Kompleksianalyysi b 2013
Harjoitus 1, Ratkaisut

① (a) Voidaan valita "tavanomainen" janan parametrisointi:

$$z(t) = (1-t)(1+i) + t(-2-3i),$$

missä $t \in [0,1]$. Tarkistetaan vielä Määritelmän 1.1.1 toteutuminen: Nyt

$$z'(t) = -1-i-2-3i = -3-4i \neq 0$$

on jatkuva, kun $t \in [0,1]$, ja $z(t)$ on selvästi injektio. Siten $z(t)$ on hyväksyttävä parametrisointi.

(b) Kyseessä on siis $2i$-keskinen, 4-säteinen ympyrä kompleksitasossa. Voidaan siis valita

$$z(t) = 2i + 4e^{-it},$$

missä $t \in [0, 2\pi]$. Koska

$$z'(t) = -4ie^{-it} \neq 0$$

on jatkuva välillä $[0, 2\pi]$, ja selvästi $z(t)$ on injektio välillä $[0, 2\pi)$ ja $z(0) = 2i+4 = z(2\pi)$, niin $z(t)$ on hyväksyttävä parametrisointi.

(c) Valitaan

$$z(t) = Re^{it},$$

missä $t \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$. Koska

$$z'(t) = iRe^{it} \neq 0$$

on jatkuva välillä $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ ja $z(t)$ on injektio, niin $z(t)$ on hyväksyttävä parametrisointi.

(d) Valitaan

$$z(t) = t + it^2,$$

missä $t \in [1, 3]$. Koska

$$z'(t) = 1 + i2t \neq 0$$

on jatkuva, kun $t \in [1,3]$, ja $z(t)$ on injektio, niin $z(t)$ on hyväksyttävä parametrisointi.

(2) Osoitetaan ensin, että
$$\phi(t) = \frac{b-a}{d-c}\, t + \frac{ad-bc}{d-c}$$
on bijektio joukolta $[c,d]$ joukolle $[a,b]$, jolloin $z_1 = z \circ \phi$ on hyvin määritelty injektio $[c,d] \to \mathbb{C}$ ($z(t)$ on hyväksyttävä parametrisointi). Koska
$$\phi'(t) = \frac{b-a}{d-c} > 0,$$
niin ϕ on aidosti kasvava ja siten injektio. Koska ϕ on jatkuva, ja
$$\phi(c) = \frac{\cancel{bc} - ac + ad - \cancel{bc}}{d-c} = a$$
ja
$$\phi(d) = \frac{bd - \cancel{ad} + \cancel{ad} - bc}{d-c} = b,$$
niin ϕ on surjektio. Siis $\phi : [c,d] \to [a,b]$ on bijektio.

Tarkistetaan vielä Määritelmän 1.1.1 derivoituvuusehdot. Nyt

$$z_1'(t) = \frac{d}{dt} z(\phi(t)) = z'(\phi(t))\, \phi'(t)$$
$$= z'(\phi(t)) \frac{b-a}{d-c} \neq 0, \quad t \in [c,d],$$
sillä $z'(t) \neq 0 \ \forall\, t \in [a,b]$, ja z_1' on jatkuva, koska z' ja ϕ ovat jatkuvia. Näin ollen $z_1(t)$, $c \le t \le d$, on hyväksyttävä parametrisointi käyrälle γ (toteuttaa M.1.1.1 ehdot). Suuntaus säilyy (verrattaen parametrisointiin z), koska ϕ on kasvava.

(3) Äärivivan Γ pituus voidaan laskea esimerkiksi päättelemällä: Kyseessä on 5-säteisen origo-keskisen ympyrän kaari $3/2$-kertaisesti, joten
$$l(\Gamma) = \frac{3}{2} \cdot 2\pi \cdot 5 = 15\pi.$$

Toinen vaihtoehto on käyttää luentorungon sivun 5 kaavaa, jolloin Γ on ajateltava (teorian toimivuuden vuoksi) kahden yksinkertaisen käyrän yhdisteenä:

$$l(\Gamma) = \int_0^{2\pi/3} |z'(t)|\,dt + \int_{2\pi/3}^{\pi} |z'(t)|\,dt = \int_0^{\pi} |15 i e^{3it}|\,dt$$

$$= 15 \int_0^{\pi} dt = 15\pi.$$

(4) Lauseen 1.2.3 nojalla saadaan

(a) $\int_0^1 (2t + it^2)\,dt = \Big/_0^1 \left(t^2 + \frac{i}{3} t^3\right) = 1 + i\frac{1}{3}$,

(b) $$\int_{-2}^{0} (1+i)\cos(it)\,dt = \frac{1+i}{i} \int_{-2}^{0} i\cos(it)\,dt$$

$$= \frac{1+i}{i} \Big/_{-2}^{0} \sin(it) = -\frac{1+i}{i}\sin(-i2) = \frac{1+i}{i}\sin(i2)$$

$$= (1+i)\sinh 2,$$

(c) $$\int_0^1 (1+2it)^5\,dt = \frac{1}{2i}\int_0^1 2i(1+2it)^5\,dt = \frac{1}{2i}\Big/_0^1 \frac{1}{6}(1+2it)^6$$

$$= \frac{1}{2i}\left((1+2i)^6 - 1\right) = \frac{11}{3} - \frac{29}{3}i,$$

(d) $$\int_0^2 \frac{t}{(t^2+i)^2}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^2 2t(t^2+i)^{-2}\,dt = \frac{1}{2}\Big/_0^2 \frac{1}{-1}(t^2+i)^{-1}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4+i} - \frac{1}{i}\right) = -\frac{2}{17} - \frac{8}{17}i.$$

(5) Esimerkki 1.2.7 kertoo tämän tehtävän tapauksessa, että

$$\int_C (z-i)^n\,dz = \begin{cases} 0, & \text{kun } n \neq -1 \\ 2\pi i, & \text{kun } n = -1 \end{cases}.$$

Näin ollen

$$\int_C \left(\frac{6}{(z-i)^2} + \frac{2}{z-i} + 1 - 3(z-i)^2\right)dz$$

$$= 6\underbrace{\int_C (z-i)^{-2}\,dz}_{=0} + 2\underbrace{\int_C (z-i)^{-1}\,dz}_{=2\pi i} + \underbrace{\int_C (z-i)^{0}\,dz}_{=0} - 3\underbrace{\int_C (z-i)^{2}\,dz}_{=0}$$

$$= 2 \cdot 2\pi i = 4\pi i.$$

⑥ Janalle Γ pisteestä $z=0$ pisteeseen $z=1+2i$ saadaan parametrisointi

$$z(t) = (1-t)\cdot 0 + t(1+2i) = t(1+2i), \quad t \in [0,1].$$

Nyt

$$z'(t) = 1+2i, \quad t \in [0,1],$$

joten Lauseen 1.2.5 nojalla saadaan

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} z \, dz = \int_0^1 \operatorname{Re} z(t)\, z'(t)\, dt = \int_0^1 \operatorname{Re}(t+i2t)(1+2i)\, dt$$

$$= (1+2i)\int_0^1 t\, dt = (1+2i) \Big/_0^1 \frac{t^2}{2} = \frac{1}{2} + i.$$