
Kompleksianalyysi b
Syksy 2016
Harjoitus 1

1. Etsi hyväksyttävä parametrisointi seuraaville sileille käyrille, oikea suuntaus huomioiden.

- (a) jana pisteestä $z = 1 + i$ pisteeseen $z = -2 - 3i$,
- (b) ympyrä $|z - 2i| = 4$ kuljettuna kerran myötäpäivään pisteestä $z = 4 + 2i$ alkaen,
- (c) ympyrän $|z| = R$ toiseen neljännekseen kuuluva kaari pisteestä $z = Ri$ pisteeseen $z = -R$,
- (d) paraabelin $y = x^2$ muodostaman käyrän osa pisteestä $(1, 1)$ pisteeseen $(3, 9)$.

2. Olkoon γ suunnattu sileä käyrä. Jos $z = z(t)$, $a \leq t \leq b$, on käyrän γ oikealla suuntauksella varustettu hyväksyttävä parametrisointi, niin osoita, että sama pätee myös parametrisoinnille

$$z_1(t) = z \left(\frac{b-a}{d-c} t + \frac{ad-bc}{d-c} \right), \quad c \leq t \leq d.$$

3. Laske pituus ääriviivalle Γ , jolla on parametrisointi $z = z(t) = 5e^{3it}$, $0 \leq t \leq \pi$.

4. Laske seuraavat integraalit.

- (a) $\int_0^1 (2t + it^2) dt$,
- (b) $\int_{-2}^0 (1 + i) \cos(it) dt$,
- (c) $\int_0^1 (1 + 2it)^5 dt$,
- (d) $\int_0^2 \frac{t}{(t^2 + i)^2} dt$.

5. Laske Esimerkin 1.2.7 avulla

$$\int_C \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2 \right) dz,$$

missä C on ympyrä $|z - i| = 4$ kuljettuna kerran vastapäivään.

6. Laske $\int_{\Gamma} (\operatorname{Re} z) dz$, missä integroidaan pitkin janaa pisteestä $z = 0$ pisteeseen $z = 1 + 2i$.