
Kompleksianalyysi b
Syksy 2016
Harjoitus 2

1. Olkoon C kärkipisteiden $z = 0$, $z = 1$, $z = 1 + i$, ja $z = i$ muodostaman neliön reuna, kärkipisteiden järjestyksen mukaisesti suunnattuna, ja kerran kierrettynä. Osoita käyttämättä Lausetta 1.3.1 tai sen korollaria, että

$$\int_C e^z dz = 0.$$

2. Laske $\int_\gamma (x - 2xyi) dz$, $z = x + iy$, missä $\gamma : z = t + it^2$, $0 \leq t \leq 1$.
3. Laske $\int_C \bar{z}^2 dz$, missä C on Tehtävässä 1 annettu ääriviiva.

4. Totta vai tarua:

$$\int_{|z|=1} \bar{z} dz = \int_{|z|=1} \frac{dz}{z},$$

missä integroidaan kerran vastapäivään?

5. Johda seuraavat arviot:

- (a) Jos C on ympyrän $|z| = 3$ muodostama suljettu käyrä, niin

$$\left| \int_C \frac{dz}{z^2 - i} \right| \leq \frac{3\pi}{4}.$$

- (b) Jos γ on jana pisteestä $z = R > 0$ pisteeseen $z = R + 2\pi i$, niin

$$\left| \int_\gamma \frac{e^{3z} dz}{1 + e^z} \right| \leq \frac{2\pi e^{3R}}{e^R - 1}.$$

- (c) Jos Γ on se ympyrän $|z| = 1$ kehän osa, joka kuuluu ensimmäiseen neljännekseen, niin

$$\left| \int_\Gamma \operatorname{Log} z dz \right| \leq \frac{\pi^2}{4}.$$

- (d) Jos γ on jana pisteestä $z = 0$ pisteeseen $z = i$, niin

$$\left| \int_\gamma e^{\sin z} dz \right| \leq 1.$$

6. Osoita, että $\int_\Gamma P(z) dz = 0$, jos P on polynomi ja Γ on suljettu ääriviiva.

7. Todista: Jos f on jatkuva pisteessä z , niin

$$\int_0^1 f(z + t\Delta z) dt \rightarrow f(z), \quad \text{kun } \Delta z \rightarrow 0.$$

8. Olkoon f jatkuvasti derivoituva analyyttinen funktio, joka toteuttaa ehdon $|f'(z)| \leq M$ kaikilla $z \in \mathbb{D} := \{z : |z| < 1\}$. Todista, että

$$|f(z_2) - f(z_1)| \leq M|z_2 - z_1|$$

kaikilla $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$.