Kompleksianalyysi a
Syksy 2015
Harjoitus 6 / EXTRA! / lyhyet vastaukset

1. Merkitään $f = u + iv$, missä u ja v ovat harmonisia ja toteuttavat Cauchy-Riemannin yhtälöt ($u_x = v_y$ ja $u_y = -v_x$) alueessa D. Tällöin $|f| = \sqrt{u^2 + v^2} > 0$ alueessa D, ja suoraan laskemalla saadaan

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |f| = \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}$$

ja edelleen

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |f| = \frac{uu_{xx} + vv_{xx}}{u^2 + v^2} + \frac{u^2(-u_x^2 + v_x^2) + v^2(u_x^2 - v_x^2) - 4uvu_xv_x}{(u^2 + v^2)^2}.$$

Vastaavasti saadaan $\frac{\partial}{\partial y} \ln |f|$ ja $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln |f|$. Näin ollen edellä lasketut funktion $\ln |f|$ osittaisderivaatat ovat jatkuvia, koska u:n ja v:n osittaisderivaatat ovat jatkuvia. Samanlaisilla laskuilla nähdään, että myös $(\ln |f|)_{xy}$ ja $(\ln |f|)_{yx}$ ovat jatkuvia. Lisäksi funktioiden u ja v harmonisuuden ja Cauchy-Riemannin yhtälöiden nojalla saadaan

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |f| + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln |f| \equiv 0,$$

joten $\log |f|$ on harmoninen alueessa D.

Complex Analysis a
Autumn 2015
Exercises 6 / EXTRA! / sketch of answers

---

1. Mark $f = u + iv$, where u and v are harmonic and satisfy the Cauchy-Riemann equations ($u_x = v_y$ and $u_y = -v_x$) in the domain D. Then $|f| = \sqrt{u^2 + v^2} > 0$ in D, and straightforward calculations shows that

$$\frac{\partial}{\partial x} \ln |f| = \frac{uu_x + vv_x}{u^2 + v^2}$$

and moreover,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |f| = \frac{uu_{xx} + vv_{xx}}{u^2 + v^2} + \frac{u^2(-u_x^2 + v_x^2) + v^2(u_x^2 - v_x^2) - 4uvu_xv_x}{(u^2 + v^2)^2}$$

Similar expressions can be obtained for $\frac{\partial}{\partial y} \ln |f|$ and $\frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln |f|$. Hence the partial derivatives of $\ln |f|$ above are continuous, because the partial derivatives of u and v are continuous. Similar calculations show that $(\ln |f|)_{xy}$ and $(\ln |f|)_{yx}$ are also continuous. Moreover, by using the harmonicity of u and v and the Cauchy-Riemann equations we obtain

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln |f| + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ln |f| \equiv 0.$$

Thus $\ln |f|$ is harmonic in D.