < 1$*, then there exists* $r > 0$ *such that all orbits launched from* $z_0 \in B(\xi, r)$ *remain in the disc* $B(\xi, r)$*, and they converge to* $\xi$*.*

If $f(\xi) = \xi$, then $\xi$ is a *fixed point* of $f$. A fixed point $\xi$ satisfying the properties in Example **??** is called an *attractor*, and the set of seeds whose orbits converge to $\xi$, are said to be its *basin of attraction*. Hence, $\xi = 0$ is an attractor of $f(z) = z^2$ ($f(0) = 0$ and $|f'(0)| = 0 < 1$), and its basin of attraction is $\mathbb{D}$. By Example **??** every basin of attraction includes a disc centered at the attractor. Another fixed point of $f(z) = z^2$ is $\xi = 1$. It is *repellor*, since $|f'(\xi)| > 1$.

If $|z_0| = 1$, then the orbit launched from $z_0$ trough the iteration of $f(z) = z^2$ lies on the unit circle. In particular, if $z_0 = \pm 1$, then the orbit converges to the fixed point $\xi = 1$.

**Definition 1** The *filled Julia set* for a polynomial $f$ is defined to be the set of points that launch bounded orbits through the iteration of $f$. The *Julia set* is the boundary of the filled Julia set.

For example, the Julia set of $f(z) = z^2$ is $\partial\mathbb{D}$, while the filled Julia set is $\overline{\mathbb{D}}$.

1. Prove Example **??**. *Hint:* Denote $\varrho := \big(1 + |f'(\xi)|\big)/2 < 1$. By the definition of the derivative there exists $r > 0$ such that $|f(z) - f(\xi)| \leq \varrho\,|z - \xi|$ for all $z \in B(\xi, r)$. Prove that $B(\xi, r)$ satisfies the assertion.

2. Let $f$ be entire, and let $\zeta \in \mathbb{C}$ a repellor for $f$. Prove that there exits a disc $D$ centered at $\zeta$ such that all orbits launched from $w \in D \setminus \{\zeta\}$ eventually leave $D$.

3. Determine the fixed points of $f(z) = 1/(z + 1)$, and decide which are attractors, repellors, or neither.

**Kompleksianalyysi a**
**Syksy 2013**
**Harjoitus 5 / EXTRA! / lyhyet vastaukset**

1. Perustellaan ensin vinkin väite lyhyesti: Koska $f(\xi) = \xi$ ja
$$\lim_{z\to\xi} \left| \frac{f(z) - f(\xi)}{z - \xi} \right| = |f'(\xi)| < 1,$$
niin kaikilla $\varrho \in (|f'(\xi)|, 1)$ on olemassa $r = r(\varrho) > 0$ siten, että
$$|f(z) - \xi| = |f(z) - f(\xi)| \leq \varrho\, |z - \xi|$$
kaikilla $z \in B(\xi, r)$. Erityisesti voidaan valita $\varrho = (1 + |f'(\xi)|)/2$.
Tarkastellaan sitten näin löydettyä kiekkoa $B(\xi, r)$. Olkoon $z_0 \in B(\xi, r)$ ja $z_n = f(z_{n-1})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin edellisen nojalla
$$|z_n - \xi| \leq \varrho\, |z_{n-1} - \xi| \leq \ldots \leq \varrho^n\, |z_0 - \xi|.$$
Nyt $\varrho^n \to 0$, kun $n \to \infty$, joten väite seuraa.

2. Oletusten nojalla $f(\zeta) = \zeta$ ja
$$\lim_{z\to\zeta} \left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \right| = |f'(\zeta)| > 1.$$
Olkoon $\rho = (1 + |f'(\zeta)|)/2$, jolloin $1 < \rho < |f'(\zeta)|$, ja edellisen nojalla on olemassa $r > 0$ siten, että
$$|f(z) - \zeta| = |f(z) - f(\zeta)| > \rho\, |z - \zeta|$$
kaikilla $z \in B(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$. Olkoon nyt $z_0 \in B(\zeta, r) \setminus \{\zeta\}$ ja $z_n = f(z_{n-1})$ kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Tällöin
$$|z_n - \zeta| > \rho\, |z_{n-1} - \zeta| > \ldots > \rho^n\, |z_0 - \zeta|$$
kaikilla $n \in \mathbb{N}$. Siis valitsemalla $n$ riittävän suureksi ($n > \left(\log \frac{r}{|z_0 - \zeta|}\right) / \log \rho$) saadaan $|z_n - \zeta| > r$, josta väite seuraa.

3. Kiintopisteet saadaan yhtälön $f(z) = \frac{1}{z+1} = z$ ratkaisuista, jotka ovat $z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ ja $z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Suoraan derivoimalla saadaan $f'(z) = \frac{-1}{(z+1)^2}$, joten
$$|f'(z_1)| = \frac{4}{(1 - \sqrt{5})^2} > 1 \quad \text{ja} \quad |f'(z_2)| = \frac{4}{(1 + \sqrt{5})^2} < 1.$$
Siis $z_1$ on repulsiivinen ja $z_2$ on attraktiivinen.

**Complex Analysis a**
**Autumn 2013**
**Exercises 5 / EXTRA! / sketch of answers**

1. We first shortly prove the claim of the hint: By the assumptions, $f(\xi) = \xi$ and
$$\lim_{z\to\xi}\left|\frac{f(z)-f(\xi)}{z-\xi}\right| = |f'(\xi)| < 1.$$
Thus, for every $\varrho \in (|f'(\xi)|, 1)$ there exists $r = r(\varrho) > 0$ such that
$$|f(z)-\xi| = |f(z)-f(\xi)| \le \varrho\,|z-\xi|$$
for all $z \in B(\xi, r)$. Specifically, we may choose $\varrho = (1+|f'(\xi)|)/2$.
Then, consider the disc $B(\xi, r)$ found by reasoning above. Let $z_0 \in B(\xi, r)$ and $z_n = f(z_{n-1})$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then
$$|z_n - \xi| \le \varrho\,|z_{n-1}-\xi| \le \ldots \le \varrho^n\,|z_0-\xi|.$$
Because $\varrho^n \to 0$ as $n \to \infty$, the assertion follows.

2. By the assumptions, we have $f(\zeta) = \zeta$ and
$$\lim_{z\to\zeta}\left|\frac{f(z)-f(\zeta)}{z-\zeta}\right| = |f'(\zeta)| > 1.$$
Let $\rho = (1+|f'(\zeta)|)/2$. Then $1 < \rho < |f'(\zeta)|$ and there exists $r > 0$ such that
$$|f(z)-\zeta| = |f(z)-f(\zeta)| > \rho\,|z-\zeta|$$
for all $z \in B(\zeta, r)\setminus\{\zeta\}$. Now, let $z_0 \in B(\zeta, r)\setminus\{\zeta\}$ and $z_n = f(z_{n-1})$ for all $n \in \mathbb{N}$. Then
$$|z_n-\zeta| > \rho\,|z_{n-1}-\zeta| > \ldots > \rho^n\,|z_0-\zeta|$$
for all $n \in \mathbb{N}$. Hence, by choosing $n$ to be large enough ($n > \left(\log\frac{r}{|z_0-\zeta|}\right)/\log\rho$) we have $|z_n-\zeta| > r$, which completes the proof.

3. The fixed points are the solutions the equation $f(z) = \frac{1}{z+1} = z$, from which we have $z_1 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ and $z_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$. By derivating, we have $f'(z) = \frac{-1}{(z+1)^2}$, so
$$|f'(z_1)| = \frac{4}{(1-\sqrt{5})^2} > 1 \quad\text{and}\quad |f'(z_2)| = \frac{4}{(1+\sqrt{5})^2} < 1.$$
Thus $z_1$ is repellor and $z_2$ is attractor.